

Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Fragen zur Prüfungsvorbereitung

- (1) Grundlagen
 - (a) Erklärung der Begriffe „Teilbarkeit“, „Primzahl“, „kongruent“.
 - (b) Was besagt der Fundamentalsatz der Arithmetik? Beispiel $n = 185$.
 - (c) Was ist die p -adische Bewertung $v_p(n)$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$? Was ist $v_2(84)$?
 - (d) Formel für $v_p(n!)$? Was ist $v_5(1000!)$?
 - (e) Wie sehen die Teiler einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ aus, wenn man die Primfaktorzerlegung von n kennt?
 - (f) Wie kann man die Anzahl der Teiler $\tau(n)$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ berechnen, wenn man die Faktorisierung von n kennt?
 - (g) Wie ist $\text{ggT}(a, b)$ definiert? Wie kann man $\text{ggT}(a, b)$ ausrechnen, wenn man die Primfaktorzerlegung von a und b kennt? Wie, wenn man die Primfaktorzerlegung nicht kennt?
 - (h) Was bedeutet $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ und $f(x) \sim g(x)$ für Funktionen $f(x)$ und $g(x)$? Beispiele.
- (2) Ganzwertige Polynome
 - (a) Wie lassen sich Polynome $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ - ganzwertige Polynome - beschreiben?
 - (b) Wie kann man zu vorgegebenen Zahlen $a_0, \dots, a_n$ ein Polynom f vom Grad $\leq n$ bestimmen mit $f(0) = a_0, \dots, f(n) = a_n$?
 - (c) Wie kann man für ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ die Zahl $\text{ggT}(\{f(k) : k \in \mathbb{Z}\})$ berechnen?
- (3) Wie findet man Primzahlen?
 - (a) Wie erhält man weitere Primzahlen, wenn man $p_1, \dots, p_r$ bereits kennt?
 - (b) Was ist eine Mersennesche Zahl, was eine Mersennesche Primzahl? Beispiele?
 - (c) Wann nennt man ein k -Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ zulässig? Welche Rolle spielt dies, wenn man nach Primzahl- k -Tupeln der Gestalt $(n + a_1, \dots, n + a_k)$ sucht? (Gibt es unendlich viele Primzahl-Drillings der Form $p, p + 2, p + 4$?)
 - (d) Was besagt die Primzahl- k -Tupel-Vermutung? (Anwendung auf Primzahlzwillinge und Primzahl-Drillings)
 - (e) Was besagt Schinzels Hypothese H? Nenne eine Anwendung.
- (4) Der Primzahlsatz
 - (a) Wie ist $\pi(x)$ definiert? Was ist $\pi(11.7)$?
 - (b) Was besagt der Primzahlsatz?
 - (c) Wie ist $\text{li}(x)$ definiert? Wie lässt sich damit der Primzahlsatz formulieren?
 - (d) Welche Aussage für die n -te Primzahl p_n ist äquivalent zum Primzahlsatz?
 - (e) Wie sind $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ definiert? Was ist $\vartheta(11.7)$, was $\psi(11.7)$?
 - (f) Einfache, vergleichende Ungleichungen zwischen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$?
 - (g) Welche Aussagen über $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ sind äquivalent zum Primzahlsatz?
 - (h) Nenne einfache Abschätzungen für $\pi(x)$, $\vartheta(x)$, $\psi(x)$, die man elementar herleiten kann (Tchebychev/Chebyshev).
 - (i) Was ist das Bertrandsche Postulat?
 - (j) Was besagt der Dirichletsche Primzahlsatz?
- (5) Summenfunktionen
 - (a) Wie lautet die Formel für die partielle Summation? Beispiel.
 - (b) Wie wächst $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$? Was ist die Eulersche Konstante γ ?
 - (c) Was ist die Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$?
 - (d) Wie wächst $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$?
 - (e) Wie wächst $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$?
- (6) Die Möbiusfunktion $\mu(n)$
 - (a) Definition von $\mu(n)$.
 - (b) Was ist $\sum_{d|n} \mu(d)$?
 - (c) Wie erhält man $a(n)$ aus $b(n) = \sum_{d|n} a(d)$? (Möbiussche Umkehrformeln)

- (d) Zeige an einem Beispiel, wie die Möbiusschen Umkehrformeln funktionieren.
- (7) Dirichlet-Reihen
- (a) Absolutbetrag, Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{n^s}$ (für $s = \sigma + it$).
 - (b) Was ist eine Dirichlet-Reihe?
 - (c) Konvergenzverhalten einer Dirichlet-Reihe? Was ist die Konvergenzabszisse, was die absolute Konvergenzabszisse? (Erläuterung an den Beispielen $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ und $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.)
 - (d) Was kann man über die Konvergenz von $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ sagen, wenn $a_n = O(n^\alpha)$ gilt, oder wenn für $s = s_0$ die Partialsummen beschränkt sind?
 - (e) Gibt es eine Formel für die Konvergenzabszisse einer Dirichlet-Reihe?
 - (f) Was ist $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$?
 - (g) Kann eine Dirichlet-Reihe unendlich viele Nullstellen besitzen? Was kann man über die Lage der Nullstellen sagen?
 - (h) Bestimme die Nullstellen der Dirichlet-Reihe $1 + \frac{1}{3^s}$.
 - (i) Wie differenziert man Dirichlet-Reihen?
 - (j) Wie multipliziert man Dirichlet-Reihen?
 - (k) Durch welche Dirichlet-Reihe wird die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ definiert?
 - (l) Wie lässt sich die Riemannsche Zeta-Funktion meromorph auf $\operatorname{Re}(s) > 0$ fortsetzen?
 - (m) Welche Dirichlet-Reihen werden durch $\frac{1}{\zeta(s)}$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ beschrieben?
 - (n) Was kann man über $F(s) = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}} dx$ sagen, wenn $f(x) = O(x^\alpha)$ gilt?
 - (o) Wie kann man eine Dirichlet-Reihe $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ als Integral $s \int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}} dx$ darstellen?
 - (p) Wie sehen die Integraldarstellungen der Funktionen $\zeta(s)$, $\frac{1}{\zeta(s)}$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ aus?
 - (q) Wie kann man mit Hilfe der Integraldarstellung von $\zeta(s)$ die Zeta-Funktion $\zeta(s)$ meromorph auf $\operatorname{Re}(s) > 0$ fortsetzen?
 - (r) Was weiß man über Nullstellen und Polstellen von $\zeta(s)$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$?
 - (s) Was besagt der Korevaar-Newman-Taubersatz?
 - (t) Wie kann die Formel $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s \int_1^\infty \left(\frac{\psi(x)}{x} - 1\right) \frac{dx}{x^s}$ zum Beweis des Primzahlsatzes verwendet werden?
 - (u) Wie kann man aus der Mertens-Vermutung (oder verwandten Vermutungen) Aussagen über die Nullstellen von $\zeta(s)$ erhalten?