Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 11 (25.6.2021)

Aufgabe 51: Sei C der projektive Abschluss der Kurve $x^2 + y^2 = 1$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $\neq 2$. Bestimme den Divisor der Differentialform dx.

Aufgabe 52: Sei C die projektive ebene Kurve, die affin durch $y^3 = x^4 - 1$ gegeben wird (über einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik 0), und ϕ der durch $\phi = (1 : x)$ definierte Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$.

(1) Zeige, dass C nichtsingulär ist.
(2) Bestimme für jeden Kurvenpunkt eine Uniformisierende.
(3) Bestimme $\mathrm{grad}(\phi)$.
(4) Bestimme alle Verzweigungsindizes $e_\phi(P)$.
(5) Bestimme den Verzweigungsdivisor von ϕ.
(6) Bestimme das Geschlecht von C mit Hilfe der Riemann-Hurwitz-Formel.

Aufgabe 53: Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 0. Eine Funktion $f \in K(x) \setminus K$ definiert dann einen nichtkonstanten Morphismus $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, der hier ebenfalls mit f bezeichnet sei.

(1) Zeige folgendes Kriterium für Verzweigtheit: Ist $\alpha \in K$ mit $f(\alpha) \in K$, so gilt

$$f \text{ verzweigt in } \alpha, \text{ d.h. } e_f(\alpha) \geq 2 \quad \Longleftrightarrow \quad f'(\alpha) = 0.$$

(Das Kriterium sagt nichts aus über das Verzweigungsverhalten in den Punkten der Menge $\{\infty\} \cup f^{-1}(\infty)$.)

(2) Bestimme für die nachfolgenden Funktionen $f \in K(x)$ alle Verzweigungsindizes $e_f(P)$ (für $P \in \mathbb{P}^1$) und zeige, dass alle Verzweigungspunkte in der Menge $f^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ enthalten sind.

(a)
$$f = (2x^2 - 1)^2$$

(b)
$$f = \frac{(x+2)^9 x^{18} (x^2 - 2)^{18} (x - 2)}{(x+1)^{16} (x^3 - 3x + 1)^{16}}$$

(Ist C eine irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve, so heißt ein Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ eine **Belyi-Abbildung**, wenn alle Verzweigungspunkte in $\phi^{-1}(\{0, 1, \infty\})$ enthalten sind. Obige Abbildungen $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ sind also Beispiele von Belyi-Abbildungen.)

Aufgabe 54: Sei C das nichtsinguläre Modell der durch $y^2 = x^p$ definierten Kurve in Charakteristik $p > 2$.

(1) Es ist $dy = 0$. Bestimme ein $z \in K(C)$ mit $y = z^p$.
(2) C ist birational äquivalent zu $\mathbb{P}^1$.

Aufgabe 55: Sei C eine Kurve vom Geschlecht 2. Dann gibt es einen kanonischen Divisor $K_C = [P_1]+[P_2]$ und eine Funktion $f \in K(C)$ mit $\mathcal{L}(K_C) = \overline{K} + \overline{K}f$.

(1) Bestimme $\operatorname{ord}_{P_i}(f)$.
(2) Zeige, dass $\ell(2K_C) = 3$ gilt.
(3) Bestimme eine $\overline{K}$-Basis f_0, f_1, f_2 von $\mathcal{L}(2K_C)$.
(4) Beschreibe das Bild des durch $\phi = (f_0 : f_1 : f_2)$ definierten Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^2$.