Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 5 (17.5.2024)

Aufgabe 21: Zeige, dass es keine natürliche Zahl n gibt, sodass die Fakultät $n!$ in der Dezimaldarstellung genau 777 Nullen am Schluss hat.

Aufgabe 22: Gegeben sei eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Bekanntlich lässt sich dann n schreiben als

$$n = \sum_{i=0}^{r} a_i p^i \text{ mit } a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

$(a_r, a_{r-1}, \dots, a_1, a_0)_p$ nennt man auch die p-adische Darstellung von n. Die Zahl

$$s_p(n) = \sum_{i=0}^{r} a_i$$

heißt p-adische Quersumme von n. Zeige:

(1) Es ist

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \begin{cases} \sum_{i=k}^{r} a_i p^{i-k} & \text{für } 0 \le k \le r, \\ 0 & \text{für } k > r. \end{cases}$$

(2) Es gilt

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{r} a_i \frac{p^i - 1}{p - 1}.$$

(Hinweis: In der Vorlesung wurde die Formel $v_p(n!) = \sum_{k \ge 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ bewiesen.)

(3) Es gilt

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.$$

(4) Es gilt

$$\frac{n}{p-1} - \frac{\log n}{\log p} - 1 \le v_p(n!) \le \frac{n}{p-1} - \frac{1}{p-1}.$$

Aufgabe 23 Zeige: Sind $n_1, \dots, n_r$ natürliche Zahlen, so auch

$$\frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_r)!}{n_1!\, n_2! \, \dots \, n_r!}.$$

Datei: anazt_u5.tex. Version vom 16.5.2024

Aufgabe 24: In dieser Aufgabe soll die Abschätzung

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{4n}} \overset{(n\geq 2)}{<} \binom{2n}{n} \overset{(n\geq 1)}{<} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$$

zunächst elementar bewiesen werden.

(1) Zeige, dass für $n \geq 1$

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(2i)^2}\right) = \frac{2n+1}{2^{4n}} \cdot \binom{2n}{n}^2$$

gilt, und folgere die rechte Ungleichung.

(2) Zeige, dass für $n \geq 2$

$$\prod_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{(2i+1)^2}\right) = \frac{2^{4n}}{4n} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}^2}$$

gilt, und folgere die linke Ungleichung.

(3) Eine Gestalt der Stirling-Formel lautet

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\delta(n)}{12n}} \qquad \text{mit} \qquad 0 < \delta(n) < 1.$$

Folgere daraus die Abschätzung

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{-\frac{1}{6n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{\frac{1}{24n}}.$$

Aufgabe 25:

(1) Zeige unter Verwendung der in der Vorlesung gezeigten Abschätzungen

$$0.6\,\frac{x}{\log x} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5\,\frac{x}{\log x},$$

dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $x \geq x_0$ das Intervall $(x, 3x]$ eine Primzahl enthält. Bestimme einen expliziten Wert für x_0.

(2) Welche Abschätzung des Typs

$$\alpha\,\frac{x}{\log x} \overset{x\geq x_0}{\leq} \pi(x) \overset{x\geq x_0}{\leq} \beta\,\frac{x}{\log x}$$

(mit $\alpha < 1$ und $\beta > 1$) bräuchte man, um damit das Bertrandsche Postulat herzuleiten?