Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades

a) Die *normierte* Form der **Gleichung zweiten Grades** ist

$$\boldsymbol{x^2 + px + q = 0}$$

Durch *quadratische Ergänzung* (Hinzufügen von $p^2/4$) wird ihre Lösung auf das Ziehen einer *reinen Quadratwurzel* zurückgeführt:

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} + q = \frac{p^2}{4} \;\Leftrightarrow\; \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Um dies für beliebige *komplexe* Zahlen, also beliebige $p, q \in \mathbb{C}$ zu nutzen, ist die Gleichung $z^2 = (x + \mathrm{i}\,y)^2 = a + b\,\mathrm{i}$ und damit das reelle Gleichungs*system*

$$x^2 - y^2 = a,\; 2xy = b$$

zu lösen. Quadrieren und Addieren beider Gleichungen und anschließendes Wurzelziehen ergibt $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, und mit der ersten Gleichung folgt

$$2x^2 = a + \sqrt{a^2 + b^2},\; 2y^2 = -a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die Quadratwurzeln (Auflösen nach x, y) sind so zu kombinieren, dass xy das Vorzeichen von b hat. Mit $\operatorname{sgn}(r) := 1 \; (r \geq 0)$ und $\operatorname{sgn}(r) := -1 \; (r < 0)$ gilt

$$z^2 = a + b\,\mathrm{i} \;\Leftrightarrow\; z = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + \mathrm{i}\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}\right)$$

Denn im Fall $b = 0,\; a < 0$ fällt der erste Wurzelausdruck weg, und das Quadrat des zweiten muss die Bedingung $z^2 = a$ erfüllen, was nur klappt für $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Es gilt also $\operatorname{sgn}(b) = 1 \;\Leftrightarrow\; b = |b|$. Um *Rundungsfehler beim numerischen Programmieren der Formel* zu vermeiden, nutzt man die Identitäten

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(\pm a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} = |b| \Big/ \sqrt{2\left(\mp a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)}.$$

Damit ist die Lösung beliebiger quadratischer Gleichungen im Bereich der komplexen Zahlen auf das *Ziehen reeller Quadratwurzeln* zurückgeführt.

Ein paar Anmerkungen zum Zusammenhang zwischen den Wurzeln $x_1,\; x_2$ und den Koeffizienten $p,\; q$ der Gleichung:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) \;\; (\textit{Faktorisierung})$$

ist gleichbedeutend mit

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q \;\; (\textit{Vietasche Wurzelrelationen})$$

und mit den *Lösungsformeln* $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Denn: 1) Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich zeigt die Äquivalenz von *Faktorisierung* und *Wurzelrelationen*. 2) *Nullteilerfreiheit* besagt, dass die Werte $x_1,\; x_2$ der *Faktorisierung* die eindeutig bestimmten Nullstellen des Polynoms sind, also den *Lösungsformeln* entsprechen. 3) Die Vietaschen *Wurzelrelationen* folgen unmittelbar aus den *Lösungsformeln*.

Wir leiten noch *unmittelbar algebraisch* die Lösungsformeln aus den Wurzelrelationen her:

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q \;\Rightarrow\; x_1 - x_2 = \pm\sqrt{p^2 - 4q}$$

Diese Formulierung ist nicht nur im reellen Fall $p, q \in \mathbb{R},\; p^2 \geq 4q$ sinnvoll, wenn man unter $\pm\sqrt{z}$ eine der beiden im allgemeinen *komplexen* Quadratwurzeln von z versteht; da die Numerierung der Wurzeln $x_1,\; x_2$ willkürlich ist, kann das Vorzeichen nicht eindeutig festgelegt werden.

D.h.: Die Differenz $x_1 - x_2$ ist eine der beiden Wurzeln von $p^2 - 4q$.

Da auch die Summe $x_1 + x_2 = -p$ bekannt ist und aus Symmetriegründen die Numerierung (Reihenfolge) der Wurzeln keine Rolle spielt, ergeben sich die Lösungsformeln.

b) Die normierte **Gleichung dritten Grades** lautet

$$\boldsymbol{x^3 + ax^2 + bx + c = 0}$$

Indem wir $x = y - \frac{a}{3}$ setzen, können wir den quadratischen Term verschwinden lassen und erhalten die vereinfachte Gleichung (statt y wieder x)

$$\boldsymbol{x^3 + px + q = 0}$$

Im Gegensatz zu quadratischen Gleichungen, die man schon vor mehr als 3000 Jahren zu lösen wusste – abgesehen von der Ausdehnung ins Komplexe –, wurden kubische Gleichungen erst zu Beginn der Neuzeit im 16. Jahrhundert „geknackt" (Scipio del Ferro, Nicolo Tartaglia, die Entdecker der Lösung, und Geronimo Cardano, der sie bekannt machte). Und im Zusammenhang mit der Lösung kubischer Gleichungen und des aufkommenden versierteren Formel-Gebrauchs entstand auch das *Rechnen mit komplexen Zahlen* (Rafael Bombelli, Cardano und andere).

Nun zur Gleichung. Ein *Kunstgriff:* Wir setzen $x = u + v$. Damit ergibt sich

$$x^3 + px + q = u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + q + (u + v)(3uv + p) = 0,$$

und diese Gleichung *ist* erfüllt, *wenn*

$$u^3 + v^3 = -q, \quad uv = -\frac{p}{3}$$

Damit sind u^3 und v^3 zwei Zahlen, deren *Summe und Produkt* wir kennen, also (Vieta-Relationen!) die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$$

und damit die Größen $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$. Es folgt die berühmte *Cardanosche Formel*

$$\boldsymbol{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}$$

zur Lösung der reduzierten Gleichung $x^3 + px + q = 0$.

Rechnet man *rein reell* – was anfänglich natürlich nicht anders sein konnte, da komplexe Zahlen noch niemand kannte –, macht der Fall $\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27} < 0$, der sogenannte *casus irreducibilis,* Schwierigkeiten.

Wir setzen aber an dieser Stelle die komplexen Zahlen als *bekannt* voraus, um die Lösung der Gleichung allgemein zu diskutieren. Erst später skizzieren wir, wie die Cardanosche Formel die Entstehung der komplexen Zahlen inspirierte. (Es zeigte sich, dass man mit „eingebildeten“ Quadratwurzeln aus negativen Zahlen einfach stur algebraisch rechnen und damit zu sinnvollen Ergebnissen gelangen konnte.)

So wie im Fall der quadratischen Gleichung letzten Endes Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen die Lösung ergeben, müssen wir jetzt *kubische* Wurzeln aus im allgemeinen komplexen Zahlen ziehen. Man kann aber die komplexen kubischen Wurzeln *nicht* – anders als im quadratischen Fall – auf *rein reelle* Kubikwurzeln reduzieren. Der strenge Nachweis dieser Unmöglichkeit ist etwas aufwendig.
(Siehe z.B. https://www.math.uni-frankfurt.de/~fuehrer/Schriften/1996_Cardano.pdf)

Kurz sei erinnert, dass n-te Wurzeln aus komplexen Zahlen am einfachsten mittels der *Polarform* $\boldsymbol{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}$ berechnet werden. Sei

$$z = a + b\,\mathrm{i} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad r = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \varphi = \operatorname{sgn}(b)\,\arccos\frac{a}{r}\ \ (r>0),$$
$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi\,.$$

Polarform der n-ten Wurzeln von z:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{n}+k\,\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\,\cos\Big(\frac{\varphi}{n}+k\,\frac{2\pi}{n}\Big) + \mathrm{i}\,\sqrt[n]{r}\,\sin\Big(\frac{\varphi}{n}+k\,\frac{2\pi}{n}\Big) \quad (0 \le k \le n-1).$$

Im Falle $z \neq 0$ sind das jeweils *genau n verschiedene* n-te Wurzeln.

Dabei werden also durch Grenzprozesse (unendliche Reihen) definierte *transzendente Funktionen* benutzt: der *Arcuskosinus* und die Exponentialfunktion.

Mit der Wurzel $w_0 = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\varphi}{n}}$ und der primitiven n-ten *Einheits*wurzel $\varepsilon_n = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}$ lassen sich die n-ten Wurzeln schreiben als $w_k = \varepsilon_n^k\,w_0\ (0 \le k \le n-1)$.

Die *dritten* Einheitswurzeln, die wir im Zusammenhang mit der Cardanoschen Formel brauchen, sind auch *ohne* transzendente Funktionen ausdrückbar:

$$\boldsymbol{\varepsilon_3 = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}, \quad \varepsilon_3^2 = \mathrm{e}^{4\pi\mathrm{i}/3} = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}/3} = \overline{\varepsilon_3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

Wir bestimmen nun genauer die Lösungs*gesamtheit* der kubischen Gleichung.

Die beiden Größen u^3 und v^3 sind die Lösungen $-\dfrac{q}{2} \pm \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}$ einer quadratischen Gleichung. Da $x = u + v$, ist es einerlei, welche der Wurzeln u^3 und welche v^3 zugeordnet wird.

Aus $u^3v^3 = -p^3/27$ folgt aber nicht notwendigerweise $uv = -p/3$, sondern nur $uv = -p/3 \cdot \varepsilon_3^k$ mit $k \in \{0,1,2\}$. Wir müssen also die dritten Wurzeln aus u^3 und v^3 passend wählen; solche nennen wir u_0 und v_0. Dann sind aber offensichtlich auch $u_1 = u_0\varepsilon_3,\ v_1 = v_0\varepsilon_3^2$ sowie $u_2 = u_0\varepsilon_3^2,\ v_2 = v_0\varepsilon_3$ passende Wurzelpaare. Und

$$\boldsymbol{z_1 = u_0 + v_0, \quad z_2 = u_1 + v_1, \quad z_3 = u_2 + v_2}$$

ist die *Lösungsgesamtheit* der reduzierten kubischen Gleichung $z^3 + pz + q = 0$.

Beweis durch Ausmultiplizieren:

Wegen $z^3 - 1 = (z-1)(z-\varepsilon_3)(z-\varepsilon_3^2)$ und damit $1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 = 0$ sowie $\varepsilon_3^3 = 1$ folgt

$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3) = z^3 - z^2(z_1+z_2+z_3) + z(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) - z_1z_2z_3 = z^3 + pz + q$,
da

$$z_1 + z_2 + z_3 = u_0(1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2) + v_0(1 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3) = 0,$$
$$z_1z_2z_3 = u_0^3\varepsilon_3^3 + u_0^2v_0(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^3 + \varepsilon_3^4) + u_0v_0^2(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^3 + \varepsilon_3^4) + v_0^3\varepsilon_3^3 = u_0^3 + v_0^3 = -q,$$
$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = u_0^2(\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^3) + v_0^2(\varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_3^3) + u_0v_0(3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_3^2) = -3u_0v_0 = p.$$

Damit ist die allgemeine Lösung kubischer Gleichungen $z^3 + pz + q = 0$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten p, q behandelt.

Nun folgt die Diskussion der Sachverhalte, die zur *Entstehung des Begriffs der komplexen Zahl* führten.

Auch die Auflösungsvorschrift für *quadratische* Gleichungen führt bei negativer *Diskriminante* $p^2 - 4q$ zu Wurzeln aus negativen Zahlen. Da aber reelle quadratische Ausdrücke offensichtlich nullstellenfrei sein können (wie z.B. $x^2 + 1$ oder $x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$), war das *kein* Grund, nach Wurzeln negativer Zahlen zu suchen.

Bei *kubischen* Gleichungen sieht es ganz anders aus: $f(x) = x^3 + px + q$ hat *immer* mindestens eine reelle Nullstelle, da $f(x) = x^3\Big(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}\Big)$ für große $|x|$ dasselbe Vorzeichen wie x besitzt, also irgendwo die x-Achse queren muss. (Auch wenn der *Zwischenwertsatz* für stetige Funktionen erst viel später präzise und allgemein formuliert wurde, war dies zumindest anschaulich schon lange klar.)

Wann genau besitzt $f(x)$ *drei verschiedene* reelle Nullstellen?

Dazu betrachten wir $f'(x) = 3x^2 + p$. Falls $p \ge 0$, wächst f streng monoton. Falls $p < 0$, hat f' die beiden Nullstellen $\pm\sqrt{-p/3}$, zwei offensichtlich *einfache* Nullstellen. Die positive ist eine *Minimums*-Stelle, die negative eine *Maximums*-Stelle von f (Vorzeichenverlauf bei f').

Drei Nullstellen hat f *genau dann, wenn* $f\big(-\sqrt{-p/3}\big) > 0$ und $f\big(\sqrt{-p/3}\big) < 0$. Beide Bedingungen zusammen ergeben $\pm q/2 < \big(\sqrt{-p/3}\big)^3$, sind also äquivalent mit $q^2/4 + p^3/27 < 0$, dem *casus irreducibilis*. D.h.:

Genau dann, wenn die Cardanosche Lösungsformel versagt (reell betrachtet), hat die reelle Gleichung $x^3 + px + q = 0$ drei verschiedene *reelle* Nullstellen!

Auf diese Formel, die einen substanziellen Fortschritt gegenüber dem schon in der Antike Bekannten darstellte, war man *sehr* stolz. Dem Werk, in dem er die Lösung kubischer – und auch biquadratischer – Gleichungen umfassend darstellte, was wegen des noch nicht etablierten Gebrauchs negativer Zahlen einige Fallunterscheidungen erforderte, gab Geronimo Cardano den stolzen Titel *Ars Magna* („Große Kunst“; Nürnberg 1545).

Um die Lösungsformel auch für den casus irreducibilis zu „retten“, versuchte man, die gewöhnlichen reellen Zahlen mit bloß eingebildeten (*imaginären*, Euler: „ohnmöglichen“) neuen Zahlen zu kombinieren.

Man brachte eine neue Einheit $\mathbf{i}$ ins Spiel (von Euler später eingeführtes Symbol, noch bei Cauchy findet man stattdessen $\sqrt{-1}$) mit der speziellen Eigenschaft $\mathbf{i\,i} = \mathbf{i^2} = \mathbf{-1}$. Dann ist $\sqrt{r}\,\mathrm{i}$ Quadratwurzel aus $-r$ für beliebige $r > 0$, und ansonsten wird mit Ausdrücken $a + b\mathrm{i},\ x + \mathrm{i}y,\ a + 0\mathrm{i} = a$ usw. *nach den üblichen Rechenregeln* verfahren, so dass

$$(a + b\mathrm{i}) + (x + \mathrm{i}y) = (a + x) + \mathrm{i}(b + y) \quad (a, b, x, y \in \mathbb{R})$$

und

$$(a + b\mathrm{i})(x + \mathrm{i}y) = ax + b\mathrm{i}x + a\mathrm{i}y + b\mathrm{i}\mathrm{i}y = (ax - by) + \mathrm{i}(bx + ay) \quad (a, b, x, y \in \mathbb{R})$$

Insbesondere ergibt sich mit diesen Regeln

$$(2 \pm \mathrm{i})^2 = 3 \pm 4\mathrm{i}, \quad (2 \pm \mathrm{i})^3 = (3 \pm 4\mathrm{i})(2 \pm \mathrm{i}) = 2 \pm 11\mathrm{i},$$

so dass also $2 + \mathrm{i}$ dritte Wurzel aus $2 + 11\mathrm{i}$ und $2 - \mathrm{i}$ dritte Wurzel aus $2 - 11\mathrm{i}$ ist. Nun betrachten wir die kubische Gleichung $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Gemäß Cardano-Formel hat sie die Wurzel

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} + \sqrt[3]{2 - 11\mathrm{i}},$$

also $x = (2 + \mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i}) = 4$ mit den soeben ermittelten komplexen Kubikwurzeln. Man prüft leicht nach, dass $x = 4$ *tatsächlich* die kubische Gleichung erfüllt. Auf dem Umweg durch „ohnmögliches" Gebiet gelangt man zu einem unbezweifelbar richtigen *reellen* Resultat.

Solche und viele analoge Erfahrungen beim Herum-Experimentieren mit imaginären Quadratwurzeln festigten bei etlichen großen Rechenkünstlern die Überzeugung, dass sie ein nützliches und unverzichtbares Rechenhilfsmittel seien.

Während Newton noch die imaginären Zahlen mied und ihnen skeptisch gegenüberstand, ging Euler virtuos damit um und entdeckte unzählige Zusammenhänge und Identitäten – *ohne* einen logisch einwandfreien Begriff der komplexen Zahlen je zu formulieren. Selbst der große französische Mathematiker und Physiker Pierre Simon de Laplace blieb noch ziemlich zurückhaltend gegenüber den imaginären Größen. Aber schon zu seinen Lebzeiten wurde der *Fundamentalsatz der Algebra* bewiesen:

Ein Polynom $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$ ist stets in Linearfaktoren zerlegbar; d.h.: $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$ mit geeigneten $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Ca. ab 1800 entstand die anschauliche Idee von i als *Einheit einer zweiten Zahldimension* und damit die Vorstellung von der *komplexen Zahlenebene* (die Bezeichnung „komplexe Zahl" schlug 1831 Gauß vor); und bald darauf formulierte der große irische Mathematiker und Physiker William Rowan Hamilton den abstrakt-algebraischen Standpunkt vom *Rechnen mit reellen Zahlenpaaren*.

Und, beginnend in dieser Zeit, entstand im 19. Jahrhundert – bahnbrechend durch Cauchy, Riemann, Weierstraß, dann durch viele andere – eine allgemeine *Theorie der komplexen Funktionen und Integrale*, eine wesentliche Erweiterung der Mathematik, die auch das Verständnis reeller Funktionen *enorm* vertiefte und zu einem der schönsten, faszinierendsten Gebiete der Mathematik wurde. (Schon Gauß hatte weitreichende Überlegungen zu komplexen Funktionen und Integralen angestellt, ohne aber irgendetwas davon zu veröffentlichen.)

Der Vollständigkeit halber schildern wir noch die rein reelle *trigonometrische* Lösung, die François Viète für den *casus irreducibilis* mit $p, q \in \mathbb{R}$ fand.

Ausgangspunkt ist die trigonometrische Identität

$$\mathbf{\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi}$$

Durch Umskalierung $x = cy$ kann man $x^3 + px$ umwandeln in $a(4y^3 - 3y)$, nämlich mit $c = 2\sqrt{-p/3}$ und damit $a = 2\sqrt{-p^3/27}$. Da $|q|/a < 1$ (casus irreducibilis), kann man $-q/a =: \cos(3\varphi)$ setzen und hat die Wurzel $y = \cos\varphi$. M.a.W.:

$$\boldsymbol{x_1 = r\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{r := 2\sqrt{\tfrac{-p}{3}}}, \quad \boldsymbol{\varphi := \tfrac{1}{3}\arccos\tfrac{-4q}{r^3}}$$

ist eine Lösung von $x^3 + px + q = 0$ im Falle $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \Leftrightarrow \frac{|q|}{a} < 1$. Die anderen beiden (ebenfalls reellen) Wurzeln sind dann $\boldsymbol{x_{2,3} = \tfrac{-r}{2}\left(\cos\varphi \pm \sqrt{3}\,\sin\varphi\right)}$.

Man bestätigt dies einfach durch *Ausmultiplizieren* (etwas längere Rechnung):

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 + px + q$$

Man hat somit *rein reelle Methoden* zur Wurzelbestimmung bei *reellen* Gleichungen $x^3 + px + q = 0$: die trigonometrische Methode (nur!) im *casus irreducibilis*, und die Cardanosche Formel (nur!) im anderen Fall. Im Cardano-Fall bleibt allerdings neben der reellen Wurzel im allgemeinen noch ein quadratischer Faktor ohne reelle Nullstelle übrig. Im Grenzfall $q^2/4 = -p^3/27 > 0$ gibt es eine reelle Doppelwurzel $\sqrt{-p/3}$ $(q > 0)$ bzw. $-\sqrt{-p/3}$ $(q < 0)$.

Die Cardano-Formel ergibt eine *allgemeine*, *immer richtige und vollständige Wurzel-Bestimmung*; allerdings *nur*, wenn man die anfänglich als bloß „eingebildet" angesehenen Zahlen ins Spiel bringt. Insofern ist die ungeheuer fruchtbare Erweiterung des Zahlsystems wirklich ursprünglich veranlasst durch die Cardano-Formel.

Die praktische Anwendung der Formel selbst ist allerdings oft mit Haken und Ösen versehen:

Etwa die kubische Gleichung $x^3 + 114x + 1424 = 0$ hat nach Cardano die Nullstelle $x = \sqrt[3]{-712 + 306\sqrt{6}} - \sqrt[3]{712 + 306\sqrt{6}}$. Dass $x = -8$, sieht dem Cardano-Resultat nur an, wer irgendwoher $\left(\pm 4 + 3\sqrt{6}\right)^3 = \pm 712 + 306\sqrt{6}$ weiß.

c) Die *normierte* **biquadratische Gleichung** (führender Koeffizient 1) ist

$$\boldsymbol{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$$

Durch die Substitution $x = y - a/4$ kann man den Koeffizienten a wegheben und erhält die *reduzierte normierte Gleichung* (y wieder durch x ersetzt)

$$\boldsymbol{x^4 + px^2 + qx + r = 0}$$

Wir versuchen, das Polynom in ein *Produkt aus zwei quadratischen Faktoren* zu zerlegen; also

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c)$$

Dabei wurde von vornherein berücksichtigt, dass die Vorfaktoren bei x entgegengesetzt gleich sein müssen, weil kein x^3-Term vorkommt. Koeffizientenvergleich ergibt:

$$a^2 - b - c = -p, \quad a(b - c) = -q, \quad bc = r$$

Falls $q=0$, liegt ein Polynom zweiten Grades in x^2 und somit ein *Trivialfall* vor (die „dritte binomische Formel“ und $x^4+px^2+r=(x^2+\frac{p}{2})^2-(\frac{p^2}{4}-r)=(x^2+\sqrt{r})^2-(2\sqrt{r}-p)x^2$ liefern stets eine – für $p,r\in\mathbb{R}$ *reelle* – Zerlegung in zwei quadratische Faktoren); daher können *wir* $\boldsymbol{q\neq 0}$ voraussetzen und damit auch $a\neq 0$.

Es folgt $(a^2+p)^2-\dfrac{q^2}{a^2}=4bc$, also mit $\boldsymbol{\rho := a^2}$

$$\boldsymbol{\rho^3+2p\rho^2+(p^2-4r)\rho-q^2=0},$$

die sogenannte *kubische Resolvente.* Eine kubische Gleichung zur Bestimmung von a^2, die im Falle *reeller* Koeffizienten sogar immer eine *positive*, ansonsten stets eine *von* 0 *verschiedene* Lösung besitzt. Mit einer Quadratwurzel dieser Lösung ρ als a, im Falle $p,q,r\in\mathbb{R}$ *positiv* gewählt, erhalten wir

$$\boldsymbol{b=\tfrac{1}{2}\left(a^2+p-\tfrac{q}{a}\right),\quad c=\tfrac{1}{2}\left(a^2+p+\tfrac{q}{a}\right)}$$

So ergibt sich eine Faktorisierung $x^4+px^2+qx+r=(x^2+ax+b)(x^2-ax+c)$, die insgesamt *reell* ist, wenn $p,q,r\in\mathbb{R}$. *Lösungsgesamtheit* der reduzierten biquadratischen Gleichung im Falle $q\neq 0$ ist somit

$$\boldsymbol{x_{1,2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{q}{2a}-\frac{p}{2}-\frac{a^2}{4}}},$$

$$\boldsymbol{x_{3,4}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-c}=\frac{a}{2}\pm\sqrt{-\frac{q}{2a}-\frac{p}{2}-\frac{a^2}{4}}}$$

Zur Lösung der Gleichung werden also nur Kubik- und Quadratwurzeln benötigt.

d) Das **Newton-Verfahren**. Dies ist ein praktisch brauchbares Verfahren zur *numerischen* Bestimmung von Nullstellen eines Polynoms. Braucht man *konkrete Zahlenwerte*, müssen ja Wurzel-Ausdrücke auch *numerisch* ausgewertet werden.

Ausgehend von einer *Anfangs-Näherung* x_0 einer Nullstelle x^* des Polynoms $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, bestimmen wir eine neue, *bessere* Näherung x_1 anhand der Taylor-Formel mit Restglied zweiter Ordnung

$$0=p(x^*)=p(x_0)+p'(x_0)(x^*-x_0)+\tfrac{1}{2}p''(\xi)(x^*-x_0)^2$$

mit einem ξ zwischen x_0 und x^*. Es ergibt sich:

$$x^*=x_0+(x^*-x_0)=x_0-\tfrac{p(x_0)}{p'(x_0)}-\tfrac{p''(\xi)}{2p'(x_0)}\left(x^*-x_0\right)^2$$

Daher ist

$$\boldsymbol{x_1=x_0-\frac{p(x_0)}{p'(x_0)}}$$

eine *erheblich bessere* Approximation der Nullstelle als x_0, *wenn* die Ableitung $p'(x)$ nahe x^* *nicht verschwindet*, die zu bestimmende Nullstelle *einfach* ist.

Man *iteriert* diesen Verbesserungsschritt, berechnet, ausgehend von x_1, die noch viel bessere Näherung x_2 ; usw. Wenn man wirklich in der Nähe von x^* startet, braucht man nur *wenige* Schritte, da sich die Zahl der gültigen Nachkommastellen mit jedem Iterationsschritt in etwa *verdoppelt*.

e) Zur Übersichtlichkeit trug bei, dass man die Gleichungen in *normierter* Form betrachtete und sogar den zweithöchsten Term beseitigte. (Im Fall der Gleichung zweiten Grades entspricht letzteres der quadratischen Ergänzung.)

Im Schulunterricht ist eine Lösungsformel für $ax^2+bx+c=0$ verbreitet, die oft „Mitternachtsformel“ genannt wird. Setzt man $p=b/a,\ q=c/a$, ergibt sich

$$-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\boldsymbol{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

also die **„Mitternachtsformel“**. Meines Erachtens ist aber die **„p-q-Formel“** eindeutig *vorzuziehen;* denn nach langjähriger Erfahrung ist mein Eindruck, dass den Lernenden durchschnittlich *häufiger Fehler* beim Anwenden der Formel unterlaufen, wenn sie *drei* statt nur zwei Parameter durch konkrete Werte ersetzen müssen.

f) Es liegt nahe, auch für **Gleichungen *höheren* Grades** analoge Auflösungsformeln zu suchen. Um solche bemühte man sich auch jahrhundertelang. Bis 1824 der große norwegische Mathematiker Niels Henrik Abel im Alter von nur 22 Jahren endgültig bewies, dass dies im allgemeinen *unmöglich* ist, schon für Gleichungen fünften Grades. Ein paar Jahre später und unabhängig von Abel zeigte dies auch der sogar nur 20-jährige Évariste Galois. Aus den Galoisschen Ideen entstand ganz allmählich die allgemeine Theorie der *Gruppen* und *Körper* und damit eine *wesentliche* Erweiterung der algebraischen Begriffswelt.

Die *Galoissche Theorie* ist zu kompliziert, um hier dargestellt zu werden. Nur ein paar andeutende Bemerkungen. Der Zusammenhang zwischen Koeffizienten $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ und Wurzeln $x_1,x_2,\ldots,x_n$ eines Polynoms $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ ist in *einer* der beiden Richtungen ganz einfach auszudrücken (rechte Seite ausmultiplizieren!):

$$\begin{aligned}(-1)^n a_0 &= x_1\cdot x_2\cdots x_n\\ (-1)^{n-1}a_1 &= x_1\cdots x_{n-1}+x_1\cdots x_{n-2}\cdot x_n+\cdots+x_2\cdots x_n\\ &\ \ \vdots\\ -a_{n-1} &= x_1+x_2+\cdots+x_n\end{aligned}$$

Die *allgemeinen Vietaschen Wurzelrelationen*; auf den rechten Seiten der Gleichungen stehen die sogenannten *elementarsymmetrischen Funktionen* der Wurzeln. In Worten: a_k ist, bis auf's Vorzeichen, die Summe aller $(n-k)$-fachen Produkte verschiedener Wurzeln. Wie aber kann man umgekehrt die Wurzeln x_k durch die Koeffizienten a_k darstellen, und zwar nur mittels elementarer Rechenoperationen sowie Wurzelausdrücken („Lösungsformeln“)?

Es wird dazu zunächst der kleinste Körper K betrachtet, der alle Koeffizienten des Polynoms umfasst; er besteht aus allen Quotienten $p(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})/q(a_0,a_1,\ldots,a_{n-1})$, wobei p und q *ganzzahlige* Polynome in den a_k sind (d.h. mit ganzzahligen *Koeffizienten*). Die Frage ist: Wann kann man die x_k durch eine *Erweiterung* dieses Körpers um gewisse Wurzelausdrücke erfassen?

Sei andererseits E der Körper aller Quotienten $P(x_1,x_2,\ldots,x_n)/Q(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ mit ganzzahligen Polynomen P und Q; der Unterkörper aller Quotienten aus *symmetrischen* ganzzahligen Polynomen P und Q ist *isomorph* zum Körper K, da alle symmetrischen Polynome durch die *elementar*symmetrischen ausdrückbar sind. Also ist E ein *Erweiterungskörper* zu K, und die Frage ist jetzt: Ist diese Erweiterung durch Hinzufügung einiger Wurzelausdrücke erzielbar?

Diese Frage wird auf eine *gruppentheoretische* reduziert: Die *Symmetriegruppe* der Erweiterung von K zu E ist die Gesamtheit der Automorphismen $\varphi: E\to E$ mit $\varphi(a)=a\ (a\in K)$. Diese Gruppe ist die *Galoisgruppe* der Körpererweiterung vom Koeffizientenkörper K zum Zerfällungskörper E des Polynoms. Und diese Gruppe ist isomorph zur *Permutationsgruppe* S_n, die nur für $n\leq 4$ „auflösbar“ ist, weshalb für $n\geq 5$ keine Lösungsformeln existieren.

Exzellentes Buch (für Mathematik-Studierende zum Selbststudium geeignet, Umfang ca. 120SWS), in dem die Galoistheorie ausführlich dargestellt wird, mit Anwendungen wie Fundamentalsatz der Algebra (*algebraischer* Beweis!), Konstruktionen mit Zirkel und Lineal, Auflösung von Polynom-Gleichungen:
Chr. Karpfinger, K. Meyberg, *Algebra – Gruppen, Ringe, Körper*, Spektrum Verlag, Heidelberg 2009.
Auch sehr gut: S. Lang, *Undergraduate Algebra, 3rd Edition*, Springer-Verlag, New York 2005.