Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 8 (14.6.2024)

Aufgabe 36: Sei $a \in \mathbb{N}$ und $f : [a, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend mit $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, was insbesondere $f(x) \geq 0$ für alle $x \geq a$ impliziert. Zeige:

(1) Für $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a$ gilt

$$f(b) + \int_a^b f(t)dt \leq \sum_{n=a}^{b} f(n) \leq f(a) + \int_a^b f(t)dt.$$

(2) Es gilt:

$$\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^\infty f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt < \infty.$$

Aufgabe 37:

(1) Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

für $0 < \alpha \leq 1$ divergiert und für $\alpha > 1$ konvergiert. (Hinweis: Bestimme eine Stammfunktion von $\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$ und wende Aufgabe 36 an.)

(2) Bestimme für $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ die Konvergenzabszisse σ_k der Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\log n)^\alpha \cdot n^s} = \sum_{n\geq 2} \frac{\frac{1}{(\log n)^\alpha}}{n^s}.$$

Aufgabe 38: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme die Konvergenzabszisse σ_k und die absolute Konvergenzabszisse σ_a der Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha^n}{n^s}.$$

Aufgabe 39: Zeige:

(1) Hat die Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ die Konvergenzabszisse σ_k und die absolute Konvergenzabszisse σ_a, so hat für $\alpha \in \mathbb{R}$ die Dirichletreihe $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n n^\alpha}{n^s}$ die Konvergenzabszisse $\sigma_k + \alpha$ und die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a + \alpha$.

(2) Hat $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ die Konvergenzabszisse σ_k und $\sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{n^s}$ die Konvergenzabszisse σ_k', und gilt $\sigma_k \neq \sigma_k'$, so hat $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n + b_n}{n^s}$ die Konvergenzabszisse $\sup(\sigma_k, \sigma_k')$. Die analoge Aussage gilt auch für die absoluten Konvergenzabszissen.

(3) Ist $0 < \delta < 1$, so hat die Dirichletreihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1 + (-1)^{n-1} n^\delta}{n^s}$$

die Konvergenzabszisse $\sigma_k = 1$ und die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a = 1 + \delta$, also

$$\sigma_a - \sigma_k = \delta.$$

Datei: anazt_u8.tex. Version vom 13.6.2024

Aufgabe 40: Zu einer reellen Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ werde eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 = 1$ und rekursiv für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad a_1 + \cdots + a_n < n^\alpha, \\ -1, & \text{falls} \quad a_1 + \cdots + a_n \geq n^\alpha \end{cases}$$

definiert.

(1) Zeige, dass die Dirichletreihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$$

die Konvergenzabszisse $\sigma_k = \alpha$ und die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_a = 1$ hat.

(2) Welche Dirichletreihen entstehen in den Fällen $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$?