Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 1 (19.4.2024)

Aufgabe 1: Die Menge $M = \{1\} \cup \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation und enthält 1 als neutrales Element, bildet also ein sogenanntes kommutatives Monoid. Ein $q \in M \setminus \{1\}$ heißt M-irreduzibel, wenn aus $q = m_1 m_2$ mit $m_1, m_2 \in M$ die Aussage $\{m_1, m_2\} = \{1, q\}$ folgt.

(1) Bestimme alle M-irreduziblen Elemente von M.
(2) Zeige, dass jedes Element $m \in M \setminus \{1\}$ ein Produkt von M-irreduziblen Elementen ist.
(3) Bestimme vier verschiedene M-irreduzible Elemente q_1, q_2, q_3, q_4 mit $q_1 q_2 = q_3 q_4$. (In M hat man also keine eindeutige Zerlegung in M-irreduzible Elemente.)

Aufgabe 2: Für $n \geq 3$ sei a_n der kleinste Primteiler der Zahl $n! - 1$. Zeige, dass für jede Primzahl $p \geq 5$ gilt

$$a_{p-2} = p.$$

(Hinweis: Der Satz von Wilson besagt $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.)

Aufgabe 3: Rekursiv wird eine Primzahlfolge $(q_r)_{r \geq 1}$ definiert durch

$$q_1 = 2 \quad \text{und} \quad q_{r+1} = \text{größter Primteiler von } q_1 \dots q_r + 1 \text{ für } r \geq 1,$$

also $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_3 = 7$, ...

(1) Berechne möglichst viele Glieder der Folge $(q_r)_{r \geq 1}$.
(2) Zeige, dass 5 nicht in der Primzahlfolge $(q_r)_{r \geq 1}$ vorkommt, eventuell mit Hilfe folgender Überlegungen:
   (a) Gäbe es einen Index r mit $q_{r+1} = 5$, so gäbe es eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

   $$2 \cdot 3 \cdot q_3 \dots q_r + 1 = 5^m.$$

   (b) Was würde für die Primfaktorzerlegung von $5^m - 1$ folgen? Warum geht das nicht?
(3) Zeige, dass 11 nicht in der Primzahlfolge $(q_r)_{r \geq 1}$ vorkommt, eventuell mit Hilfe folgender Überlegungen:
   (a) Gäbe es einen Index r mit $q_{r+1} = 11$, so gäbe es Zahlen $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \mathbb{N}$ mit

   $$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r + 1 = 5^a \cdot 11^b, \quad \text{also} \quad 5^a \cdot 11^b - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r.$$

   (b) Zeige (beispielsweise durch Kongruenzbetrachtungen modulo 4, 3, 7):

   $$\begin{aligned} 4 \nmid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff & b &\equiv 1 \bmod 2 \\ 3 \mid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff & a + b &\equiv 0 \bmod 2 \\ 7 \mid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff & a + 2b &\equiv 0 \bmod 6 \end{aligned}$$

   Wie erhält man einen Widerspruch?
   (c) Alternativ zur 3. Äquivalenz in (b) kann man auch folgende Aussage über das Legendre-Symbol herleiten:

   $$\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r + 1}{7}\right) = \left(\frac{5^a \cdot 11^b}{7}\right) \iff a \equiv 0 \bmod 2.$$

   Wie erhält man zusammen mit den ersten beiden Äquivalenzen in (b) einen Widerspruch?

Datei: anazt_u1.tex. Version vom 18.4.2024

Aufgabe 4: Sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... die Folge der Primzahlen.

(1) Zeige, dass für $n \geq 3$ gilt $p_n \leq p_1 \ldots p_{n-1} - 1$.

(2) Folgere aus (1) mit Induktion, dass

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}} \text{ für alle } n \geq 1$$

gilt.

(3) Folgere aus (2), dass

$$\pi(x) > \frac{\log\log x}{\log 2} \text{ für alle } x > 1$$

gilt.

Aufgabe 5: Beweise oder widerlege (durch ein Gegenbeispiel):

(1) Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann beschränkt, wenn $a_n = O(1)$ gilt.

(2) Eine Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ ist genau dann eine Nullfolge, wenn $b_n = O\big(\frac{1}{n}\big)$ gilt.

(3) Gilt $f_1(x) = g_1(x) + O\big(h_1(x)\big)$ und $f_2(x) = g_2(x) + O\big(h_2(x)\big)$, so auch

$$f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x) + O\big(h_1(x) + h_2(x)\big).$$

(4) Gilt $f_1(x) = g_1(x) + O\big(h_1(x)\big)$ und $f_2(x) = g_2(x) + O\big(h_2(x)\big)$, so auch

$$f_1(x)f_2(x) = g_1(x)g_2(x) + O\big(h_1(x)h_2(x)\big).$$