

8.1 Separable DGLen

Einer der einfachsten Typen von DGLen ist die *separable* DGL, auch DGL *mit getrennten Veränderlichen* genannt:

$$y'(x) = f(x) g(y).$$

Hat $g(y)$ die Nullstelle y^* , ist $y(x) \equiv y^*$ eine triviale *konstante* Lösung der DGL. Für $g(y) \neq 0$ kann man die DGL umformen:

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x), \text{ salopp: } \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx$$

(Trennung der Variablen). Eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$, wobei $g(y_0) \neq 0$, einbeziehend, integriert man diese Gleichung gemäß

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(\xi)}{g(y(\xi))} d\xi = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

$$\Leftrightarrow \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} \Big|_{y=y(x)} = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi.$$

„ \Rightarrow “: Substitution $y(\xi) = \eta$. „ \Leftarrow “: Da die linke Seite nahe y_0 eine Mindest-Änderungsrate bzgl. y aufweist, ferner stetig und monoton ist, hat die entstehende Gleichung in x und y für x nahe x_0 jeweils genau eine Lösung $y = y(x)$, die man möglichst durch explizites Auflösen der Gleichung nach y angibt. Mit $G(y) := \int_{y_0}^y 1/g$ folgt $y(x) = G^{-1}(\int_{x_0}^x f)$, also ist $y(x)$ differenzierbar. Per Kettenregel folgt die DGL.

Beispiele

1) Ein mit Wasser gefülltes quaderförmiges Bassin der Tiefe H habe seinen Auslass im Boden, durch den das Wasser unter alleiniger Wirkung des hydrostatischen Drucks abfließe.

Nach 3.3.1 wissen wir, dass die Ausfließgeschwindigkeit beim Wasserstand $h(t)$ den Wert $v(t) = \sqrt{2g h(t)}$ hat.

Also kann man sagen (mit einer empirischen Konstanten c)

$$h'(t) = -c\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = H.$$

Es folgt

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{h(t)}} = -c$$

also

$$2(\sqrt{h(t)} - \sqrt{H}) = -ct,$$

$$h(t) = \left(\sqrt{H} - \frac{c}{2}t \right)^2.$$

Die Gesamtdauer T der Beckenentleerung unter diesen Modell-Annahmen ergibt sich aus $\sqrt{H} - cT/2 = 0$, beträgt also

$$T = \frac{2}{c} \sqrt{H}.$$

2) $y' = \sin x \exp y.$

$g(y) = e^y$ hat keine Nullstelle. Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = e^y \sin x \Leftrightarrow e^{-y} dy = \sin x dx,$$

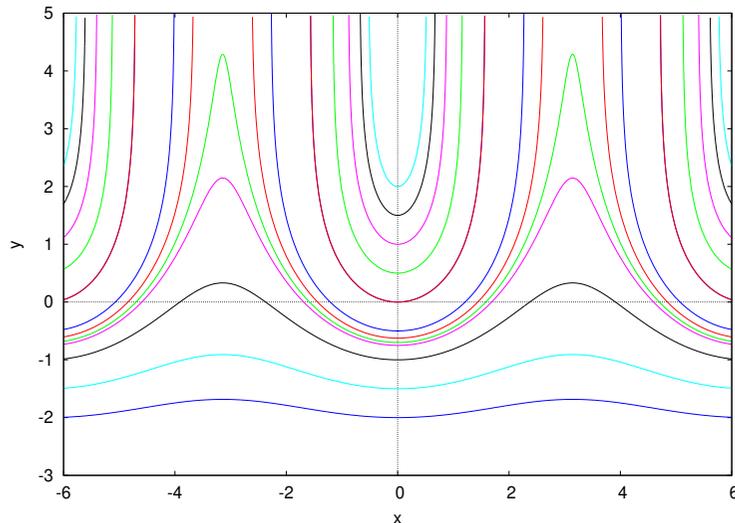
also

$$\int_{y_0}^y e^{-\eta} d\eta = \int_{x_0}^x \sin \xi d\xi$$

und damit $e^{-y_0} - e^{-y} = \cos x_0 - \cos x$, folglich

$$y(x) = -\ln(e^{-y_0} + \cos x - \cos x_0).$$

Für $x_0 = 0$ und variierende y_0 einige Lösungsverläufe:



Nur für Anfangswerte mit $e^{-y_0} > \cos x_0 + 1$ existieren die Lösungen auf ganz \mathbb{R} .

3)* $y' = e^x \sin y.$

Konstante Lösungen: $y(x) \equiv k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $y \neq k\pi$:

$$\frac{dy}{\sin y} = e^x dx \Leftrightarrow \int_{y_0}^y \frac{d\eta}{\sin \eta} = \int_{x_0}^x e^\xi d\xi \quad (*)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \int \frac{-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx \\ &= \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \ln \left| \tan \frac{y}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{y_0}{2} \right| = e^x - e^{x_0} \\ &\Leftrightarrow \left| \tan \frac{y}{2} \right| = \left| \tan \frac{y_0}{2} \right| \exp(e^x - e^{x_0}) \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{y(x)}{2} = \tan \frac{y_0}{2} \exp(e^x - e^{x_0}) \end{aligned}$$

Die letzte Äquivalenz wegen $\sin y \neq 0$ (also $\sin \frac{y}{2}, \cos \frac{y}{2} \neq 0$) und Stetigkeit.

Da $\tan(x + \pi) = \tan x$, folgt mit einem $k \in \mathbb{Z}$

$$y(x) = 2k\pi + 2 \arctan \left(\tan \frac{y_0}{2} \exp(e^x - e^{x_0}) \right).$$

Mit

$$k_0\pi - \frac{\pi}{2} < \frac{y_0}{2} < k_0\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow k_0 < \frac{y_0 + \pi}{2\pi} < k_0 + 1$$

gilt $\arctan(\tan \frac{y_0}{2}) = \frac{y_0}{2} - k_0\pi$.

Daher ergibt die Lösung für $x = x_0$

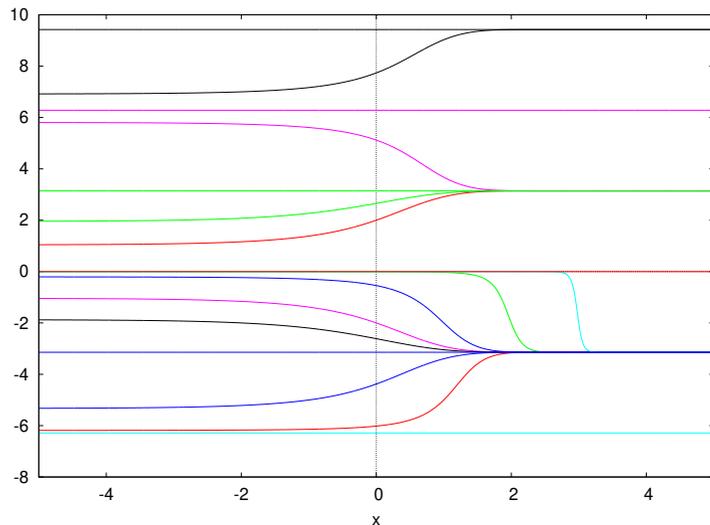
$$y(x_0) = 2k\pi + 2 \arctan(\tan \frac{y_0}{2}) = 2(k - k_0)\pi + y_0 \stackrel{!}{=} y_0,$$

weshalb $k = k_0 = \lfloor \frac{y_0 + \pi}{2\pi} \rfloor$ zu setzen ist.

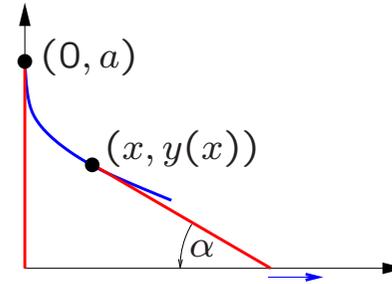
Fazit:

$$y(x) = 2 \lfloor \frac{y_0 + \pi}{2\pi} \rfloor \pi + 2 \arctan \left(\tan \frac{y_0}{2} e^{e^x - e^{x_0}} \right)$$

ist die Lösung der DGL zu gegebenen Anfangswerten $y(x_0) = y_0 \notin \pi\mathbb{Z}$. Diese streng monotonen Lösungen verlaufen ganz zwischen zwei benachbarten Vielfachen von π und streben für $x \rightarrow \infty$ sehr rasch gegen die konstanten Lösungen $y \equiv (2k - 1)\pi$ der DGL.



4) Die Traktrix (Schleppkurve).



Eine Masse am Punkt $(0, a)$ ist mit einem **Schlepptau** der Länge a verbunden, dessen anderes Ende sich am Punkt $(0, 0)$ befindet und von dort aus die positive x -Achse entlangbewegt wird.

Die **Traktrix** ist der Weg, den bei diesem Schleppevorgang die Masse beschreibt.

Nach Pythagoras gilt

$$y'(x) = -\frac{y(x)}{\sqrt{a^2 - y(x)^2}},$$

und die Lösung ergibt sich aus

$$x = -\int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\eta} d\eta \stackrel{\substack{a^2 - \eta^2 = t^2 \\ -2\eta d\eta = 2t dt}}{=} \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(\frac{a^2}{a^2 - t^2} - 1 \right) dt$$

$$= \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2}. \quad \left(\frac{a^2}{a^2 - t^2} = \frac{a/2}{a-t} + \frac{a/2}{a+t} \right)$$

$x = a \left(\ln \frac{a}{y} + \sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1} \right) - \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}$ ist eine *explizite*

Darstellung der Traktrix, $x = x(y)$; $x'(y) = -\sqrt{\frac{a^2}{y^2} - 1}$.

Oder: $x = \frac{a}{2} \ln \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - a \cos \alpha = a \left(\ln \cot \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \right)$,

$y = a \sin \alpha$; $y'(x) = -\tan \alpha$. (Schlepp-Durchlaufungssinn

mit Parameter $\beta = \pi - \alpha$: $x = a \left(\ln \tan \frac{\beta}{2} + \cos \beta \right)$, $y = a \sin \beta$.)

Rotiert die Traktrix um die x -Achse, entsteht die *Pseudosphäre*, eine Fläche mit konstanter negativer *Gaußscher Krümmung* $-a^2$.

5)** Freier Fall aus großer Höhe.

Dabei wirkt auf einen Körper der Masse m die Gravitationskraft $K = \frac{GMm}{h^2}$, mit der Gravitationskonstanten G , der Erdmasse M und dem Abstand h zwischen den Massenschwerpunkten. Also gilt nach Newton ($\dot{\circ}$: Multiplikation mit \dot{h} und Integration – *Energie-Erhaltung!*)

$$\ddot{h} = -\frac{GM}{h^2} \stackrel{\dot{\circ}}{\Leftrightarrow} \frac{\dot{h}^2}{2} = \frac{GM}{h} + c \Leftrightarrow \dot{h} = \pm\sqrt{2GM/h + 2c}.$$

Man erhält

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{2}} \int_{h_0}^h \frac{d\eta}{\sqrt{GM/\eta + c}} = \int_{t_0}^t d\tau. \quad (*)$$

Im Spezialfall $\dot{h} = 0$ für $h = \infty$ folgt $c = 0$. Also beschreibt ($h_0 = r_E = 6371\text{km}$, $t_0 = 0$)

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{GM}} \left(h^{3/2}(t) - r_E^{3/2} \right) = t,$$

$$h(t) = \left(r_E^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{GM}}{\sqrt{2}} t \right)^{2/3}$$

den Grenzfall einer *Fluchtbewegung* („+“ und $t = 0 \dots \infty$) sowie die genau entgegengesetzte *Fallbewegung* („-“ und $t = -\infty \dots 0$) aus unendlicher Entfernung.

Als *Fluchtgeschwindigkeit* ergibt sich $\dot{h}(0) = \sqrt{\frac{2GM}{r_E}}$, also mit $g = 9.806 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \frac{GM}{r_E^2}$:

$$\dot{h}(0) = \sqrt{2gr_E} = 11.18\text{km/s}.$$

Wir bestimmen nun die Lösung von (*) für den freien Fall, der ruhend in großer Höhe H zum Zeitpunkt t_0 startet, also mit den Anfangsbedingungen $h(t_0) = H$, $\dot{h}(t_0) = 0$ und damit $c = -GM/H$. Zu lösen ist also

$$-\frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_H^h \frac{d\eta}{\sqrt{1/\eta - 1/H}} = \int_{t_0}^t d\tau.$$

Für $a > 0$, $0 < x < 1/a$ gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1/x - a}} &\stackrel{\substack{= \\ -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{2\sqrt{1/x-a}} = dt}}{=} -2 \int \frac{dt}{(t^2 + a)^2} \stackrel{\substack{t = \sqrt{au} \\ dt = \sqrt{a} du}}{=} -\frac{2}{a^{3/2}} \int \frac{du}{(1 + u^2)^2} \\ &= -\frac{2}{a^{3/2}} \left(\int \frac{du}{1 + u^2} - \int u \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2} du \right) \text{ (partiell !)} \\ &= -\frac{2}{a^{3/2}} \left(\frac{1}{2} \arctan u + \frac{u/2}{1 + u^2} \right) \\ &= -\frac{1}{a^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{1}{ax} - 1} - \frac{x}{\sqrt{a}} \sqrt{\frac{1}{ax} - 1} + C. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\arctan \sqrt{\frac{H}{h(t)} - 1} + \sqrt{\frac{h(t)}{H}} \left(1 - \frac{h(t)}{H} \right) = \frac{\sqrt{2GM}}{H^{3/2}} (t - t_0)$$

Man kann dies zwar nicht nach $h(t)$ auflösen; aber $(t(h), h)$ ($h_0 \leq h \leq h_1$) ist als Lösungs-Parametrisierung ebenso brauchbar wie $(t, h(t))$ ($t_0 \leq t \leq t_1$).

Für $H = 384400\text{km}$ ergibt sich als *Fallzeit* T (mit $t_0 = 0$, $h(T) = r_E$, *Luftwiderstand* unberücksichtigt)

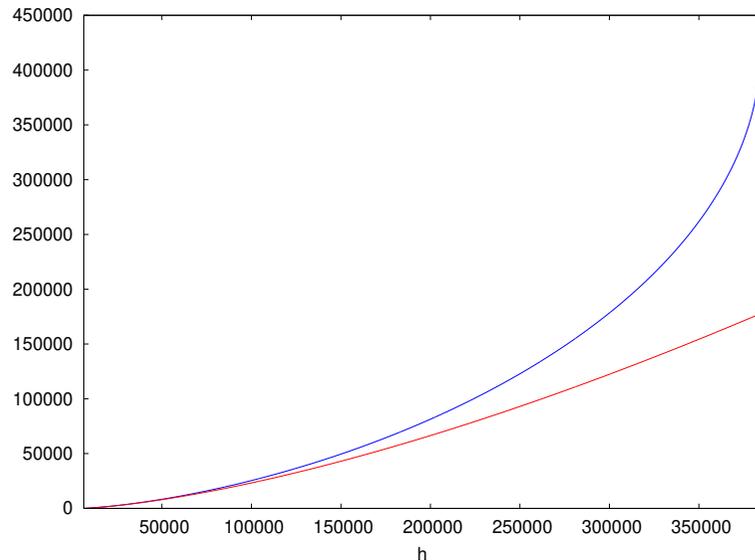
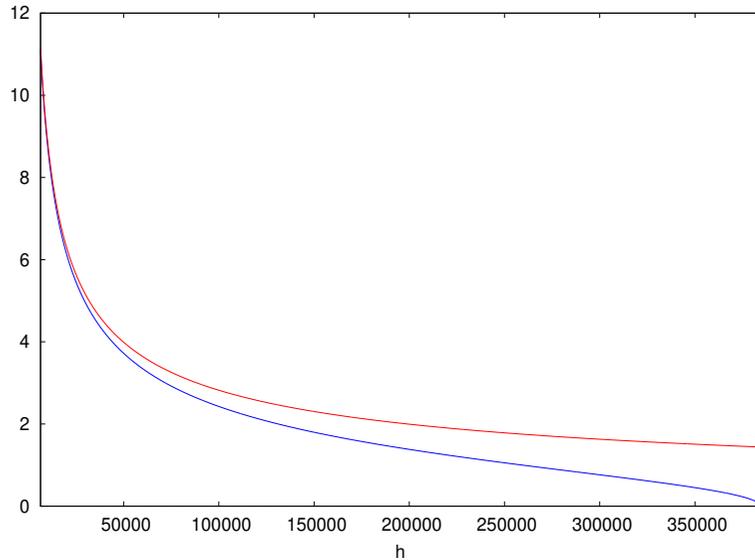
$$T = 419209 \text{ Sekunden} \approx 4.85 \text{ Tage}$$

und als *Aufprallgeschwindigkeit* (mit $g = 9.806\text{m/s}^2$)

$$\dot{h}(T) = \sqrt{2GM} \sqrt{\frac{1}{r_E} - \frac{1}{H}} = \sqrt{2g} r_E \sqrt{\frac{1}{r_E} - \frac{1}{H}} = 11.085\text{km/s}.$$

Luftwiderstand gibt's nur in den letzten Fall-Sekunden.

Zum Vergleich des Falls **aus unendlicher Höhe** und **aus Mondentfernung** die Plots der *Fallgeschwindigkeiten* und der *Restfallzeiten* als Funktion der Höhe $[\frac{\text{km}}{\text{s}}, \text{s}]$:



Die Maximalhöhe H in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit v_0 : $H = \frac{r_E}{1 - v_0^2/2g r_E} = r_E + \frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^4/4g^2 r_E}{1 - v_0^2/2g r_E}$.

v_0 [km/s]	0	1	2	5	10	11
H [km]	6371	6422	6582	7965	31908	201630

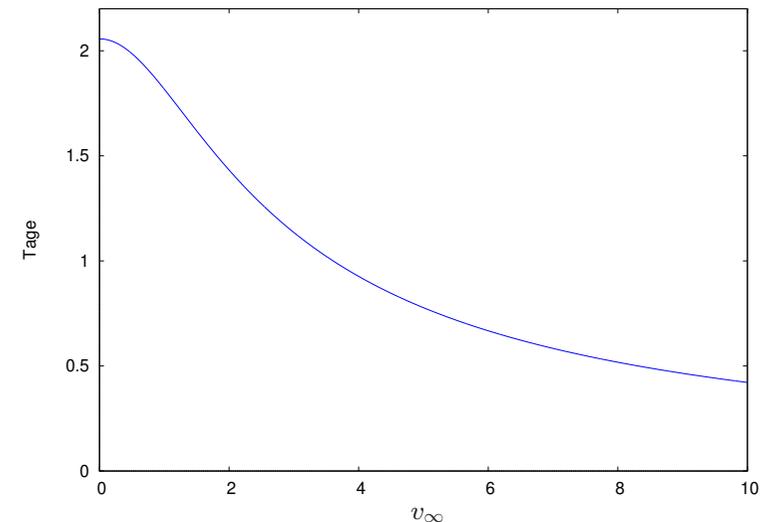
Nun *Ultra-Fluchtbewegungen*, d.h. solche mit Startgeschwindigkeit $v_0 > 11.18 \text{ km/s}$; anders gesagt: der Fall $c = v_\infty^2/2 > 0$ der DGL. Für $a > 0, x > 0$ gilt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1/x + a}} \stackrel{\substack{\sqrt{1/x+a}=t \\ -\frac{1}{x^2} \frac{dx}{dt} = dt}}{=} -2 \int \frac{dt}{(t^2 - a)^2}$$

$$= \frac{t/a}{t^2 - a} + \frac{1}{2a^{3/2}} \ln \left| \frac{t - \sqrt{a}}{t + \sqrt{a}} \right| + C_1 = (\text{Subst.u.Umformg.})$$

$$= a^{-3/2} \left(\sqrt{ax(1 + ax)} - \ln(\sqrt{ax} + \sqrt{1 + ax}) \right) + C.$$

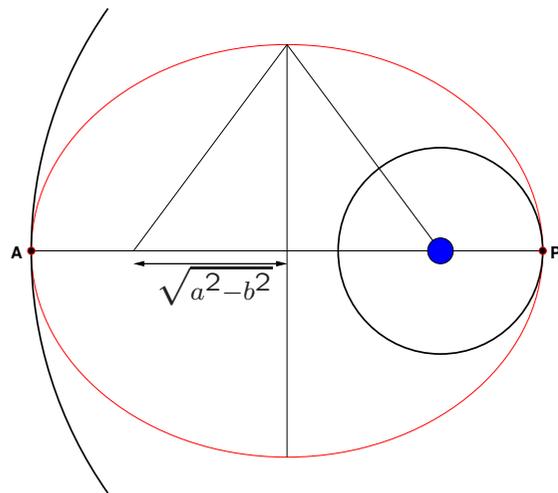
Diese Gestalt der Stammfunktion strebt für $a \searrow 0$ gegen $\frac{2}{3} x^{3/2}$ (l'Hôpital), führt also zur passenden Auflösung von (*). Hier ein Plot der Flugzeit [Tage] *bis zur Mondentfernung* als Funktion von $v_\infty > 0$ [km/s], der (unteren) Fluggeschwindigkeits-Grenze:



Ohne die Bahnen genau auszurechnen, sei abschließend noch die Frage geklärt, ob die Fluchtgeschwindigkeit im Abstand r vom Erdmittelpunkt

$$v_{\text{Flucht}}(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \frac{\sqrt{2g} r_E}{\sqrt{r}} = 11.18 \text{ km/s} \cdot \sqrt{\frac{r_E}{r}}$$

auch bei *anderer* als radialer Startrichtung zum Entfliehen aus der Erdanziehung reicht.



Bekanntlich umkreist ein kleiner Körper die Erde auf einer Ellipsen-Bahn, in deren einem **Brennpunkt** $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ die Erde sitzt.

Perigäum P und Apogäum A, d.h. der erdnächste und erdfernste Punkt,

sind dabei die beiden Endpunkte der großen Achse der Bahnellipse; große und kleine Halbachse: a und b .

Wir rechnen elementar nach, dass der Perigäumskreis $(x - \sqrt{a^2 - b^2})^2 + y^2 = (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2$ bis auf den Punkt $(a, 0)$ ganz *innerhalb* der Ellipse $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ verläuft (beim Apogäumskreis ist's trivial wegen Radius $> a$): Auf dem Kreis gilt $y^2 = a^2 - x^2 - 2(a - x)\sqrt{a^2 - b^2}$, auf der Ellipse $y^2 = a^2 - x^2 - \sqrt{a^2 - b^2} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{a+x}{a}(a-x)$. Also ist klar, dass der Kreis innerhalb der Ellipse liegt.

Wir nutzen nun den *Energiesatz* und Keplers *Flächensatz*, um die Geschwindigkeiten der Ellipsenbahn zu bestimmen.

Sei $\varepsilon := \sqrt{a^2 - b^2}/a$ (**numerische Exzentrizität** der Ellipse).

Aufgrund des Flächensatzes gilt für die Geschwindigkeiten v_p und v_a im erdnächsten bzw. erdfernsten Bahnpunkt:

$$v_p a(1 - \varepsilon) = v_a a(1 + \varepsilon).$$

Und da die Summe aus kinetischer Energie $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$ und aus potenzieller Energie $E_{\text{pot}} = -\frac{mGM}{r_E+h}$ konstant ist (vgl. Seite 128; Normierung hier so, dass E_{pot} im Unendlichen verschwindet), gilt außerdem

$$\frac{m}{2}v_p^2 - \frac{mGM}{a(1 - \varepsilon)} = \frac{m}{2}v_a^2 - \frac{mGM}{a(1 + \varepsilon)}.$$

Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$v_a = \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)GM}{(1 + \varepsilon)a}}, \quad v_p = \sqrt{\frac{(1 + \varepsilon)GM}{(1 - \varepsilon)a}}$$

als Grenzen der Geschwindigkeiten, die der Körper auf seiner Bahn annimmt.

Wegen $v_{\text{Flucht}}^2(r) = \frac{2GM}{r}$, $v^2(r) - \frac{2GM}{r} = v_p^2 - \frac{2GM}{a(1 - \varepsilon)}$ (Energiesatz) und $v_p^2 < \frac{2GM}{a(1 - \varepsilon)} \Leftrightarrow 1 + \varepsilon < 2$ ist die Ellipsenbahngeschwindigkeit $v(r)$ überall *kleiner* als die lokale Fluchtgeschwindigkeit $v_{\text{Flucht}}(r)$. Das bedeutet:

Startet ein Körper im Abstand r *in irgendeiner Richtung* mit $v_0 \geq v_{\text{Flucht}}(r)$, wird's keine Ellipsenbahn, sondern eine Flucht – oder eine Kollision.

Für $v(r)$ mit $a(1 - \varepsilon) \leq r \leq a(1 + \varepsilon)$ auf der Ellipsenbahn gilt:

$$\text{(Apogäum)} \quad \frac{1 - \varepsilon}{2} \leq \frac{v^2(r)}{v_{\text{Flucht}}^2(r)} = 1 - \frac{r}{2a} \leq \frac{1 + \varepsilon}{2} \quad \text{(Perigäum)}.$$