KAPITEL 6

Algebraische Varietäten - vertieft

Im ersten Teil der Vorlesung haben wir versucht, mit minimalen algebraischen Begriffen auszukommen. Im zweiten Teil der Vorlesung werden wir nun etwas mehr Algebra verwenden.

- Wir legen im Folgenden einen Körper K zugrunde. Sei $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Wir setzen voraus, dass $\overline{K}$ separabel über K ist, d.h. jedes irreduzible Polynom aus $K[x]$ zerlegt sich über $\overline{K}$ in der Form
$$f = c(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_r)$$
mit paarweise verschiedenen Zahlen $\alpha_1,\dots,\alpha_r \in \overline{K}$. Ein solcher Körper heißt **vollkommener Körper** (engl. **perfect field**).
- Im Fall eines vollkommenen Körpers ist $\overline{K}$ galoissch über K. Mit G_K werde die Galoisgruppe von $\overline{K}$ über K bezeichnet. Es gilt:
$$K = \{a \in \overline{K} : \sigma a = a \text{ für alle } \sigma \in G_K\}.$$
- Beispiele vollkommener Körper: Algebraisch abgeschlossene Körper, Körper der Charakteristik 0 und endliche Körper.
- Beispiel eines Körpers, der nicht vollkommen ist: Der rationale Funktionenkörper in einer Variablen über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$, also $\mathbb{F}_p(t) = \{\frac{g(t)}{h(t)} : g(t), h(t) \in \mathbb{F}_p[t]\}$ ist nicht vollkommen, da beispielsweise das Polynom $x^p - t$ zwar irreduzibel über dem Körper, aber nicht separabel ist.
- Der Polynomring $K[x_1,\dots,x_n]$ über einem Körper K ist ein **noetherscher Ring**, d.h. jedes Ideal ist endlich erzeugt.
- Ein Ideal $\mathfrak{p}$ eines kommutativen Rings R (mit Eins) heißt **Primideal**, wenn der Faktorring $R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsring ist. Äquivalent dazu ist, dass $\mathfrak{p} \neq R$ und folgende Implikation gilt:
$$ab \in \mathfrak{p} \quad\Longrightarrow\quad a \in \mathfrak{p} \text{ oder } b \in \mathfrak{p}.$$
- Ein Ideal $\mathfrak{m}$ eines kommutativen Rings R (mit Eins) heißt **maximales Ideal**, wenn der Faktorring $R/\mathfrak{m}$ ein Körper ist.
- Die Galoisgruppe G_K operiert auf den Polynomen aus $\overline{K}[x_1,\dots,x_n]$: Für $f = \sum a_{i_1,\dots,i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ und $\sigma \in G_K$ sei
$$\sigma(f) = \sum \sigma(a_{i_1,\dots,i_n}) x_i^{i_1}\dots x_n^{i_n}.$$
Dann gilt:
$$K[x_1,\dots,x_n] = \{f \in \overline{K}[x_1,\dots,x_n] : \sigma f = f \text{ für alle } \sigma \in G_K\}.$$
Für $a_1,\dots,a_n \in \overline{K}$ gilt dann
$$\sigma(f(a_1,\dots,a_n)) = (\sigma(f))(\sigma(a_1),\dots,\sigma(a_n)).$$

1. Affine Varietäten

Definition. *Der n-dimensionale affine Raum ist*
$$\mathbb{A}^n = \{P = (a_1,\dots,a_n) : a_i \in \overline{K}\}.$$
Die Menge der K-rationalen Punkte von $\mathbb{A}^n$ ist
$$\mathbb{A}^n(K) = \{P = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{A}^n : a_i \in K\}.$$

Datei: algku6.tex. Version vom 18.7.2021

Die Galoisgruppe G_K operiert auf $\mathbb{A}^n$ durch $\sigma(a_1, \dots, a_n) = (\sigma a_1, \dots, \sigma a_n)$. Dann gilt

$$\mathbb{A}^n(K) = \{P \in \mathbb{A}^n : \sigma P = P \text{ für alle } \sigma \in G_K\}.$$

Definition. *Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt algebraische Menge in $\mathbb{A}^n$, falls es Polynome $f_1, \dots, f_r \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit*

$$V = \{P \in \mathbb{A}^n : f_1(P) = \dots = f_r(P) = 0\}.$$

Man sagt, eine algebraische Menge V ist über K definiert, falls es Polynome $g_1, \dots, g_s \in K[x_1, \dots, x_n]$ gibt mit

$$V = \{P \in \mathbb{A}^n : g_1(P) = \dots = g_s(P) = 0\}.$$

Man schreibt dann auch V/K. In diesem Fall heißt

$$V(K) = V \cap \mathbb{A}^n = \{P \in K^n : g_1(P) = \dots = g_s(P) = 0\}$$

die Menge der K-rationalen Punkte von V.

Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ über K definiert, d.h. $V = \{f_1 = \dots = f_r\}$ mit Polynomen $f_1, \dots, f_r \in K[x_1, \dots, x_n]$, so operiert G_K auf V, denn für $\sigma \in G_K$ gilt:

$$P \in V \Rightarrow f_i(P) = 0 \Rightarrow 0 = \sigma(f_i(P)) = f_i(\sigma(P)) \Rightarrow \sigma(P) \in V.$$

Beispiele:

(1) Sei $f = -3y + 2xy + 3y^2$ und $g = 4x + 5y + x^2 + xy$. Dann ist
$$X = \{f = g = 0\} = \{(0,0), (-4,0), (\frac{-5+\sqrt{-35}}{2}, \frac{8-\sqrt{-35}}{3}), (\frac{-5-\sqrt{-35}}{2}, \frac{8+\sqrt{-35}}{3})\}.$$
Die Galoisgruppe $G_{\mathbb{Q}}$ operiert offensichtlich auf X.

(2) Sei $f = -3 + 3y + 4x^2 - 5xy$ und $g = -3 - 3x + xy - 5y^2$. Dann ist
$$X = \{f = g = 0\} = \{(-2, -1)\} \cup \{(\alpha, 4\alpha^2 + \alpha - 3) : 20\alpha^3 - 11\alpha^2 - 18\alpha + 12 = 0\}.$$
(Die Galoisgruppe des Polynoms $20x^3 - 11x^2 - 18x + 12$ ist die S_3.)

(3) Ist $X \subseteq \mathbb{A}^2$ eine über $\mathbb{Q}$ definierte algebraische Menge, und ist $(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \in X$, so folgt
$$(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}) \in X.$$

Definition. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Dann heißt*

$$I(V) = \{f \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n] : f(P) = 0 \text{ für alle } P \in V\}$$

das **Ideal von** *V. Weiter setzt man*

$$I(V/K) = I(V) \cap K[x_1, \dots, x_n].$$

Bemerkungen:

(1) Ist $V = \{f_1 = \dots = f_r = 0\}$, so verschwinden natürlich auch alle Polynome aus dem Ideal $(f_1, \dots, f_r)$ auf V. Gibt es noch mehr Polynome? Der **Hilbertsche Nullstellensatz** besagt, dass
$$I(V) = \sqrt{(f_1, \dots, f_r)}$$
gilt. Dies setzt die Betrachtung über $\overline{K}$ voraus. Dabei ist
$$\sqrt{(f_1, \dots, f_r)} = \{f \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n] : f^m \in (f_1, \dots, f_r) \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$$
das Radikalideal von $(f_1, \dots, f_r)$. (Statt $\sqrt{(f_1, \dots, f_r)}$ findet man auch die Schreibweise $\mathrm{rad}((f_1, \dots, f_r))$.)

(2) Im Polynomring $\overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ gilt
$$I(V/K)\overline{K}[x_1, \dots, x_n] \subseteq I(V).$$
Gleichheit gilt genau dann, wenn V über K definiert ist.

Definition. *Eine nichtleere algebraische Menge $V \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt* **(absolut) irreduzibel**, *falls sie nicht als echte Vereinigung weiterer algebraischer Mengen $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{A}^n$ geschrieben werden kann, d.h. $V = V_1 \cup V_2$ impliziert $V = V_1$ oder $V = V_2$. (Die leere Menge wird nicht als irreduzibel betrachtet.) Fordert man, dass V, V_1, V_2 über K definiert sind, so nennt man V* **irreduzibel über** K.

Bemerkung: Sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ und $V = \{f = 0\} \subseteq \mathbb{A}^n$. Ist f über K irreduzibel, so ist V über K irreduzibel. Ist f über $\overline{K}$ irreduzibel, so ist V absolut irreduzibel.

Beispiel: $X = \{x^2 = 2y^2\}$ ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel, nicht aber absolut irreduzibel.

Satz. *Jede algebraische Menge V ist Vereinigung von endlich vielen irreduziblen:*
$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_r.$$
Fordert man noch $V_i \not\subseteq V_j$ für $i \neq j$, so ist diese Darstellung bis auf die Reihenfolge eindeutig. Die V_i's heißen **irreduzible Komponenten** *von V.*

Beispiel: Sei $V = \{f = 0\}$ mit $f \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$. Da $\overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ ein faktorieller Ring ist, hat man eine (bis auf Konstanten eindeutige) Zerlegung
$$f = f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r},$$
wo die f_i's irreduzible Polynome sind und $e_i \geq 1$. Dann gilt:
$$V = \{f = 0\} = \{f_1 = 0\} \cup \cdots \cup \{f_r = 0\}.$$
Die algebraischen Mengen $\{f_i = 0\}$ sind die irreduziblen Komponenten von V.

Bemerkung: Sei X über K definiert, über K irreduzibel, aber nicht absolut irreduzibel. Sei $V = \{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ eine irreduzible Komponente von X über $\overline{K}$ und für $\sigma \in G_K$
$$V_\sigma = \{\sigma f_1 = \cdots = \sigma f_r = 0\}.$$
Dann gilt
$$X = V_{\sigma_1} \cup \cdots \cup V_{\sigma_s}.$$
$W = V_{\sigma_1} \cap \cdots \cap V_{\sigma_s}$ ist über K definiert und $X(K) \subseteq W(K)$.

Beispiel: $V = \{3 - 3y + x^2 + xy + y^2 = 0\}$ ist über $\mathbb{Q}$ definiert und über $\mathbb{Q}$ irreduzibel. Über $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ erhält man die Zerlegung
$$V = \{y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}x + \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}\} \cup \{y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}x + \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}\}.$$
Man sieht dann $V(\mathbb{Q}) = \{(-1, 2)\}$.

Satz. *Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. V ist genau dann (absolut) irreduzibel, wenn $I(V)$ ein Primideal in $\overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ ist.*

Definition. *Eine (absolut) irreduzible Teilmenge von $\mathbb{A}^n$ heißt eine* **affine Varietät**.

Definition. *Sei V eine über K definierte affine Varietät in $\mathbb{A}^n$. Dann heißt*
$$K[V] = K[x_1, \dots, x_n]/I(V/K)$$
der **affine Koordinatenring von V (über K)**. *$K[V]$ ist ein Integritätsring. Sein Quotientenkörper $K(V)$ heißt der* **Funktionenkörper von** V/K.

Interpretation als Funktionen: Sei V eine affine Varietät in $\mathbb{A}^n$. Die Polynome aus $\overline{K}[x_1,\dots,x_n]$ können wir als Funktionen $V\to\overline{K}$ betrachten. Für zwei Polynome f,g gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ und } g \text{ liefern die gleiche Funktion auf } V \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\quad & f-g \text{ verschwindet auf } V \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\quad & f-g\in I(V) \quad \Longleftrightarrow \quad f\equiv g \bmod I(V) \quad \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow\quad & f=g \text{ als Elemente von } \overline{K}[V]. \end{aligned}$$

Die Elemente aus $\overline{K}[V]$ können also als Funktionen auf V betrachtet werden.

Definition. *Sei $V\subseteq\mathbb{A}^n$ eine Varietät. Dann wird die* **Dimension von V** *definiert als*

$$\dim V=\max\{n: V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_n=V, V_i \textit{ irreduzibel}\}.$$

Bemerkung: Die Dimension von V berechnet sich auch als Transzendenzgrad von $\overline{K}(V)$ über $\overline{K}$.

Beispiele:

(1) $\overline{K}[\mathbb{A}^n]=\overline{K}[x_1,\dots,x_n]$. $\mathbb{A}^n$ hat Dimension n.
(2) Sei $f\in\overline{K}[x_1,\dots,x_n]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist $V=\{f=0\}$ eine Varietät der Dimension $n-1$. Außerdem gilt
$$\overline{K}[V]=\overline{K}[x_1,\dots,x_n]/(f).$$

Definition. *Sei $V\subseteq\mathbb{A}^n$ eine Varietät, $I(V)=(f_1,\dots,f_r)$ und $P\in V$. Man sagt V ist* **nichtsingulär (oder glatt) in** *P, falls gilt*

$$\dim V=n-\mathrm{Rang}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1}(P) & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n}(P)\end{pmatrix}.$$

Ist V in jedem Punkt nichtsingulär, so heißt V **nichtsingulär**.

Beispiel: Sei $f(x,y)\in\overline{K}[x,y]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist $V=\{f=0\}$ eine 1-dimensionale affine Varietät, eine Kurve. V ist genau dann nichtsingulär in $P\in V$, wenn

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(P),\frac{\partial f}{\partial y}(P))\neq 0.$$

Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(P)(x-x_P)+\frac{\partial f}{\partial y}(P)(y-y_P)=0$ die Tangente in $P=(x_P,y_P)$.

Beispiel: $y^2=x^2+x^3$ und $y^2=x^3$ sind jeweils singulär in $(0,0)$.

Definition. *Sei V eine affine Varietät und $P\in V$. Dann heißt*

$$\overline{K}[V]_P=\{\frac{f}{g}\in\overline{K}(V): f,g\in\overline{K}[V], g(P)\neq 0\}$$

der **lokale Ring von V in** *P.*

Der lokale Ring von V in P besteht also aus den Funktionen des Funktionenkörpers, die in P definiert sind. Offensichtlich gilt:

$$\overline{K}[V]\subseteq\overline{K}[V]_P\subseteq\overline{K}(V).$$

Beispiele:

(1) Wir wissen bereits $K[\mathbb{A}^2] = K[x,y]$ und
$$K(\mathbb{A}^2) = K(x,y) = \{\frac{f(x,y)}{g(x,y)} : f, g \in K[x,y]\}.$$
Für $P = (2,-1)$ gilt dann
$$K[\mathbb{A}^2]_P = \{\frac{f(x,y)}{g(x,y)} : f, g \in K[x,y], g(2,-1) \neq 0\}.$$

(2) Sei $X = \{y^2 = x^3\} \subseteq \mathbb{A}^2$. Dann ist $K[X] = K[x,y]/(y^2 - x^3)$. Jedes Element aus $K[X]$ hat die Gestalt $a(x) + b(x)y$ mit Polynomen $a, b \in K[x]$. Wir betrachten die Funktion $f = \frac{y}{x}$. Sie ist definiert für alle $P \neq (0,0)$. Für f^2 gilt im Funktionenkörper:
$$f^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x,$$
also ist f^2 in allen Punkten definiert, auch in $(0,0)$.

2. Projektive Varietäten

Definition. *Auf $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{(0,\ldots,0)\}$ wird durch*
$$(x_0,\ldots,x_n) \sim (y_0,\ldots,y_n) \iff x_i = \lambda y_i \text{ für ein } \lambda \in \overline{K}^\times \text{ und alle } i$$
eine Äquivalenzrelation definiert. Die Äquivalenzklasse von $(x_0,\ldots,x_n)$ wird mit $(x_0 : \cdots : x_n)$ bezeichnet. Die x_i's heißen homogene Koordinaten von $(x_0 : \cdots : x_n)$. Die Menge der Äquivalenzklassen heißt n-dimensionaler projektiver Raum (über K):
$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\overline{K}) = \{(x_0 : \cdots : x_n) : x_i \in \overline{K}, (x_0,\ldots,x_n) \neq 0\}.$$
Die Menge der K-rationalen Punkte von $\mathbb{P}^n$ ist
$$\mathbb{P}(K) = \{(x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n : x_i \in K\}.$$

Beispiel: Es gilt
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{Q}) = \{(a_0 : \cdots : a_n) : a_i \in \mathbb{Z}, \mathrm{ggT}(a_0,\ldots,a_n) = 1\}.$$

Bemerkung: Aus $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ folgt noch nicht $x_i \in K$, wie das Beispiel $(0 : \sqrt{2}) = (0 : 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ zeigt. Dies ändert sich, wenn man eine der homogenen Koordinaten zu 1 normiert. Ist $P = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{K})$ und $x_i \neq 0$, so nennt man
$$K(P) = K(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}) (\subseteq \overline{K})$$
den minimalen Definitionskörper von P über K. Die Galoisgruppe operiert natürlich auch auf $\mathbb{P}^n(\overline{K})$ und man sieht schnell
$$\mathbb{P}^n(K) = \{P \in \mathbb{P}^n : \sigma P = P \text{ für alle } \sigma \in G_K\}$$
und
$$K(P) = \text{ Fixkörper von } \{\sigma \in G_K : \sigma P = P\}.$$

Definition. *Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{P}^n$ heißt algebraische Teilmenge in $\mathbb{P}^n$, falls es homogene Polynome $f_1, \ldots, f_r \in \overline{K}[x_0,\ldots,x_n]$ gibt mit*
$$V = \{P \in \mathbb{P}^n : f_1(P) = \cdots = f_r(P) = 0\} = \{f_1 = \cdots = f_r = 0\}.$$
Man sagt, die algebraische Menge $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ist über K definiert, falls es Polynome $g_1, \ldots, g_s \in K[x_0,\ldots,x_n]$ gibt mit $V = \{g_1 = \cdots = g_s = 0\}$. In diesem Fall heißt
$$V(K) = V \cap \mathbb{P}^n(K)$$
die Menge der K-rationalen Punkte von V.

Genau wie im affinen Fall definiert man, wann eine algebraische Teilmenge **irreduzibel** heißt.

Definition. *Eine* **projektive Varietät** *ist eine irreduzible algebraische Menge in einem* $\mathbb{P}^n$.

Das Ideal $I(V)$ einer algebraischen Menge $V \subseteq \mathbb{P}^n$ ist das Ideal, das von allen homogenen Polynomen $f \in \overline{K}[x_0, \ldots, x_n]$ erzeugt wird, die auf V verschwinden. Dann gilt:

$$V \subseteq \mathbb{P}^n \text{ ist projektive Varietät } \iff I(V) \text{ ist Primideal.}$$

Wieder kann man jede algebraische Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ in eine endliche Vereinigung von irreduziblen Komponenten zerlegen.

Zariski-Topologie:

- Sind $V = \{f_1 = \cdots = f_r = 0\}$ und $W = \{g_1 = \cdots = g_s = 0\}$ algebraische Mengen, so auch
$$V \cup W = \{f_1 g_1 = \cdots = f_1 g_s = \cdots = f_r g_1 = \cdots = f_r g_s = 0\}.$$
- Seien $V_i = \{f_{i1} = \cdots = f_{ir_i} = 0\}$, $i \in I$ algebraische Mengen. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist das Ideal $(f_{ij} : i \in I, 1 \leq j \leq r_i)$ endlich erzeugt, d.h. es gibt Polynome $g_1, \ldots, g_s$ mit $(f_{ij} : i \in I, 1 \leq j \leq r_i) = (g_1, \ldots, g_s)$ und damit
$$\cap_{i \in I} V_i = \{P \in \mathbb{P}^n : f_{ij}(P) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ und alle } j = 1, \ldots, r_i\} = \{g_1 = \cdots = g_s = 0\}.$$
Also ist auch $\cap_{i \in I} V_i$ eine algebraische Menge.
- Weiter sind $\emptyset = \{1 = 0\}$ und $\mathbb{P}^n = \{0 = 0\}$ algebraische Mengen.

Die algebraischen Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ erfüllen damit die Axiome für die abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie. Man nennt diese Topologie die Zariski-Topologie auf dem $\mathbb{P}^n$. (Das gleiche gilt natürlich auch auf dem $\mathbb{A}^n$.) Damit können wir jetzt topologische Begriffe verwenden. Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ denken wir uns mit der induzierten Topologie versehen. Dass diese Topologie etwas ungewöhnlich ist, zeigen folgende Beispiele:

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und $U, V \subseteq X$ zwei offene nichtleere Teilmengen von X. Dann gilt $U \cap V \neq \emptyset$.
Beweis: Wäre $U \cap V = \emptyset$, so hätte man
$$X = (X \setminus U) \cup (X \setminus V).$$
$X \setminus U$ und $X \setminus V$ sind abgeschlossene Mengen von X, also algebraische Mengen des $\mathbb{P}^n$. Da X irreduzibel ist, folgt $X = X \setminus U$ oder $X = X \setminus V$, d.h. $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Beispiel: Die abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{P}^1$ sind $\emptyset$, $\mathbb{P}^1$ und alle endlichen Teilmengen.

Wir wollen nun den $\mathbb{P}^n$ betrachten. Sei $0 \leq i \leq n$ gegeben. Dann ist $H_i = \{x_i = 0\}$ abgeschlossen und $U_i = \mathbb{P}^n \setminus H_i = \{x_i \neq 0\}$ offen in $\mathbb{P}^n$. Für $(x_0 : \cdots : x_n) \in U_i$ gilt:
$$(x_0 : \cdots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \cdots : x_n) = (\frac{x_0}{x_i} : \cdots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \cdots : \frac{x_n}{x_i}).$$
Definiert man also
$$\phi_i : \mathbb{A}^n \to U_i, \quad (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1 : \cdots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \cdots : y_n)$$
und
$$\psi_i : U_i \to \mathbb{A}^n, \quad (x_0 : \cdots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \cdots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i} : \cdots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \cdots : \frac{x_n}{x_i}),$$
so sind ϕ_i und ψ_i invers zueinander. Wir können also $\mathbb{A}^n$ als offene Teilmenge des $\mathbb{P}^n$ betrachten. Oft wählen wir $i = 0$, d.h. wir denken uns $\mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ mit $(x_1, \ldots, x_n) \simeq (1 : x_1 : \cdots : x_n)$.

Ist $V \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive algebraische Menge, gegeben durch
$$V = \{f_1(x_0, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(x_0, \ldots, x_n) = 0\},$$
wo die f_i's homogene Polynome sind, so ist $V \cap \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge, gegeben durch die Gleichungen
$$V \cap \mathbb{A}^n = \{f_1(1, x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_r(1, x_1, \ldots, x_n) = 0\}.$$
Wichtiger ist die Umkehrung:

Definition. *Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine algebraische Menge, so denken wir uns V mit $V \subseteq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ als Teilmenge des $\mathbb{P}^n$. Der topologische Abschluss $\overline{V}$ von V in $\mathbb{P}^n$ heißt der* **projektive Abschluss von** *V.*

Wie berechnet man den projektiven Abschluss? Dazu brauchen wir das Homogenisieren von Polynomen. Sei $f(x_1, \dots, x_n) \in \overline{K}[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom vom Grad d. Das homogenisierte Polynom ist dann

$$f^*(x_0, \dots, x_n) = x_0^d f(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}).$$

Man kann dies auch explizit ausschreiben: Ist

$$f = \sum_{i_1+\dots+i_n \leq d} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n},$$

so ist

$$f^* = \sum_{i_0+i_1+\dots+i_n = d} a_{i_1 \dots i_n} x_0^{i_0} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Damit gilt nun: Sei $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge mit

$$I(V) = (f_1, \dots, f_r).$$

Seien $g_1, \dots, g_s \in \overline{K}[x_0, \dots, x_n]$ homogene Polynome mit

$$(f^* : f \in I(V)) = (g_1, \dots, g_s).$$

Dann ist

$$\overline{V} = \{g_1 = \dots = g_s = 0\}.$$

Im Allgemeinen gilt nur

$$\overline{V} \subseteq \{f_1^* = \dots = f_r^* = 0\}.$$

Beispiel: Für $V = \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{A}^2$ gilt

$$I(V) = (x, y - x^2).$$

Die Homogenisierung von x und $y - x^2$ ist x_1 und $x_0x_2 - x_1^2$ und

$$\{x_1 = 0, x_0x_2 - x_1^2 = 0\} = \{(1:0:0), (0:1:0\} \supsetneq \overline{V} = \{(1:0:0)\}.$$

Satz.
1. *Ist V eine affine Varietät, so ist $\overline{V}$ eine projektive Varietät und $V = \overline{V} \cap \mathbb{A}^n$. Ist V über K definiert, so auch $\overline{V}$.*
2. *Ist W eine projektive Varietät, so ist entweder $W \cap \mathbb{A}^n = \emptyset$ oder $W \cap \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $W = \overline{W \cap \mathbb{A}^n}$. Ist W über K definiert, so auch $W \cap \mathbb{A}^n$.*

Auf diese Weise definiert jede affine Varietät eindeutig eine projektive Varietät. Oft werden wir projektive Varietäten V durch affine Gleichungen angeben, weil dies etwas einfacher aussieht. Die Punkte $V \cap H_0$ heißen auch unendlich ferne Punkte der Varietät.

Die Dimension einer projektiven Varietät wird definiert wie im affinen Fall.

Definition. *Sei V/K eine projektive Varietät. Wähle $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $V \cap \mathbb{A}^n \neq \emptyset$. Der* **Funktionenkörper von** *V wird definiert als*

$$K(V) = K(V \cap \mathbb{A}^n).$$

(Eine andere Wahl von $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ liefert kanonisch isomorphe Körper.)

Bemerkung: Man kann den Funktionenkörper $K(V)$ einer projektiven Varietät auch noch etwas anders definieren, nämlich als Menge aller Quotienten $\frac{f(x_0,\dots,x_n)}{g(x_0,\dots,x_n)}$ homogener Polynome gleichen Grades mit $g \notin I(V)$ und der Relation $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ genau dann, wenn $f_1g_2 - f_2g_1 \in I(V)$.

Definition. *Sei V eine projektive Varietät und $P \in V$. Wähle $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $P \in \mathbb{A}^n$. (Dann ist $V \cap \mathbb{A}^n$ eine offene Umgebung von P in V.)*

(1) *P heißt singulärer Punkt von V, falls P singulärer Punkt von $V \cap \mathbb{A}^n$ ist; andernfalls nichtsingulär oder glatt.*
(2) *Der lokale Ring von V in $P \in V$ ist der lokale Ring von $V \cap \mathbb{A}^n$ in P. Er besteht aus allen Funktionen aus $\overline{K}(V)$, die in P definiert sind.*

Bemerkung: Ist $V = \{f(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^n$, wo f ein irreduzibles homogenes Polynom ist, so ist die Menge der Singularitäten von V gegeben durch

$$V_{\text{sing}} = \{f = \frac{\partial f}{\partial x_0} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0\}.$$

Für homogene Polynome gilt die Eulersche Relation

$$d \cdot f = \sum_{i=0}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn d der Grad von f ist. Hat also d nichts mit der Charakteristik von K zu tun, so kann man auf die Gleichung f in V_{sing} verzichten.

Der folgende Satz gibt einen fundamentalen Unterschied zwischen affinen und projektiven Varietäten an:

SATZ. (1) *Ist $V \subseteq \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät und $f \in \overline{K}(V)$ eine Funktion, die in allen Punkten $P \in V$ definiert ist, dann ist $f \in \overline{K}[V]$.*
(2) *Ist $W \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und $g \in \overline{K}(V)$ eine Funktion, die in allen Punkten $P \in W$ definiert ist, dann gilt $g \in \overline{K}$.*

Beispiele:

(1) Eine Funktion f, die in allen Punkten von $\mathbb{A}^1$ definiert ist, ist eine Polynomfunktion: $f \in \overline{K}[\mathbb{A}^1] = \overline{K}[x]$.
(2) Eine Funktion f, die in allen Punkten von $\mathbb{P}^1$ definiert ist, ist konstant: $f \in \overline{K}$.

3. Produkte von Varietäten

Was sind die algebraischen Teilmengen von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$?

DEFINITION. *Ein Polynom $f \in \overline{K}[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n]$ heißt bihomogen vom Grad (d, e) bzgl. $x_0, \dots, x_m$ und $y_0, \dots, y_n$, wenn es die Gestalt*

$$f = \sum_{i_0+\cdots+i_m=d} \sum_{j_0+\cdots+j_n=e} a_{i_0\dots i_m j_0\dots j_n} x_0^{i_0} \dots x_m^{i_m} y_0^{j_0} \dots y_n^{j_n}$$

hat. D.h. f ist homogen vom Grad d in den Variablen x_i und homogen vom Grad e in den Variablen y_j.

DEFINITION. *Auf $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ nennen wir eine Menge abgeschlossen oder algebraisch, falls sie Nullstellenmenge bihomogener Polynome $f_\ell(x, y)$ ist. Dies induziert eine Topologie, die wir wieder Zariski-Topologie nennen.*

Bemerkungen:

(1) Analog werden Produkte zwischen projektiven und affinen Varietäten definiert.
(2) Die Zariski-Topologie auf $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ ist nicht die Produkttopologie.

4. Abbildungen zwischen Varietäten

Definition. *Seien V und W projektive Varietäten, $W \subseteq \mathbb{P}^n$. Eine* **rationale Abbildung** $\phi : V \to W$ *wird gegeben durch Funktionen $f_i \in \overline{K}(V)$, nicht alle 0, durch*

$$\phi = (f_0 : \cdots : f_n)$$

mit der Eigenschaft $F(f_0, \ldots, f_n) = 0$ für alle $F \in I(W)$. ϕ heißt definiert in $P \in V$, falls es eine Funktion $g \in \overline{K}(V)$ gibt mit der Eigenschaft:

- *Alle gf_i sind definiert in P,*
- *für mindestens ein i ist $(gf_i)(P) \neq 0$.*
- *Dann setzt man*

$$\phi(P) = ((gf_0)(P) : \cdots : (gf_n)(P)).$$

Sind V und W über K definiert, so heißt ϕ definiert über K, falls die $f_i \in K(V)$ gewählt werden können.

Beispiel: Wir betrachten $X \subseteq \mathbb{P}^2$ gegeben durch die Gleichung $2x^2 + 3y^2 - 5 = 0$, d.h.

$$X = \{2x_1^2 + 3x_2^2 = 5x_0^2\}.$$

Affine Koordinaten führen wir ein durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y) = (u : 1 : v), \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad u = \frac{x_0}{x_1}, \quad v = \frac{x_2}{x_1}.$$

Dann sind $x, y, u, v \in K(X)$ und $x = \frac{1}{u}, y = \frac{v}{u}$. Wir definieren die rationale Abbildung $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ durch

$$\phi = (1 : \frac{y-1}{x-1}).$$

Wegen $\phi = (x - 1 : y - 1)$ ist ϕ sicher definiert in der offenen Menge $\{x_0 \neq 0\} \setminus \{(1 : 1 : 1)\}$. Wegen $\phi = (1 - u : v - u)$ ist ϕ auch in der offenen Menge $\{x_1 \neq 0\} \setminus \{(1 : 1 : 1)\}$ definiert. Es bleibt jetzt nur noch das Verhalten im Punkt $(1 : 1 : 1)$ zu untersuchen. Im Funktionenkörper $K(X)$ gilt $2x^2 + 3y^2 = 5$ und damit $3(y^2 - 1) = -2(x^2 - 1)$, was sofort

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{(y-1)(y+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(y+1)} = \frac{(y^2-1)(x+1)}{(x^2-1)(y+1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{x+1}{y+1},$$

und damit

$$\phi = (1 : -\frac{2}{3} \cdot \frac{x+1}{y+1}) = (3(y+1) : -2(x+1))$$

liefert. Damit ist ϕ auch in $(1 : 1 : 1)$ definiert mit Wert $(1 : -\frac{2}{3})$.

Beispiel: Sei $X \subseteq \mathbb{P}^2$ definiert durch $y^2 = x^3$, d.h. $X = \{x_0 x_2^2 = x_1^3\}$. Wir definieren eine rationale Abbildung $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ durch $\phi = (1 : \frac{y}{x})$. Schreibt man

$$\phi = (1 : \frac{y}{x}) = (x : y) = (x_1 : x_2),$$

dann sieht man, dass ϕ außerhalb des Punktes $(0, 0)$ definiert ist. Wir wollen untersuchen, was in diesem Punkt passiert.

- Zunächst ist schnell klar, dass gilt, dass sich jedes Element des Funktionenkörpers als $\frac{a(x)+b(x)y}{c(x)}$ schreiben lässt. Wählt man a, b, c teilerfremd, so ist diese Darstellung eindeutig.
- Sei $f = \frac{a+by}{c}$ gekürzt dargestellt. f ist genau dann in P definiert, falls $c(0) \neq 0$ ist.
- Angenommen, ϕ wäre auch in $(0, 0)$ definiert. Dann gäbe es ein g im Funktionenkörper, so dass g und $g\frac{y}{x}$ in $(0, 0)$ definiert sind und dort nicht beide den Wert 0 haben. Wir können also schreiben $g = \frac{a+by}{c}$ mit $c(0) \neq 0$. Dann hat man

$$g\frac{y}{x} = \frac{ay + by^2}{xc} = \frac{x^3 b + ay}{xc}.$$

  Da dies in $(0, 0)$ definiert sein soll, ist $a(0) = 0$, d.h. $a = xd$ mit einem Polynom d. Dann gilt:

$$g = \frac{xd + by}{c}, \quad g\frac{y}{x} = \frac{x^2 b + y}{c}.$$

  Beide sind in $(0, 0)$ definiert, aber beide nehmen den Wert 0 an, ein Widerspruch.

Also ist ϕ in $(0,0)$ nicht definiert.

Bemerkung: Seien V, W projektive Varietäten, die über K definiert, und $\phi : V \to W$ eine rationale Abbildung gegeben durch $\phi = (f_0 : \cdots : f_n)$. Dann operiert G_K auf ϕ durch $\sigma\phi = (\sigma f_0 : \cdots : \sigma f_n)$. Genau dann ist ϕ über K definiert, falls $\sigma\phi = \phi$ für alle $\sigma \in G_K$ gilt.

Bemerkung: Da wir uns die Elemente des Funktionenkörpers auch als Quotienten homogener Polynome gleichen Grades vorstellen können, können wir auch schreiben

$$\phi = (g_0(x_0, \ldots, x_m) : \cdots : g_n(x_0, \ldots, x_m)),$$

wo g_i homogene Polynome gleichen Grades sind, aber nicht alle in $I(V)$ liegen.

Beispiel: Wir betrachten die rationale Abbildung $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$, die durch $\phi = (x : y)$ gegeben ist. Schreiben wir $x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0}$, so wird $\phi = (x_1 : x_2)$. ϕ ist in allen Punkten von $\mathbb{P}^2$ außer in $(1:0:0)$ definiert. Was passiert geometrisch? Die Geraden durch $(1:0:0)$ haben die Gestalt $x_2 = \lambda x_1$ oder $x_1 = 0$. Was macht ϕ mit den Punkten? Ein Punkt auf $x_2 = \lambda x_1$ wird abgebildet auf $(1 : \lambda)$, ein Punkt auf $x_1 = 0$ auf $(0:1)$. Es ist klar, dass ϕ in $(1:0:0)$ nicht definiert werden kann.

Beispiel: (Projektionen) Eine rationale Abbildung der Form

$$\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n-1}, \quad (x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (x_0 : \cdots : x_{n-1})$$

nennt man Projektion.

LEMMA. *Sei $\phi : V \to W$ eine rationale Abbildung zwischen projektiven Varietäten. Dann ist $U = \{P \in V : \phi \text{ definiert in } P\}$ eine offene Teilmenge von V.*

Beweis: Sei $P \in U$ und $\phi = (f_0 : \cdots : f_n)$, wo f_i homogene Polynome sind, mit $f_j(P) \neq 0$. Dann ist ϕ dadurch auch in der offenen Umgebung $\{f_j \neq 0\} \cap V$ von P definiert, woraus sofort die Behauptung folgt. ■

DEFINITION.
(1) *Eine rationale Abbildung $\phi : V \to W$ zwischen projektiven Varietäten heißt* **Morphismus**, *wenn ϕ in allen Punkten von V definiert ist.*
(2) *Ein Morphismus $\phi : V \to W$ heißt Isomorphismus, falls es einen Morphismus $\psi : W \to V$ gibt, so dass $\phi\psi$ und $\psi\phi$ jeweils die Identität sind.*
(3) *Sind V und W über K definiert, so heißen V und W über K* **isomorph**, *falls über K definierte Morphismen $\phi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ existieren, so dass $\phi\psi$ und $\psi\phi$ jeweils die Identität sind.*

Bemerkung: Da wir affine Varietäten projektiv abschließen können, ist klar, wie man rationale Abbildungen und Morphismen auch für affine Varietäten definiert.

Projektiver Koordinatenwechsel: Sei $T \in \mathrm{GL}_{n+1}(\overline{K})$. Dann induziert T eine lineare Abbildung des $\overline{K}^{n+1}$, die einen Automorphismus des $\mathbb{P}^n$ liefert. Man nennt dies einen Koordinatenwechsel. Zwei Teilmengen des $\mathbb{P}^n$ heißen projektive äquivalent, wenn sie durch einen Koordinatenwechsel auseinander hervorgehen.

Für die diophantische Geometrie ist folgender Satz wichtig:

SATZ. *Sind V und W über K definierte projektive Varietäten und $\phi : V \to W$ ein über K definierter Isomorphismus, so induziert ϕ eine Bijektion $V(K) \simeq W(K)$.*

Beweis: ϕ und ϕ^{-1} können also durch Polynome beschrieben werden, die Koeffizienten in K haben. Natürlich werden dann Punkte von $V(K)$ und $W(K)$ ineinander abgebildet. Da aber ϕ bijektiv ist, folgt die Behauptung. ■

Bemerkungen:

(1) Man könnte also eine Aufgabe der diophantischen Geometrie so formulieren: Klassifiziere über K-definierte projektive Varietäten bis auf K-Isomorphie und bestimme jeweils die K-rationalen Punkte.
(2) Ein erster Schritt dazu ist ein Ziel der algebraischen Geometrie: Klassifiziere projektive Varietäten bis auf Isomorphie, wobei hier alles über algebraisch abgeschlossenem Körper zu sehen ist. Allerdings ist auch diese Aufgabe noch zu schwierig.

Beispiel: Sei $X_n \subseteq \mathbb{P}^2$ definiert durch die affine Gleichung $2x^2+3y^2 = n$. Also $X_n = \{2x_1^2+3x_2^2 = nx_0^2\}$. Offensichtlich gilt
$$X_n(\mathbb{Q}) = \{(1 : x : y) : 2x^2 + 3y^2 = n \text{ und } x, y \in \mathbb{Q}\}.$$
Man kann zeigen: $X_1(\mathbb{Q}) = \emptyset$ und $\#X_5(\mathbb{Q}) = \infty$, also sind X_1 und X_5 nicht über $\mathbb{Q}$ isomorph. Andererseits induziert der Koordinatenwechsel
$$\phi((x_0 : x_1 : x_2)) = (\sqrt{5}x_0 : x_1 : x_2)$$
einen Isomorphismus von X_1 mit X_5, der über $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ definiert ist.

Beispiel: Ist C eine über K durch das Polynom
$$f = a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2$$
definierte nichtsinguläre Quadrik, die daher den Punkt $(1 : 0 : 0)$ enthält, so haben wir gesehen, dass durch
$$\phi((u : v)) = (a_3u^2 + a_4uv + a_5v^2 : -u(a_1u + a_2v) : -v(a_1u + a_2v))$$
und
$$\psi((x_0 : x_1 : x_2) = \begin{cases} (x_1 : x_2), \text{ falls } (x_0 : x_1 : x_2) \neq (1 : 0 : 0), \\ (a_2 : -a_1), \text{ falls } (x_0 : x_2 : x_2) = (1 : 0 : 0) \end{cases}$$
zwei zueinander inverse bijektive Abbildungen
$$\phi : \mathbb{P}^1 \to C \quad \text{und} \quad \psi : C \to \mathbb{P}^1$$
definiert werden. Natürlich ist ϕ ein Morphismus, da ϕ durch homogene Polynome vom Grad 2 definiert wird. Was ist mit ψ? Für $(x_0 : x_1 : x_2) \in C$ gilt
$$0 = a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = (a_1x_0 + a_3x_1 + a_4x_2)x_1 + (a_2x_0 + a_5x_2)x_2,$$
und damit
$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ -a_2x_0 - a_5x_2 & a_1x_0 + a_3x_1 + a_4x_2 \end{vmatrix} = 0.$$
Daher ist
$$\psi((x_0 : x_1 : x_2)) = \begin{cases} (x_1 : x_2), & \text{falls } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \\ (-a_2x_0 - a_5x_2 : a_1x_0 + a_3x_1 + a_4x_2), & \text{falls } (-a_2x_0 - a_5x_2, a_1x_0 + a_3x_1 + a_4x_2) \neq (0, 0) \end{cases}$$
wohldefiniert, wobei die zweite Darstellung auch im Punkt $(1 : 0 : 0)$ definiert ist. Also ist auch ψ ein Morphismus. Daher erhalten wir über K definierte Isomorphismen
$$\phi : \mathbb{P}^1 \to C \quad \text{und} \quad \psi : C \to \mathbb{P}^1.$$

Beispiel: Ist C eine über K definierte nichtsinguläre projektive ebene Quadrik und gibt es einen Punkt $P \in C(K)$, so gibt es einen über K definierten Koordinatenwechsel α mit $\alpha(P) = (1 : 0 : 0)$. In den neuen Koordinaten werde die Kurve mit $\widetilde{C}$ bezeichnet. Dann liefert der Koordinatenwechsel einen Isomorphismus
$$\alpha : C \to \widetilde{C} \quad \text{mit} \quad \alpha(P) = (1 : 0 : 0).$$
Wie im vorangegangenen Beispiel findet man nun einen über K definierten Isomorphismus
$$\beta : \widetilde{C} \to \mathbb{P}^1.$$
Setzt man die Isomorphismen zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Satz. *Ist C eine über K definierte nichtsinguläre projektive ebene Quadrik und ist $C(K) \neq \emptyset$, so gibt es einen über K definierten Isomorphismus*

$$\phi : C \to \mathbb{P}^1.$$

Von fundamentaler Bedeutung ist folgender Satz, den wir nicht beweisen werden:

Satz. *Ist X eine projektive Varietät und $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ ein Morphismus, so ist $\phi(X)$ abgeschlossen, d.h. $\phi(X)$ lässt sich in $\mathbb{P}^n$ durch Gleichungen beschreiben.*

Dass dies Aussage im Allgemeinen für affine Varietäten nicht gilt, zeigt folgendes Beispiel:

Beispiel:

(1) Wir betrachten die affine Varietät $X = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : xy = 1\}$ und den Morphismus $\phi : X \to \mathbb{A}^1$ mit $\phi((x,y)) = x$. Offensichtlich ist $\phi(X) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ keine abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{A}^1$.

(2) Dies wird auch nicht anders, wenn man $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ mit $\phi((x,y)) = (1 : x)$ betrachtet. Dann ist $\phi(X) = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0),(0:1)\}$, was auch keine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^1$ ist.

(3) Wir betrachten jetzt den projektiven Abschluss von X im $\mathbb{P}^2$: $Y = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2 : x_1x_2 = x_0^2\}$. Wir haben die 2 Punkte $(0:1:0)$ und $(0:0:1)$ dazu bekommen. Die rationale Abbildung $\phi : Y \to \mathbb{P}^1$ mit

$$\phi = (1 : x) = (1 : \frac{x_1}{x_0}) = (x_0 : x_1) = (x_0^2 : x_0x_1) = (x_2 : x_0)$$

ist ein Morphismus, wie man an den verschiedenen Darstellungen sieht und $\phi((0:1:0)) = (0 : 1)$, $\phi((0:0:1)) = (1:0)$. Damit folgt sofort $\phi(Y) = \mathbb{P}^1$, insbesondere ist $\phi(Y)$ abgeschlossen.

Beispiel: Projektive ebene Quadriken werden definiert durch eine Gleichung

$$f_{(a_0,\ldots,a_5)} = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = 0.$$

Natürlich kann man die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_5$ um einen Skalar abändern ohne zu Quadrik zu ändern. Die Menge der projektiven ebenen Quadriken wird also durch einen $\mathbb{P}^5$ parametrisiert:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^5 & \longrightarrow & \{\text{projektive ebene Quadrik}\}, \\ (a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5) & \mapsto & f_{(a_0,\ldots,a_5)} = a_0x_0^2 + a_1x_0x_1 + a_2x_0x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2 = 0. \end{array}$$

Im $\mathbb{P}^5$ der ebenen Quadriken gibt es die Teilmenge der reduziblen Quadriken:

$$R = \{(a_0 : \cdots : a_5) \in \mathbb{P}^5 : f_{(a_0,\ldots,a_5)} \text{ ist reduzibel}\}.$$

Wir haben gesehen, dass R eine algebraische Teilmenge von $\mathbb{P}^5$ ist:

$$R = \{4a_0a_3a_5 + a_1a_2a_4 - a_0a_4^2 - a_1^2a_5 - a_2^2a_3 = 0\}.$$

Wir wollen dies nochmals anders sehen: Eine Quadrik $f_{(a_0,\ldots,a_5)} = 0$ ist genau dann reduzibel, wenn es $b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2 \in \overline{K}$ gibt mit

$$\begin{array}{rcl} f & = & (b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)(c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2) = \\ & = & b_0c_0x_0^2 + (b_0c_1 + b_1c_0)x_0x_1 + (b_0c_2 + b_2c_0)x_0x_2 + b_1c_1x_1^2 + (b_1c_2 + b_2c_1)x_1x_2 + b_2c_2x_2^2, \end{array}$$

also

$$a_0 = b_0c_0, \quad a_1 = b_0c_1 + b_1c_0, \quad a_2 = b_0c_2 + b_2c_0, \quad a_3 = b_1c_1, \quad a_4 = b_1c_2 + b_2c_1, \quad a_5 = b_2c_2.$$

Definieren wir also ϕ durch

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^5, \\ ((b_0 : b_1 : b_2),(c_0 : c_1 : c_2)) & \mapsto & (b_0c_0 : b_0c_1 + b_1c_0 : b_0c_2 + b_2c_0 : b_1c_1 : b_1c_2 + b_2c_1 : b_2c_2), \end{array}$$

so ist ϕ ein Morphismus mit Bild R.

Beispiel: Wir betrachten nun im $\mathbb{P}^5$ der projektiven ebenen Quadriken die Teilmenge D der Doppelgeraden. Wir haben bereits gesehen, dass sich D durch Gleichungen beschreiben lässt:

$$D = \{4a_0a_3 - a_1^2 = 0, 4a_0a_5 - a_2^2 = 0, 4a_3a_5 - a_4^2 = 0, 2a_0a_4 - a_1a_2 = 0, 2a_1a_5 - a_2$$

Wir geben noch eine andere Darstellung: Eine Quadrik $f_{(a_0,\ldots,a_5)} = 0$ ist genau dann eine Doppelgerade, wenn es $b_0, b_1, b_2 \in \overline{K}$ gibt mit

$$\begin{aligned} f &= (b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2)^2 = \\ &= b_0^2x_0^2 + 2b_0b_1x_0x_1 + 2b_0b_2x_0x_2 + b_1^2x_1^2 + 2b_1b_2x_1x_2 + b_2^2x_2^2, \end{aligned}$$

also

$$a_0 = b_0^2, \quad a_1 = 2b_0b_1, \quad a_2 = 2b_0b_2, \quad a_3 = b_1^2, \quad a_4 = 2b_1b_2, \quad a_5 = b_2^2.$$

Definieren wir also ψ durch

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5, \\ (b_0 : b_1 : b_2) &\mapsto (b_0^2 : 2b_0b_1 : 2b_0b_2 : b_1^2 : 2b_1b_2 : b_2^2), \end{aligned}$$

so ist ψ ein Morphismus mit Bild D. Man kann sich überlegen, dass ψ in Charakteristik $\neq 2$ ein Isomorphismus ist mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1}((a_0 : a_1 : a_2 : a_3 : a_4 : a_5)) = \begin{cases} (2a_0 : a_1 : a_2), & \text{falls } (2a_0, a_1, a_2) \neq 0, \\ (a_1 : 2a_3 : a_4), & \text{falls } (a_1, 2a_3, a_4) \neq 0, \\ (a_2 : a_4 : 2a_5), & \text{falls } (a_2, a_4, 2a_5) \neq 0. \end{cases}$$

Bevor wir weitermachen, geben wir noch zwei einfache Lemmas an:

Lemma. *Jeder Morphismus ist stetig in der Zariski-Topologie.*

Beweis: Ein Morphismus $\phi : X \to Y$ wird lokal gegeben durch $\phi = (f_0 : \cdots : f_n)$ mit homogenen Polynomen gleichen Grades f_i. Eine abgeschlossene Menge in Y wird gegeben durch homogene Gleichungen $F_1 = \cdots = F_r = 0$. Das Urbild ist dann

$$F_1(f_0, \ldots, f_n) = \cdots = F_r(f_0, \ldots, f_n) = 0,$$

also wieder abgeschlossen. ∎

Lemma. *Sei $\phi : X \to Y$ ein Morphismus und X irreduzibel. Dann ist auch $\phi(X)$ irreduzibel.*

Beweis: Sei $\phi(X) = Z_1 \cup Z_2$ mit (in $\phi(X)$) abgeschlossenen Mengen Z_1, Z_2. Dann ist $X = \phi^{-1}(Z_1) \cup \phi^{-1}(Z_2)$, also gilt wegen der Irreduzibilität von X für ein i: $X = \phi^{-1}(Z_i)$ und damit $\phi(X) = Z_i$. ∎

Trivialerweise folgt damit:

Folgerung. *Ist X eine projektive Varietät und $\phi : X \to \mathbb{P}^n$ ein Morphismus, so ist $\phi(X)$ eine projektive Varietät.*

Wir beweisen jetzt noch einen Satz, den wir schon zitiert haben.

Satz. *Sei X eine projektive Varietät und $f \in \overline{K}(X)$ eine Funktion, die auf ganz X definiert ist. Dann ist $f \in \overline{K}$.*

Beweis: f liefert eine Funktion $X \to \mathbb{A}^1 \subseteq \mathbb{P}^1$, also einen Morphismus $f : X \to \mathbb{P}^1$. Das Bild ist abgeschlossen, $\neq \mathbb{P}^1$, besteht also aus endlich vielen Punkten, also aus genau einem Punkt $a \in \mathbb{P}^1$, $a \in \mathbb{A}^1$. Also ist f konstant. ∎

Eine etwas allgemeinere Formulierung obiger Aussage ist folgende:

Satz. *Sei $\phi : V \to W$ ein Morphismus zwischen projektiven Varietäten. Dann ist ϕ eine abgeschlossene Abbildung, d.h. abgeschlossene Mengen werden in abgeschlossene abgebildet.*

Beweis: O.E. $V \subseteq \mathbb{P}^m$ und $W \subseteq \mathbb{P}^n$. Sei $Z \subseteq V$ abgeschlossen. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = Z_1 \cup \cdots \cup Z_r$, wo die Z_i abgeschlossen und irreduzibel sind. Also sind die $Z_i \subseteq \mathbb{P}^m$ projektive Varietäten. ϕ induziert natürlich auch Morphismen $\phi : Z_i \to \mathbb{P}^n$. Also ist $\phi(Z_i)$ abgeschlossen und damit auch $\phi(Z) = \phi(Z_1) \cup \cdots \cup \phi(Z_r)$. ■

Definition. *Ein Morphismus $\phi : V \to W$ zwischen projektiven Varietäten heißt eine Einbettung, falls ϕ einen Isomorphismus zwischen V und (der projektiven Varietät) $\phi(V)$ liefert.*

Beispiel: Wir definieren

$$\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3, \quad ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \mapsto (x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1).$$

ϕ ist ein Morphismus und $\phi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) = Q = \{z_0z_3 = z_1z_2\}$. Wir wollen eine Umkehrabbildung finden. Dazu überlegen wir zunächst: Ist $z_0 = 1$, so o.E. $x_0 = y_0 = 1$ und $x_1 = z_2$, $y_1 = z_1$. Wegen

$$(z_0 : z_1) = (z_0z_3 : z_1z_3) = (z_1z_2 : z_1z_3) = (z_2 : z_3)$$

und

$$(z_0 : z_2) = (z_0z_3 : z_2z_3) = (z_1z_2 : z_2z_3) = (z_1 : z_3)$$

setzen wir an: $\psi : Q \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ mit

$$\psi = ((z_0 : z_2), (z_0 : z_1)) = ((z_0 : z_2), (z_2 : z_3)) = ((z_1 : z_3), (z_0 : z_1)) = ((z_1 : z_3), (z_2 : z_3)).$$

Offensichtlich ist auch ψ ein Morphismus und man rechnet schnell nach, dass $\phi\psi$ und $\psi\phi$ jeweils die Identität sind. Also ist $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ isomorph zur Quadrik Q im $\mathbb{P}^3$.

Dieses Beispiel verallgemeinert sich wie folgt:

Satz. *Definiert man $\phi : \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{mn+m+n}$ durch*

$$((x_0 : \cdots : x_m), (y_0 : \cdots : y_n)) \mapsto (x_0y_0 : \cdots : x_0y_n : \cdots : x_my_0 : \cdots : x_my_n),$$

so ist ϕ eine Einbettung, die sogenannte Segre-Einbettung. Insbesondere ist $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät.

Wir wollen nochmals rationale Abbildungen betrachten. Da rationale Abbildungen nicht überall definiert sein müssen, kann man nicht allgemein eine Komposition definieren.

Definition. *Sei $\phi : V \to W$ eine rationale Abbildung mit maximaler Definitionsmenge U. Wir sagen, ϕ ist generisch surjektiv, falls $\phi(U)$ dicht in W liegt.*

Beispiel: Wir betrachten die rationale Abbildung $\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ mit

$$\phi = (\frac{1}{x_0} : \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2}) = (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

ϕ ist eine sogenannte quadratische Transformation der Ebene. ϕ ist generisch surjektiv und $\phi \circ \phi = id$. Was passiert geometrisch? ϕ ist nicht definiert in den 3 Punkten $(1 : 0 : 0), (0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)$. Die Gerade $x_0 = 0$ wird auf $(1 : 0 : 0)$ zusammengezogen, $x_1 = 0$ auf $(0 : 1 : 0)$, $x_2 = 0$ auf $(0 : 0 : 1)$.

Der folgende Satz Identitätssatz für rationale Abbildungen wird oft benutzt.

Satz. *Seien $\phi_1, \phi_2 : X \to Y$ zwei rationale Abbildungen zwischen projektiven Varietäten mit maximaler Definitionsmenge U_1 und U_2. Stimmen ϕ_1 und ϕ_2 auf einer offenen Teilmenge $U \neq \emptyset$ überein, so gilt schon $\phi_1 = \phi_2$.*

Beweisidee: $U_1 \cap U_2 \cap \{\phi_1 \neq \phi_2\}$ ist eine offene Menge, $U \subseteq U_1 \cap U_2 \cap \{\phi_1 = \phi_2\}$ ebenso. Wir wissen, dass je zwei offene nichtleere Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. Wegen $U \neq \emptyset$, folgt also $U_1 \cap U_2 \cap \{\phi_1 \neq \phi_2\} = \emptyset$, d.h. ϕ_1 und ϕ_2 stimmen auf $U_1 \cap U_2$ überein. Dann kann man aber ϕ_1 auch auf $U_1 \cup U_2$ fortsetzen. Also folgt $U_1 = U_2$ und damit die Behauptung. ■

Man hätte diesen Satz auch mit folgenden Lemma beweisen können.

Lemma. *Ist X eine projektive Varietät und $f, g \in \overline{K}(X)$ zwei Funktionen, die auf einer offenen nichtleeren Menge U übereinstimmen, dann gilt schon $f = g$ (im Funktionenkörper).*

Beweis: Es genügt, $U \subseteq X \cap \mathbb{A}^n$ zu betrachten. Wir schreiben $f = \frac{f_1(x_1,\ldots,x_n)}{f_2(x_1,\ldots,x_n)}$ und $g = \frac{g_1(x_1,\ldots,x_n)}{g_2(x_1,\ldots,x_n)}$ als Quotient von Polynomen. Dann gilt auf U auch $f_1g_2 - f_2g_1 = 0$. Nun definiert $f_1g_2 - f_2g_1 \neq 0$ eine offene Menge in $X \cap \mathbb{A}^n$. Da je zwei offene nichtleere Mengen einen nichttrivialen Durchschnitt haben, muss $f_1g_2 - f_2g_1 \neq 0$ die leere Menge sein. Also gilt $f = g$ im Funktionenkörper. ■

Definition. *Zwei projektive Varietäten heißen birational äquivalent über $\overline{K}$, falls es generisch surjektive rationale Abbildungen $\phi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ gibt, so dass die rationalen Abbildungen $\phi\psi$ und $\psi\phi$ jeweils die Identität sind.*

Natürlich sind isomorphe projektive Varietäten auch birational äquivalent. Die birationale Äquivalenz ist aber i.a. eine gröbere Klassifizierung. Eine wesentliche Aufgabe der algebraischen Geometrie ist die Klassifizierung projektiver Varietäten bis auf birationale Äquivalenz.

Beispiel: Natürlich sind $\mathbb{A}^2$ und $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ isomorph. Wie steht dies mit $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$? Wir definieren rationale Abbildungen

$$\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, \quad ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) \mapsto (1 : \frac{x_1}{x_0} : \frac{y_1}{y_0}) = (x_0y_0 : y_0x_1 : x_0y_1)$$

und

$$\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \quad (z_0 : z_1 : z_2) \mapsto ((1 : \frac{z_1}{z_0}), (1 : \frac{z_2}{z_0})) = ((z_0 : z_1), (z_0 : z_2)).$$

Dann gilt $\psi\phi = id$ und $\phi\psi = id$, also sind $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^2$ birational äquivalent. Man kann zeigen, dass $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ und $\mathbb{P}^2$ nicht isomorph sind: Auf $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ gibt es Kurven, die sich nicht schneiden, z.B. $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ und $\{1\} \times \mathbb{P}^1$, auf $\mathbb{P}^2$ schneiden sich dagegen je zwei Kurven in mindestens einem Punkt.

Beispiel: $X \subseteq \mathbb{P}^2$ werde definiert durch $y^2 = x^3$, d.h. $X = \{x_0x_2^2 = x_1^3\}$. Dann haben wir gesehen, dass $\phi : X \to \mathbb{P}^1$ mit $\phi = (1 : \frac{y}{x})$ eine rationale Abbildung ist, die im Punkt $(1 : 0 : 0)$ nicht definiert ist. Sei $\psi : \mathbb{P}^1 \to X$ mit $\psi = (1 : t^2 : t^3)$. Man rechnet nach, dass ψ ein Morphismus ist. Außerdem gilt: $\phi\psi = id$, $\psi\phi = id$, d.h. X ist birational äquivalent zu $\mathbb{P}^1$. Allerdings ist X nicht isomorph zu $\mathbb{P}^1$. (X hat eine Singularität.)

Die Beispiele deuten schon einen Sachverhalt an, den wir ohne Beweis angeben:

Satz. *Seien X und Y birational äquivalente projektive Varietäten. Dann gibt es nichtleere offene Teilmengen $U_X \subseteq X$, $U_Y \subseteq Y$, die isomorph sind.*

Wir stellen nun noch eine Verbindung zur Algebra her: Seien $X \subseteq \mathbb{P}^m$ und $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ projektive Varietäten.

- Haben wir auf $\mathbb{P}^m$ die Koordinaten x_i, auf $\mathbb{P}^n$ die Koordinaten y_j, so können wir uns die Funktionenkörper denken als $K(X) = K(x_1, \ldots, x_m)$ und $K(Y) = K(y_1, \ldots, y_n)$ mit Relationen zwischen den x_i's und den y_j's.
- Sei $\phi : X \to Y$ eine generisch surjektive (rationale) Abbildung. Dann liefert

  $$\phi^* : K(Y) \to K(X), \quad f \mapsto f \circ \phi$$

  einen Körperhomomorphismus, der K festlässt. Er ist dadurch festgelegt, dass man die $\phi^*(y_j)$'s kennt. ϕ^* ist (als Körperhomomorphismus) injektiv.
- Davon gilt nun auch die Umkehrung: Sei

  $$\alpha : K(Y) \to K(X)$$

  ein Körperhomomorphismus, der K in sich überführt. Sei $\alpha(y_i) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ mit $f_i \in K(X)$. Dann gibt es eine rationale Abbildung $\phi : X \to Y$ mit

  $$\phi = (1 : f_1 : \cdots : f_n).$$

- Wieso ist ϕ generisch surjektiv? Sei F ein Polynom mit $F(f_1, \dots, f_n) = 0$, also $\alpha(F(y_1, \dots, y_n)) = 0$ und damit $F(y_1, \dots, y_n) = 0$. Dies liefert $F \in I(Y)$, also eine Relation, die trivialerweise erfüllt sein muss. Daher ist ϕ generisch surjektiv.
- Was ist ϕ^*? Dazu bestimmen wir die Urbilder der Koordinatenfunktionen y_j. Wegen $\phi = (1 : f_1 : \cdots : f_n)$ ist $\phi^*(y_j) = f_j$. Also $\phi^*(y_j) = \alpha(y_j)$. Da die y_j's den Funktionenkörper erzeugen, folgt $\phi^* = \alpha$.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Satz. *Für projektive Varietäten X und Y gibt es eine Bijektion*

$$\{\phi : X \to Y \text{ generisch surjektiv }\} \simeq \{\alpha : \overline{K}(Y) \to \overline{K}(X) \text{ Körperhomomorphismus mit } \alpha|_{\overline{K}} = id|_{\overline{K}}\}$$

vermöge $\alpha = \phi^*$.

Beispiel: Sei C eine irreduzible projektive Kurve. Jede rationale Abbildung $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ ist gegeben durch $\phi = (f_0 : f_1)$ mit $f_0, f_1 \in \overline{K}(C)$. O.E. ist $f_0 \neq 0$. Mit $f = \frac{f_1}{f_0}$ kann man dann auch $\phi = (1 : f)$ schreiben. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- ϕ ist konstant, d.h. $f \in \overline{K}$.
- ϕ ist nicht konstant, d.h. $f \in \overline{K}(C) \setminus \overline{K}$. Dann ist ϕ generisch surjektiv. Hat man auf $\mathbb{P}^1$ die Koordinaten $(1 : t)$, so ist ϕ^* gegeben durch
$$\overline{K}(t) \to \overline{K}(C), \quad t \mapsto f.$$
Umgekehrt schaut hat natürlich auch jeder Körperhomomorphismus $\overline{K}(t) \to \overline{K}(C)$, der $\overline{K}$ festlässt, so aus.

Beispiel: Sei $F_n \subseteq \mathbb{P}^2$ gegeben durch $x^n + y^n = 1$. Der Funktionenkörper von F_n ist

$$\overline{K}(F_n) = \overline{K}(x, y) \text{ mit } x^n + y^n = 1.$$

Auf $\mathbb{P}^1$ wählen wir Koordinaten $(1 : t)$. Dann ist der Funktionenkörper von $\mathbb{P}^1$ einfach $\overline{K}(t)$. Wir suchen eine nichtkonstante (also generisch surjektive) rationale Abbildung $\phi : \mathbb{P}^1 \to F_n$.
Algebraische Interpretation: Wir suchen einen $\overline{K}$ festlassenden Körperhomomorphismus

$$\alpha : \overline{K}(x, y) \to \overline{K}(t) \text{ (mit)} x^n + y^n = 1.$$

$\alpha(x)$ und $\alpha(y)$ sind dann rationale Funktionen in t mit $(\alpha(x))^n + (\alpha(y))^n = 1$. Da $\overline{K}$ fest bleibt, sind $\alpha(x)$ und $\alpha(y)$ nicht konstant. Wir setzen an $\alpha(x) = \frac{f}{h}, \alpha(y) = \frac{g}{h}$ und erhalten dann die Bedingung $f^n + g^n = h^n$, wobei wir also f, g, h als paarweise teilerfremde Polynome in t annehmen können, die nicht alle konstant sind.
Geometrische Interpretation: Wir suchen Polynome f, g, h in t mit $\phi = (h : f : g)$. Da das Bild von ϕ in C liegen soll, muss gelten $f^n + g^n = h^n$. Wir können annehmen, dass f, g, h paarweise teilerfremd sind. Da ϕ nicht konstant sein soll, sollen f, g, h nicht alle konstant sein.
Behauptung: Für $n \geq 3$ und $char(K) = 0$ gibt es keine solchen Polynome.
Beweis: Wir nehmen an, wir haben eine nichttriviale Relation $f^n + g^n = h^n$. Insbesondere sind alle $f, g, h \neq 0$. Differenzieren liefert $nf^{n-1} \cdot f' + ng^{n-1} \cdot g' = nh^{n-1} \cdot h'$. Wir schreiben dies in Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{n-1} \\ g^{n-1} \\ -h^{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Als Grundkörper haben wir jetzt $\overline{K}(t)$. Sei

$$M = \begin{pmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssytem $M \cdot X = 0$ hat immer die Lösung

$$\left(\begin{vmatrix} g & h \\ g' & h' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} h & f \\ h' & f' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} \right).$$

1. Fall: Der Rang von M ist 1. Dann müssen obige Unterdeterminanten 0 sein. Also $fg' = f'g$ etc. Da f und g teilerfremd sind, folgt $f|f'$, was aus Gradgründen sofort $f' = 0$ impliziert, also $f \in \overline{K}$. Genauso

folgt $f, g, h \in \overline{K}$, ein Widerspruch.
2. Fall: M hat Rang 2. Dann hat das Gleichungssystem $M \cdot X = 0$ einen 1-dimensionalen Lösungsraum, also gibt es teilerfremde Polynome $r(t), s(t)$ mit

$$f^{n-1} = \frac{r}{s} \begin{vmatrix} g & h \\ g' & h' \end{vmatrix}, \; g^{n-1} = \frac{r}{s} \begin{vmatrix} h & f \\ h' & f' \end{vmatrix}, \; -h^{n-1} = \frac{r}{s} \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix}.$$

Bringt man s auf die andere Seite, so sieht man sofort $r | f^{n-1}, g^{n-1}, h^{n-1}$, und da f, g, h teilerfremd sind: $r \in \overline{K}$, also o.E. $r = 1$. Jetzt folgt

$$f^{n-1} | (gh' - g'h), \; g^{n-1} | (hf' - h'f), \; h^{n-1} | (fg' - f'g).$$

Wir wollen jetzt die Grade vergleichen. Setzt man a, b, c für den Grad von f, g, h, so folgt

$$(n-1)a \leq b + c - 1, \quad (n-1)b \leq c + a - 1, \quad (n-1)c \leq a + b - 1,$$

oder auch

$$na, nb, nc \leq a + b + c - 1.$$

Setzt man $d = \max(a, b, c)$, so ist $d \geq 1$ und $nd \leq 3d - 1$, also $n \leq 2$, ein Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist die Behauptung bewiesen. ∎
Bemerkung: Für $n = 1$ kann man $f = t, g = 1 - t, h = 1$ wählen, für $n = 2$:

$$f = 2t, \quad g = t^2 - 1, \quad h = t^2 + 1.$$

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt sofort:

SATZ. *Zwei projektive Varietäten V und W sind genau dann birational äquivalent über $\overline{K}$, falls die Funktionenkörper $\overline{K}(V)$ und $\overline{K}(W)$ über $\overline{K}$ isomorph sind.*

FOLGERUNG. *Jede projektive Varietät V der Dimension d ist birational äquivalent zu einer Hyperfläche $f = 0$ im $\mathbb{P}^{d+1}$. Ist V über K definiert, so kann auch $f = 0$ und die birationale Äquivalenz über K definiert werden.*

Beweis: Der Funktionenkörper $K(V)$ hat Transzendenzgrad d über K. Dann gibt es algebraisch unabhängige Elemente $t_1, \ldots, t_d \in K(V)$, so dass $K(V)$ eine endliche (algebraische) Erweiterung von $K(t_1, \ldots, t_d)$ ist. Da K als vollkommen vorausgesetzt wurde, kann man es so einrichten, dass $K(V)$ über $K(t_1, \ldots, t_d)$ separabel ist (Lang. S.365). Also gibt es ein $u \in K(V)$ mit $K(V) = K(t_1, \ldots, t_d, u)$. Außerdem besteht eine algebraische Relation $f(t_1, \ldots, t_d, u) = 0$ (Polynom mit Koeffizienten aus K), wobei das Polynom f irreduzibel gewählt werden kann. Der Funktionenkörper der Hyperfläche

$$f(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) = 0$$

im $\mathbb{P}^{d+1}$ ist $\mathrm{Quot}(K[x_1, \ldots, x_{d+1}]/(f))$, also $K(V)$. Nach unserem Satz ist also V birational äquivalent zu der Hyperfläche $f = 0$. ∎

FOLGERUNG. *Jede irreduzible projektive Kurve ist birational äquivalent zu einer ebenen Kurve $\{f(x_0, x_1, x_2) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^2$.*