Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 8 (5.6.2024-12.6.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P36: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper der Polynome $x^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$, über $\mathbb{Q}$. Zeige:

(1) $K = \mathbb{Q}(\{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\})$.

(2) Für jeden Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(K|\mathbb{Q})$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\varepsilon(\sigma, n) \in \{\pm 1\}$ mit

$$\sigma(\sqrt{n}) = \varepsilon(\sigma, n)\sqrt{n}.$$

(3) $\mathrm{Aut}(K|Q)$ ist eine abelsche Gruppe.

(4) Jedes von id_K verschiedene Element von $\mathrm{Aut}(K|\mathbb{Q})$ hat Ordnung 2.

Aufgabe P37: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

(1) Bestimme alle Körperhomomorphismen $K \to \mathbb{C}$.

(2) Zeige, dass $K|\mathbb{Q}$ normal ist.

(3) Zu welcher Gruppe mit 4 Elementen ist $\mathrm{Aut}(K|\mathbb{Q})$ isomorph?

Aufgabe P38: Sei $K = \mathbb{F}_2(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{F}_2[t]$. Sei $\xi \in \overline{K}$ mit

$$\xi^4 + \xi^2 + t = 0.$$

(1) Zeige: $[K(\xi) : K] = 4$.

(2) Zeige: $K(\xi)|K$ ist eine normale Erweiterung.

(3) Bestimme $\mathrm{Aut}(K(\xi)|K)$.

(4) Bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung $K(\xi)|K$.

Aufgabe P39: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei $\alpha = \sqrt{10 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(1) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha)|Q$ eine normale Körpererweiterung ist.

(2) Bestimme alle Elemente von $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ durch Angabe von $\sigma(\alpha)$.

(3) Zeige, dass $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 4 ist.

(Die Zahl α kam schon in Aufgabe P10 vor. Es ist sinnvoll, die Ergebnisse von Aufgabe P10 benutzen.)

Aufgabe P40: Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ bilden die n Punkte

$$P_{n,j} = \left(\cos(\frac{2\pi}{n} \cdot j), \sin(\frac{2\pi}{n} \cdot j)\right), \quad j = 0, \ldots, n-1,$$

die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks A_n. Die Punkte liegen auf dem Einheitskreis und es ist $P_{n,0} = (1, 0)$.

(1) Zeige: Kann man den Punkt $(\cos(\frac{2\pi}{n}), 0)$ aus $\{(0,0), (1,0)\}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren, so kann man auch das regelmäßige n-Eck A_n mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0), (1,0)\}$ konstruieren.

(2) Warum kann man A_3, A_4 und A_6 mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0), (1,0)\}$ konstruieren?

(Die Ergebnisse von Aufgabe P27 dürfen benutzt werden.)

Datei: kt_u8.tex. Version vom 3.6.2024

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H22: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper der Polynome $x^2 - n$, $n \in \mathbb{N}$, und $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper der Polynome $x^2 + n$, $n \in \mathbb{N}$.

(1) Zeige: $K \subseteq L$.
(2) Zeige: $L|K$ ist algebraisch vom Grad 2 und normal.
(3) Bestimme $\mathrm{Aut}(L|K)$.

Aufgabe H23: Sei $N = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.

(1) Zeige, dass $N|\mathbb{Q}$ eine normale Körpererweiterung ist.
(2) Zeige, dass N die normale Hülle der Erweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})|\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe H24:

(1) Konstruiere mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ zwei Punkte mit Abstand $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
(2) Konstruiere mit Zirkel und Lineal aus $\{(0,0),(1,0)\}$ das in Aufgabe P40 definierte regelmäßige 5-Eck A_5. (Es darf verwendet werden, dass $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ gilt.)

(Die Ergebnisse der Aufgaben P27 und P40 dürfen benutzt werden.)

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 12.6.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen