Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 3 (1.5.2024-8.5.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P11: (Staatsexamensaufgabe) Betrachten Sie den Körper $K := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{3}, \sqrt{7})$.

a) Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ für $\alpha = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt{7}$.
b) Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset K$.
c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe P12: (Teil einer Staatsexamensaufgabe) Es sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3}, i)$.
Bestimmen Sie den Grad der Körpererweiterung $[K : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe P13: Das Polynom $f = x^4 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ ist irreduzibel. Sei $K = \mathbb{F}_2[x]/(f) = \mathbb{F}_2(\alpha)$, wobei α das Bild von x unter der natürlichen Abbildung $\mathbb{F}_2[x] \to \mathbb{F}_2[x]/(f)$ ist. Insbesondere gilt $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$.

(1) (Teil einer Staatsexamensaufgabe) Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2]$ in den beiden Fällen $\beta = \alpha + 1$ und $\beta = \alpha^3 + 1$.
(2) Bestimme den Grad $[\mathbb{F}_2(\gamma) : \mathbb{F}_2]$ für $\gamma = \alpha^2 + 1$.
(3) Bestimme den Grad $[\mathbb{F}_2(\delta) : \mathbb{F}_2]$ für $\delta = \alpha^2 + \alpha$.

Aufgabe P14:

(1) Sei $L|K$ eine Körpererweiterung, seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in L$ algebraisch über K vom Grad 2, d.h. $[K(\alpha_i) : K] = 2$ für $i = 1, \dots, n$. Zeige, dass gilt
$$[K(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : K] \mid 2^n.$$
(2) (Staatsexamensaufgabe) Zeigen Sie durch Gradbetrachtung einer geeigneten Erweiterung von $\mathbb{Q}$, daß der Grad des Minimalpolynoms der komplexen Zahl
$$z := \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + i\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{7} + i\sqrt{7}}$$
über $\mathbb{Q}$ ein Teiler von 32 ist.

Aufgabe P15: (Staatsexamensaufgabe) Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, und es seien $\alpha, \beta \in L$, so dass $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ beide algebraisch über K sind.
Zeigen Sie, dass dann auch α und β algebraisch über K sind.

Datei: kt_u3.tex. Version vom 29.4.2024

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H7: Gegeben seien die komplexen Zahlen $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $\beta = \zeta\sqrt[3]{2}$.

(1) Bestimme das Minimalpolynom von ζ über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass $\zeta^3 = 1$ gilt.
(2) Bestimme die Minimalpolynome von α und β über $\mathbb{Q}$.
(3) Zeige: $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$.
(4) Zeige: $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta)$.
(5) Berechne $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$.
(6) Gilt $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$?

Aufgabe H8: (Staatsexamensaufgabe) Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei $a_n := \sqrt[2^n]{2}$. Weiter seien $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $K := \mathbb{Q}(A)$. Zeigen Sie:

(a) $[\mathbb{Q}(a_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_+$
(b) $[K : \mathbb{Q}] = \infty$
(c) $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \mathbb{Q}(a_n)$
(d) K ist eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.

Aufgabe H9: (Staatsexamensaufgabe) Sei $z \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl, also eine solche, die Nullstelle eines von 0 verschiedenen Polynoms aus $\mathbb{Q}[X]$ ist.
Man beweise: Auch $\mathrm{Re}\,(z)$ und $|z|$ sind algebraische Zahlen.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 8.5.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen