1. Partielle Summation
2. Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \frac{1}{n}$
3. Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \log n$
4. Die Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$ und $x \mapsto \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p^k \le x} \frac{\log p}{p^k}$
5. Die Primzahlsummenfunktion $x \mapsto \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}$
6. Die Primzahlsummenfunktion $x \mapsto \sum_{p \le x} \frac{1}{p}$
7. Die Produktfunktion $x \mapsto \prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
8. Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ und das Dirichletsche Teilerproblem
9. Die Anzahl $\omega(n)$ der verschiedenen Primteiler von n

Kapitel 3: Weitere Summenfunktionen

Wir haben die Funktionen

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1, \quad \vartheta(x) = \sum_{p \le x} \log p, \quad \psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p$$

definiert, Verbindungen hergestellt und abgeschätzt. In diesem Kapitel werden weitere Summenfunktionen betrachten.

Abschnitt 3.1: Partielle Summation

Bemerkung: Sind $a(x)$ und $b(x)$ stetig differenzierbare Funktionen für $x \geq 1$, setzt man

$$A(x) = \int_1^x a(t)dt,$$

so ist $A'(x) = a(x)$, $A(1) = 0$ und partielle Integration liefert

$$\int_1^x a(t)b(t)dt = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt.$$

Die Formel des folgenden Satzes bezeichnen wir als **partielle Summation**. Hier ist ist eine Version, wie sie im Folgenden oft gebraucht wird.

Satz (Partielle Summation)

Sei a_n eine Folge komplexer Zahlen und für alle $x \in \mathbb{R}$

$$A(x) = \sum_{n \leq x} a_n.$$

- *Ist $b(x)$ eine für $x \geq 1$ stetig differenzierbare Funktion, so gilt für alle reellen $x \geq 1$*

$$\sum_{n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt.$$

- *Ist $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $a_n = 0$ für alle $n < n_0$ gilt, und ist $b(x)$ eine für $x \geq n_0$ stetig differenzierbare Funktion, so gilt für alle $x \geq n_0$*

$$\sum_{n_0 \leq n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_{n_0}^x A(t)b'(t)dt.$$

(Es ist $A(x) = 0$ für alle $x < n_0$.)

Natürlich ist Teil (1) ein Spezialfall von (2) mit $n_0 = 1$. Wir werden meist Teil (1) benutzen, manchmal reicht dieser aber nicht aus, beispielsweise wenn $b(x)$ für $x = 1$ nicht definiert ist, trotzdem aber $a_1 = 0$ gilt.

Beweis: Da Teil (1) ein Spezialfall von Teil (2) ist, reicht es, wenn wir (2) beweisen. Für $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq n_0$ gilt (unter Verwendung von $A(n_0 - 1) = 0$, $A(x) = A(\lfloor x \rfloor)$ und $A(n) = a_n + A(n-1)$)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{N} a_n b(n) &= \sum_{n=n_0}^{N} (A(n) - A(n-1))b(n) = \sum_{n=n_0}^{N} A(n)b(n) - \sum_{n=n_0}^{N} A(n-1)b(n) = \\
&= \sum_{n=n_0}^{N} A(n)b(n) - \sum_{n=n_0-1}^{N-1} A(n)b(n+1) = \sum_{n=n_0}^{N} A(n)b(n) - \sum_{n=n_0}^{N-1} A(n)b(n+1) = \\
&= A(N)b(N) - \sum_{n=n_0}^{N-1} A(n)(b(n+1) - b(n)) = A(N)b(N) - \sum_{n=n_0}^{N-1} A(n) \int_n^{n+1} b'(t)dt = \\
&= A(N)b(N) - \sum_{n=n_0}^{N-1} \int_n^{n+1} A(t)b'(t)dt = A(N)b(N) - \int_{n_0}^{N} A(t)b'(t)dt.
\end{aligned}$$

Also gilt die Aussage für alle $x \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$. Sei nun $x \geq n_0$ reell. Wir wenden die gerade gezeigte Gleichung auf $N = \lfloor x \rfloor$ an und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n_0 \leq n \leq x} a_n b(n) &= \sum_{n=n_0}^{\lfloor x \rfloor} a_n b(n) = A(\lfloor x \rfloor)b(\lfloor x \rfloor) - \int_{n_0}^{\lfloor x \rfloor} A(t)b'(t)dt = \\
&= A(x)b(\lfloor x \rfloor) - \int_{n_0}^{x} A(t)b'(t)dt + \int_{\lfloor x \rfloor}^{x} A(t)b'(t)dt = \\
&= A(x)b(\lfloor x \rfloor) - \int_{n_0}^{x} A(t)b'(t)dt + A(x)(b(x) - b(\lfloor x \rfloor)) = \\
&= A(x)b(x) - \int_{n_0}^{x} A(t)b'(t)dt,
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Beispiele:

- Wählen wir

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = p \text{ eine Primzahl ist,} \\ 0, & \text{falls } n \text{ keine Primzahl ist,} \end{cases}$$

so ist

$$A(x) = \sum_{n \le x} a_n = \pi(x).$$

Wir wählen weiter $b(x) = \log x$ und erhalten

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \sum_{p \le x} \log p = \sum_{n \le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = \\ &= \pi(x)\log x - \int_1^x \pi(t) \cdot \frac{1}{t} dt = \pi(x)\log x - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

eine Formel, die wir bereits anderweitig gezeigt haben.

- Wir wählen jetzt

$$a_n = \begin{cases} \log p, & \text{falls } n = p \text{ eine Primzahl ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$A(x) = \sum_{n \le x} a_n = \sum_{p \le x} a_p = \sum_{p \le x} \log p = \vartheta(x).$$

Wählen wir $b(x) = \frac{1}{\log x}$, so können wir die Formel für die partielle Summation mit $n_0 = 2$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \le x} 1 = \sum_{2 \le n \le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_2^x A(t)b'(t)dt = \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} - \int_2^x \vartheta(t) \cdot \frac{-1}{t(\log t)^2} dt = \\ &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt, \end{aligned}$$

was wir auch schon bewiesen haben.

Wir werden im Folgenden partielle Summation in verschiedenen Situationen erfolgreich anwenden.

Abschnitt 3.2: Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n\leq x} \frac{1}{n}$

Bekanntlich divergiert die harmonische Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Wir wollen das Divergenzverhalten hier etwas genauer untersuchen. Zur Vorbereitung schicken wir ein Lemma voraus.

Lemma

Für $u \geq 1$ existiert das uneigentliche Integral

$$\int_u^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$$

und es gilt

$$0 < \int_u^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq \frac{1}{u}.$$

Beweis: Da $0 \leq t - \lfloor t \rfloor \leq 1$ ist, gilt für alle $v \geq u$

$$0 \leq \int_u^v \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq \int_u^v \frac{1}{t^2} dt = \Big[-\frac{1}{t} \Big]_{t=u}^v = \frac{1}{u} - \frac{1}{v} \leq \frac{1}{u}.$$

Da $v \mapsto \int_u^v \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$ monoton steigend und nach oben beschränkt ist (durch $\frac{1}{u}$), existiert

$$\int_u^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt = \lim_{v \to \infty} \int_u^v \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt$$

und es gilt

$$\int_u^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq \frac{1}{u},$$

was zu zeigen war. ■

Definition

Die Eulersche Konstante γ wird definiert als

$$\gamma = 1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt = 0.57721566490153286065\ldots$$

Sage kennt die Eulersche Konstante γ als `euler_gamma`.

Satz

Mit der Eulerschen Konstante γ gilt:

- *Für $x \geq 1$ ist*

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} - \log x - \gamma \right| \leq \frac{1}{x},$$

definiert man also $a(x)$ für $x \geq 1$ durch

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x}, \quad \text{so gilt} \quad |a(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \geq 1.$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{1}{x}).$$

- *Die Folge $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N \right)_{N \geq 1}$ konvergiert gegen γ, also*

$$\gamma = \lim_{N \to \infty} (\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N) = 0.57721566490153286065\ldots$$

Beweis:

- Wir verwenden partielle Summation mit $a_n = 1$ und $b(t) = \frac{1}{t}$, erhalten zunächst
$$A(x) = \sum_{n\leq x} 1 = \lfloor x \rfloor$$
und dann
$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} &= \sum_{n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = \lfloor x\rfloor \cdot \frac{1}{x} - \int_1^x \lfloor t\rfloor \cdot \frac{-1}{t^2} dt = \\ &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2} dt.\end{aligned}$$
Nun schreiben wir das Integral mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas um:
$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} &= \frac{\lfloor x\rfloor}{x} + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor}{t^2} dt = \frac{\lfloor x\rfloor - x}{x} + 1 + \int_1^x \frac{\lfloor t\rfloor - t}{t^2} dt + \int_1^x \frac{t}{t^2} dt = \\ &= \log x + 1 - \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x} - \int_1^x \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt = \\ &= \log x + 1 - \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x} - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt + \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt = \\ &= \log x + \left(1 - \int_1^\infty \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt\right) + \left(\int_x^\infty \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt - \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x}\right) = \\ &= \log x + \gamma + \left(\int_x^\infty \frac{t - \lfloor t\rfloor}{t^2} dt - \frac{x - \lfloor x\rfloor}{x}\right).\end{aligned}$$

Hier endete die Vorlesung am 27.11.2020.

- Wir haben also

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \left(\int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} \right).$$

Definieren wir $a(x)$ durch

$$a(x) = x \cdot \left(\int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x} \right) = x \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt - (x - \lfloor x \rfloor),$$

so gilt

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x}.$$

Nach dem vorangegangenen Lemma gilt

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq \frac{1}{x}, \quad \text{und damit} \quad 0 \leq x \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq 1.$$

Zusammen mit $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$ folgt

$$a(x) \leq x \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} dt \leq 1 \quad \text{und} \quad a(x) \geq -(x - \lfloor x \rfloor) \geq -1,$$

also $|a(x)| \leq 1$. Daraus folgt die Behauptung.

- Aus (1) folgt sofort

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N - \gamma \right) = 0,$$

und damit die Behauptung. ■

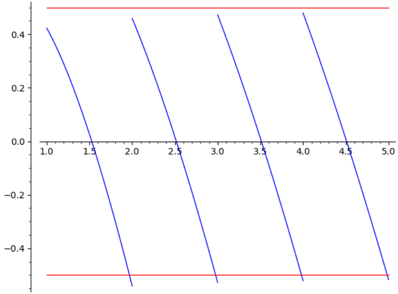
Schreibt man für $x \geq 1$

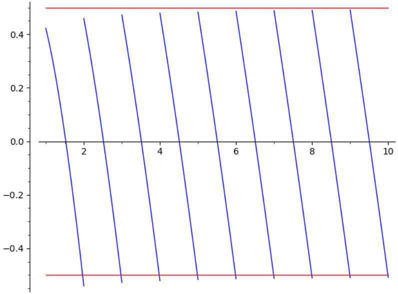
$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x},$$

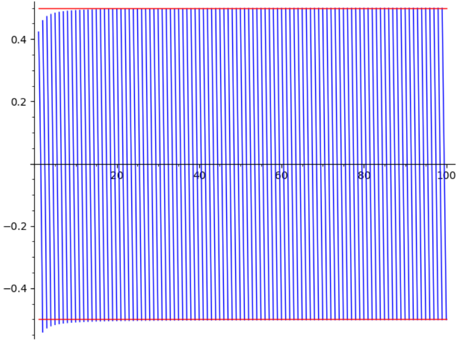
so gilt also

$$|a(x)| \leq 1.$$

Die folgenden Zeichnungen zeigen die Funktion $a(x)$. Die roten Linien sind die konstanten Funktionen $x \mapsto 0.5$ und $x \mapsto -0.5$.







Um die Funktion

$$a(x) = x \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \, dt - (x - \lfloor x \rfloor)$$

besser zu verstehen, wäre es sinnvoll, die Funktion

$$x \mapsto x \int_x^\infty \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2} \, dt$$

genauer zu betrachten, was wir hier aber nicht machen werden. (Aufgabe!)

Abschnitt 3.3: Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \leq x} \log n$

Wir betrachten jetzt für $x \geq 1$ die Funktion

$$\sum_{n \leq x} \log n = \log \prod_{n \leq x} n = \log \lfloor x \rfloor !$$

und zeigen den folgenden Satz:

Satz

Für $x \geq 1$ gilt

$$\left| \sum_{n \leq x} \log n - (x \log x - x + 1) \right| \leq \log x,$$

definiert man also $b(x)$ durch

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + 1 + b(x) \cdot \log x, \qquad \textit{so gilt} \qquad |b(x)| \leq 1 \textit{ für } x \geq 1.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + O(\log x).$$

Beweis: Wir wählen in der Formel für die partielle Summation $a_n = 1$ und $b(x) = \log x$ und erhalten $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n = \lfloor x \rfloor$ (für $x \geq 1$) und damit

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \log n &= \sum_{n \leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = \lfloor x \rfloor \log x - \int_1^x \lfloor t \rfloor \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \\
&= (x - (x - \lfloor x \rfloor)) \log x + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor - t}{t} dt = \\
&= x \log x - (x - \lfloor x \rfloor) \log x + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - \int_1^x \frac{t}{t} dt = \\
&= x \log x - (x - \lfloor x \rfloor) \log x + \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - (x - 1) = \\
&= (x \log x - x + 1) + \left(\int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - (x - \lfloor x \rfloor) \log x \right).
\end{aligned}$$

Für $x \geq 1$ gilt

$$0 \leq \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt \leq \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \quad \text{und} \quad 0 \leq (x - \lfloor x \rfloor) \log x \leq \log x,$$

und damit

$$\left| \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - (x - \lfloor x \rfloor) \log x \right| \leq \log x,$$

was die Behauptung

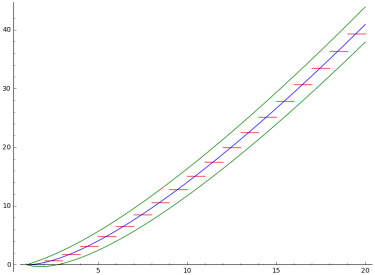
$$\left| \sum_{n \leq x} \log n - (x \log x - x + 1) \right| = \left| \int_1^x \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - (x - \lfloor x \rfloor) \log x \right| \leq \log x$$

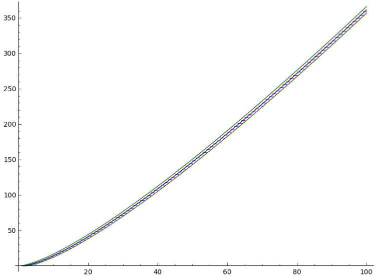
liefert. Schreibt man

$$\sum_{n \leq x} \log n = x \log x - x + 1 + b(x) \log x$$

($b(x)$ wird hierdurch definiert),so ist also $|b(x)| \leq 1$ für $x > 1$. Wegen $1 + b(x) \log x = O(\log x)$ folgt auch die letzte Behauptung. ∎

In den folgenden Abbildungen ist $\sum_{n \le x} \log n$ rot, $\log x - x + 1$ blau und $(\log x - x + 1) \pm \log x$ grün gezeichnet:





Bemerkung: Eine Gestalt der Stirling-Formel lautet

$$\log n! = n \log n - n + \frac{1}{2} \log n + \log \sqrt{2\pi} + \frac{\delta(n)}{12n} \quad \text{mit} \quad 0 < \delta(n) < 1,$$

die natürlich für $n \in \mathbb{N}$ eine wesentliche bessere Abschätzung als unsere, mit partieller Summation gezeigte Abschätzung gibt. Wir machen den Ansatz

$$\sum_{n \le x} \log n = x \log x - x + \frac{1}{2} \log x + \log \sqrt{2\pi} + r(x).$$

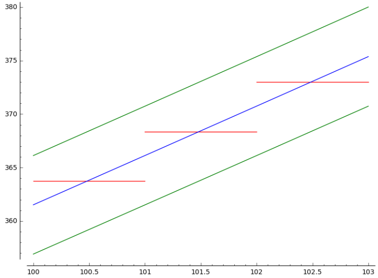
Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$ und $0 \le \lambda < 1$ wegen $r(N) = \frac{\delta(N)}{12N}$

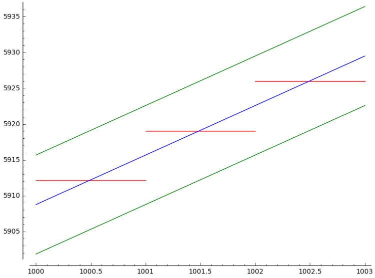
$$\begin{aligned}
r(N+\lambda) &= \sum_{n \le N+\lambda} \log n - (N+\lambda) \log(N+\lambda) + (N+\lambda) - \frac{1}{2} \log(N+\lambda) - \log \sqrt{2\pi} = \\
&= \sum_{n \le N} \log n - (N+\lambda) \log N(1+\frac{\lambda}{N}) + N + \lambda - \frac{1}{2} \log N(1+\frac{\lambda}{N}) - \log \sqrt{2\pi} = \\
&= N \log N - N + \frac{1}{2} \log N + \log \sqrt{2\pi} + r(N) \\
&\quad -(N+\lambda) \log N(1+\frac{\lambda}{N}) + N + \lambda - \frac{1}{2} \log N(1+\frac{\lambda}{N}) - \log \sqrt{2\pi} = \\
&= -N \log(1+\frac{\lambda}{N}) - \lambda \log N - \lambda \log(1+\frac{\lambda}{N}) + \lambda - \frac{1}{2} \log(1+\frac{\lambda}{N}) + \frac{\delta(N)}{12N}.
\end{aligned}$$

Bei festem $0 \le \lambda < 1$ folgt

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r(N+\lambda)}{\log N} = -\lambda.$$

Dies zeigt, dass das Restglied $r(x)$ unseres Ansatzes in die Größenordnung von $\log x$ kommt. Also kommen wir nur auf eine Abschätzung wie im vorangegangenen Satz und der genaue Ansatz von oben ist sinnlos. Dies sollten auch die folgenden Abbildungen illustrieren ($\sum_{n \leq x} \log n$ rot, $x \log x - x + 1$ blau, $(x \log x - x + 1) \pm \log x$ grün).





Wir erinnern in folgendem Lemma noch eine Aussage bereit, die wiederholt benutzt werden wird:

Lemma

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

Beweis: Sei $m = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$. Dann gilt:

$$\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = m \implies m \le \frac{x}{n} < m+1 \implies nm \le x < nm+n \implies nm \le \lfloor x \rfloor < nm+n \implies$$
$$\implies m \le \frac{\lfloor x \rfloor}{n} < m+1 \implies \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = m \implies \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor ,$$

wie behauptet. ■

Der folgende Satz gibt noch einen Zusammenhang mit der ψ-Funktion an.

Lemma

Für $x \geq 0$ gilt

$$\sum_{n\leq x} \log n = \sum_{n\geq 1} \psi(\frac{x}{n}).$$

(Die Summe rechts ist endlich, da für $n > \frac{x}{2}$ natürlich $\psi(\frac{x}{n}) = 0$ gilt.

Beweis: Wir können o.E. $x \geq 2$ voraussetzen, da sonst alle Terme 0 sind. Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$, sodass wir schreiben können

$$v_p(\lfloor x \rfloor!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \psi(\frac{x}{n}) &= \sum_{n\geq 1} \sum_{\substack{p,k\geq 1 \\ p^k \leq \frac{x}{n}}} \log p = \sum_{\substack{n\geq 1, p, k\geq 1 \\ np^k \leq x}} \log p = \sum_{p} \log p \sum_{k\geq 1} \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \leq \frac{x}{p^k}}} 1 = \sum_{p} \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor = \\ &= \sum_{p} \log p \cdot v_p(\lfloor x \rfloor!) = \log \prod_{p} p^{v_p(\lfloor x \rfloor!)} = \log(\lfloor x \rfloor!) = \log \prod_{n\leq x} n = \sum_{n\leq x} \log n, \end{aligned}$$

wie behauptet. ∎

Abschnitt 3.4: Die Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$ und $x \mapsto \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{p^k\leq x} \frac{\log p}{p^k}$

Die ψ-Funktion wurde definiert durch

$$\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \log p,$$

d.h. bei jeder Primzahlpotenz $p^k \leq x$ kommt ein Summand $\log p$ hinzu. Die Mangoldt-Funktion $\Lambda : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wird definiert durch

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{für } n = p^k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit kann man dann schreiben

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n),$$

was die Schreibweise vereinfacht, inhaltlich natürlich nichts verändert.
Die Mangoldt-Funktion ist nach Hans von Mangoldt (1854-1925) benannt, weswegen man auch manchmal die Bezeichnung „von Mangoldt-Funktion" findet.

Lemma

Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n\leq x} \log n = \sum_{n\leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n).$$

Beweis: Wir haben nun

$$\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \log n &= \log \prod_{n\leq x} n = \log \lfloor x \rfloor ! = \log \prod_{p} p^{v_p(\lfloor x \rfloor !)} = \\
&= \sum_{p} v_p(\lfloor x \rfloor !) \log p = \sum_{p} \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{p^k} \right\rfloor \log p = \\
&= \sum_{p} \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \log p = \\
&= \sum_{p^k\leq x} \left\lfloor \frac{x}{p^k} \right\rfloor \log p = \sum_{n\leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n),
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Satz

Für $x \ge 1$ gilt

$$\left|\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x\right| \le 1.2, \qquad d.h. \qquad \left|\sum_{p^k\le x} \frac{\log p}{p^k} - \log x\right| \le 1.2,$$

also insbesondere

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1).$$

Beweis: Wir verwenden nun die zuvor (für alle $x \ge 1$) gezeigten Aussagen

$$\sum_{n\le x} \log n = \sum_{n\le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n), \quad \sum_{n\le x} \log n = x\log x - x + 1 + b(x)\log x \text{ mit } |b(x)| \le 1, \quad 0 \le \psi(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) \le 1.5\,x$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Big(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\Big)\Lambda(n) + \frac{1}{x}\sum_{n\le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \Lambda(n) = \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Big(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\Big)\Lambda(n) + \frac{1}{x}\sum_{n\le x} \log n = \\
&= \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Big(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\Big)\Lambda(n) + \frac{1}{x}\,(x\log x - x + 1 + b(x)\log x) = \\
&= \log x + \left(\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Big(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor\Big)\Lambda(n) - 1 + \frac{1}{x} + \frac{b(x)\log x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Schreiben wir also $\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + c(x)$, so ist

$$c(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\le x}(\frac{x}{n} - \left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor)\Lambda(n) - 1 + \frac{1}{x} + \frac{b(x)\log x}{x}.$$

Wir schätzen $c(x)$ zuerst nach unten ab:

$$c(x) \ge 0 - 1 + \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x}.$$

Für

$$c_1(x) = -1 + \frac{1}{x} - \frac{\log x}{x} \quad \text{gilt} \quad c_1'(x) = \frac{\log(x) - 2}{x^2} = \frac{\log\frac{x}{e^2}}{x^2},$$

sodass $c_1(x)$ ein Minimum in $x = e^2$ hat. Mit $c_1(e^2) = -1.1353\cdots \ge -1.2$ gilt $c(x) \ge c_1(x) \ge -1.2$ für alle $x \ge 1$. Nun schätzen $c(x)$ nach oben ab:

$$\begin{aligned} c(x) &\le \frac{1}{x}\sum_{n\le x}\Lambda(n) - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\log x}{x} = \frac{1}{x}\psi(x) - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\log x}{x} \le \frac{1}{x}\cdot 1.5\,x - 1 + \frac{1}{x} + \frac{\log x}{x} = \\ &= 0.5 + \frac{1+\log x}{x}. \end{aligned}$$

Für

$$c_2(x) = 0.5 + \frac{1+\log x}{x} \quad \text{gilt} \quad c_2'(x) = -\frac{\log x}{x^2},$$

sodass $c_2(x)$ für $x \ge 1$ fallend ist. Aus $c_2(1) = 1.5$ und $c_2(3) \le 1.2$ folgt $c(x) \le c_2(x) \le 1.2$ für $x \ge 3$. Der folgenden Tabelle

$N \le x < N+1$	$\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n} - \log(N+1)$	$\le c(x) = \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \le$	$\sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(n)}{n} - \log N$
$1 \le x < 2$	-0.693147		0.000000
$2 \le x < 3$	-0.752039		-0.346574
$3 \le x < 4$	-0.673517		-0.385835
$4 \le x < 5$	-0.723373		-0.500230
$5 \le x < 6$	-0.583807		-0.401486
$6 \le x < 7$	-0.737958		-0.583807
$7 \le x < 8$	-0.593502		-0.459971
$8 \le x < 9$	-0.624642		-0.506859

entnimmt man, dass $c(x) \le 1.2$ für $1 \le x \le 3$ gilt. Daher haben wir insgesamt $-1.2 \le c(x) \le 1.2$ für alle $x \ge 1$, was wir zeigen wollten. ∎

Bemerkung: Durch numerische Berechnung haben wir

$$-0.57811 \leq \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \leq -0.57181 \quad \text{für } 10000 \leq x \leq 11000$$

erhalten. Haben die angegebenen Grenzen etwas mit

$$\gamma = 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992$$

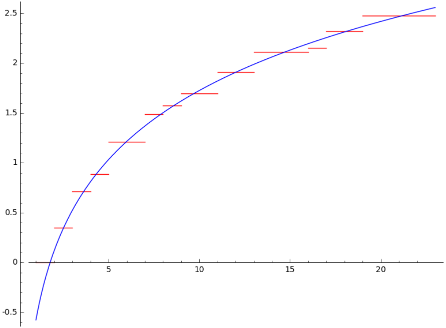
zu tun? Wir haben numerisch nun $|\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x + \gamma|$ in den folgenden Intervallen abgeschätzt:

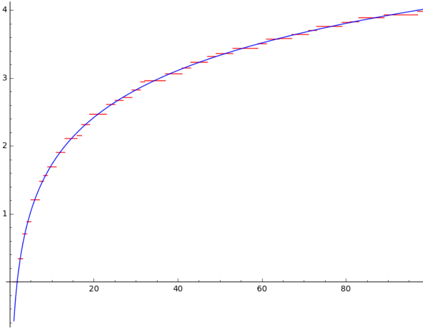
x	$\sup \lvert \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x + \gamma \rvert$
$1 \leq x < 2$	0.577216
$2 \leq x < 3$	0.230642
$3 \leq x < 4$	0.191381
$4 \leq x < 5$	0.146158
$5 \leq x < 6$	0.175730
$6 \leq x < 7$	0.160742
$7 \leq x < 8$	0.117245
$8 \leq x < 9$	0.070357
$9 \leq x < 10$	0.074642
$1000 \leq x < 1001$	0.002788
$1001 \leq x < 1002$	0.003786
$1002 \leq x < 1003$	0.004784
$1003 \leq x < 1004$	0.005780
$1004 \leq x < 1005$	0.006776
$1005 \leq x < 1006$	0.007770
$1006 \leq x < 1007$	0.008764
$1007 \leq x < 1008$	0.009756
$1008 \leq x < 1009$	0.010748
$1009 \leq x < 1010$	0.004883

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) = -\gamma$$

gilt, was wir hier aber nicht beweisen können. In den Abbildungen sieht man $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$ (rot) und $\log x - \gamma$ (blau):





Der folgende Satz gibt einen Zusammenhang zum (bisher nicht bewiesenen) Primzahlsatz an.

Satz

Existiert der Grenwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right),$$

so gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1, \quad \textit{und damit} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Beweis:

- Wir wenden die partielle Summation auf $a_n = \frac{\Lambda(n)}{n}$ und $b(x) = x$ an und erhalten mit

$$A(x) = \sum_{n\leq x} a_n = \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$$

die Gleichung

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = A(x)x - \int_1^x A(t)dt.$$

- Die Voraussetzung impliziert

$$A(x) = \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + C + \epsilon(x)$$

mit einer Konstanten C, dem Grenzwert, und einer Funktion $\epsilon(x)$ mit $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$. Eingesetzt in obige Formel ergibt sich mit $\frac{d}{dt}(t\log t - t) = \log t$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= A(x)x - \int_1^x A(t)dt = (\log x + C + \epsilon(x))x - \int_1^x (\log t + C + \epsilon(t))dt = \\
&= x\log x + Cx + x\epsilon(x) - [t\log t - t]_{t=1}^x - C(x-1) - \int_1^x \epsilon(t)dt = \\
&= x\log x + Cx + x\epsilon(x) - x\log x + x - 1 - C(x-1) - \int_1^x \epsilon(t)dt = \\
&= x + x\epsilon(x) + C - 1 - \int_1^x \epsilon(t)dt,
\end{aligned}$$

also

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + \epsilon(x) + \frac{C-1}{x} - \frac{1}{x}\int_1^x \epsilon(t)dt.$$

- Wir zeigen folgende Hilfsaussage:

$$\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \epsilon(t)dt = 0.$$

Beweis: Wegen $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ existiert $M = \sup_{x\geq 1} |\epsilon(x)|$. Ist $\epsilon_0 > 0$ beliebig, so gibt es wegen $\lim_{x\to\infty} \epsilon(x) = 0$ ein $x_0 \geq 1$ mit $|\epsilon(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon_0$ für alle $x \geq x_0$. Dann gilt für $x \geq \max(x_0, \frac{2Mx_0}{\epsilon_0})$

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x}\int_1^x \epsilon(t)dt\right| &\leq \frac{1}{x}\left(\int_1^{x_0} |\epsilon(t)|dt + \int_{x_0}^x |\epsilon(t)|dt\right) \leq \\ &\leq \frac{1}{x}\left(\int_1^{x_0} Mdt + \int_{x_0}^x \frac{1}{2}\epsilon_0 dt\right) = \frac{M(x_0-1)+\frac{1}{2}\epsilon_0(x-x_0)}{x} \leq \\ &\leq \frac{Mx_0}{x} + \frac{1}{2}\epsilon_0 \leq \frac{1}{2}\epsilon_0 + \frac{1}{2}\epsilon_0 = \epsilon_0. \end{aligned}$$

Da $\epsilon_0 > 0$ beliebig war, folgt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_1^x \epsilon(t)dt = 0$.

- Wendet man dies auf

$$\frac{\psi(x)}{x} = 1 + \epsilon(x) + \frac{C-1}{x} - \frac{1}{x}\int_1^x \epsilon(t)dt$$

an, so erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1,$$

was wir zeigen wollten. Dass diese Aussage gleichwertig mit $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1$, also mit $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ ist, haben wir bereits früher bewiesen. ■

Bemerkung: Wir haben gezeigt, dass gilt

$$\lim_{x \to \infty} \epsilon(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_1^x \epsilon(t) dt = 0.$$

Wäre $\epsilon(x)$ stetig, könnte man dies auch mit der Regel von l'Hospital zeigen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_1^x \epsilon(t) dt = \lim_{x \to \infty} \frac{\int_1^x \epsilon(t) dt}{x} \overset{\text{Differenzieren}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\epsilon(x)}{1} = \lim_{x \to \infty} \epsilon(x) = 0.$$

Eine weitere Anwendung der partiellen Summation gibt das folgende Lemma:

Lemma

Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt.$$

Beweis: Wir wählen in der Formel für die partielle Summation

$$a_n = \Lambda(n), \quad b(x) = \frac{1}{x}$$

und haben dann

$$A(x) = \sum_{n\le x} \Lambda(n) = \psi(x),$$

was nun

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{n\le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt$$

ergibt. ■

Hier endete die Vorlesung am 2.12.2020.

Überlegungen: Im letzten Satz haben wir die Implikation

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) \text{ existiert} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

bewiesen, indem wir einfach die Formel

$$\psi(x) = \left(\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} \right) \cdot x - \int_1^x \left(\sum_{n \le t} \frac{\Lambda(n)}{n} \right) dt$$

benutzt haben, die wir durch partielle Summation erhalten hatten. Nun wollen wir probieren, ob wir die umgekehrte Implikation

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) \text{ existiert}$$

beweisen können, indem wir die Formel

$$\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt$$

benutzen, die wir ebenfalls durch partielle Summation erhalten hatten.

Wir beginnen mit einem allgemeinen Ansatz:

Lemma

Sei $\delta(x)$ für $x > 0$ definiert durch

$$\psi(x) = x + x \cdot \delta(x).$$

(Der Primzahlsatz ist äquivalent zu der Aussage $\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$.) Dann gilt

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x = 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt.$$

Beweis: Mit der zuvor gezeigten Formel $\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} &= \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt = 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{1+\delta(t)}{t} dt = \\ &= \log x + 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{n\le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x = 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt,$$

wie behauptet. ∎

Aus

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x = 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt$$

und $\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0$ kann man aber noch nicht auf die Konvergenz von $\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x$ schließen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel: Für

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x} & \text{für } x \geq e, \\ 0 & \text{für } x < e \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x\to\infty} \delta(x) = 0,$$

aber

$$\int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt = \int_e^x \frac{\frac{1}{\log t}}{t} dt = \int_e^x \frac{1}{t \log t} dt = [\log \log t]_{t=e}^x = \log \log x$$

ist eine Funktion, die nicht beschränkt ist.

Satz

Gilt $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$ für eine reelle Zahl $\alpha < 1$, so existiert der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right).$$

Beweis: Gilt $\psi(x) = x + O(x^\alpha)$, so können wir schreiben

$$\psi(x) = x + m(x)x^\alpha \text{ mit einer beschränkten Funktion } m(x),$$

für die beispielsweise $|m(x)| \leq M$ gilt. Mit den Bezeichnungen des vorangegangenen Lemmas ist dann

$$\delta(x) = m(x)x^{\alpha-1}.$$

Das Lemma besagt

$$\begin{aligned} \sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x &= 1 + \delta(x) + \int_1^x \frac{\delta(t)}{t} dt = \\ &= 1 + \frac{m(x)}{x^{1-\alpha}} + \int_1^x m(t)t^{\alpha-2} dt. \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_1^x \left| m(t)t^{\alpha-2} \right| dt &\leq \int_1^x Mt^{\alpha-2} dt = M \left[\frac{t^{\alpha-1}}{\alpha-1} \right]_{t=1}^x = \\ &= \frac{M}{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}} \right) \leq \frac{M}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Also existiert das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{m(t)}{t^{2-\alpha}} dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x m(t)t^{\alpha-2} dt.$$

Daher folgt

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) = 1 + \int_1^\infty \frac{m(t)}{t^{2-\alpha}} dt,$$

insbesondere existert auch $\lim_{x\to\infty} (\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x)$. ∎

Bemerkungen:

- Aus der nichtbewiesenen Riemannschen Vermutung würde die Aussage

$$\psi(x) = x + O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}) \text{ für jedes } \epsilon > 0$$

  folgen. Bis heute wurde für keine einzige Zahl α mit $\alpha < 1$ die Aussage $\psi(x) = x + O(x^{\alpha})$ bewiesen.
- Mit stärkeren Hilfsmitteln, nämlich dem Satz von Axer, kann man aber doch die Implikation

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to\infty} \left(\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right) \text{ existiert}$$

  zeigen.

Lemma

Für $x \geq 1$ gilt

$$\left|\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt - \log x\right| \leq 2.7, \text{ also insbesondere } \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt = \log x + O(1).$$

Beweis: Mit $|\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x| \leq 1.2$, $\psi(x) \leq 1.5\,x$ und der Formel $\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \frac{\psi(x)}{x} + \int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2}dt - \log x\right| &= \left|\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x - \frac{\psi(x)}{x}\right| \leq \\ &\leq \left|\sum_{n\leq x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x\right| + \frac{\psi(x)}{x} \leq 1.2 + 1.5 = 2.7, \end{aligned}$$

was wir zeigen wollten. ■

Satz

- *Sind $x_0 \ge 1$, $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \ge x_0$ die Ungleichungen*

$$\alpha_0 \cdot x \le \psi(x) \le \beta_0 \cdot x$$

gelten, so folgt

$$\alpha_0 \le 1 \le \beta_0.$$

- *Es ist*

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \le 1 \le \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

- *Existiert für $x \to \infty$ einer der Grenzwerte $\frac{\pi(x) \log x}{x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$, $\frac{\psi(x)}{x}$, so existieren alle und haben den Wert 1.*

Beweis:

- Nach dem letzten Lemma gibt es eine beschränkte Funktion $C(x)$ mit $\int_1^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt = \log x + C(x)$. Nun gilt nach Voraussetzung für $x \geq x_0$

$$\alpha_0(\log x - \log x_0) = \int_{x_0}^x \frac{\alpha_0 t}{t^2} dt \leq \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{t^2} dt \leq \int_{x_0}^x \frac{\beta_0 t}{t^2} dt = \beta_0(\log x - \log x_0),$$

  also nach Addition von $\int_1^{x_0} \frac{\psi(t)}{t^2} dt$

$$\alpha_0(\log x - \log x_0) + \int_1^{x_0} \frac{\psi(t)}{t^2} dt \leq \log x + C(x) \leq \beta_0(\log x - \log x_0) + \int_1^{x_0} \frac{\psi(t)}{t^2} dt.$$

  Division durch $\log x$ und Grenzübergang $x \to \infty$ liefert sofort

$$\alpha_0 \leq 1 \leq \beta_0,$$

  wie behauptet.
- Dass $\frac{\pi(x) \log x}{x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\frac{\psi(x)}{x}$ gleichen Limes inferior und Limes superior haben, wissen wir bereits. Sei $\alpha = \liminf_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}$ und $\beta = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $x_0 \geq 1$, sodass gilt

$$x \geq x_0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha - \epsilon \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \beta + \epsilon.$$

  Der erste Teil des Satzes impliziert

$$\alpha - \epsilon \leq 1 \leq \beta + \epsilon.$$

  Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt $\alpha \leq 1 \leq \beta$, wie behauptet.
- Dies folgt sofort aus der zweiten Aussage. ■

Abschnitt 3.5: Die Primzahlsummenfunktion $x \mapsto \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p}$

Wir beginnen mit einem Lemma:

Lemma

Es gilt

$$0 < \sum_{p} \sum_{k \ge 2} \frac{\log p}{p^k} = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)} = 0.7553 \cdots < 0.8$$

und für $x \ge 3$

$$0 \le \sum_{p > x} \sum_{k \ge 2} \frac{\log p}{p^k} = \sum_{p > x} \frac{\log p}{p(p-1)} \le \frac{5}{8} \cdot \frac{\log(x-2)+1}{x-2}.$$

Beweis:

- Bei festem p ist

$$\sum_{k \geq 2} \frac{\log p}{p^k} = \frac{\log p}{p^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{\log p}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{\log p}{p(p-1)}.$$

- Für $p \geq 5$ gilt $4p = 5p - p \leq 5p - 5 = 5(p-1)$, also $\frac{1}{p-1} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{p}$ und damit

$$\frac{\log p}{p(p-1)} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{\log p}{p^2}.$$

Die Ableitung der Funktion $t \mapsto \frac{\log t}{t^2}$ ist $\frac{1 - 2\log t}{t^3} = \frac{2 \log \frac{\sqrt{e}}{t}}{t^3}$, sodass die Funktion für $t \geq \sqrt{e} \approx 1.65$ fallend ist. Damit folgt für $p \geq 5$ (wegen $p - 2 \geq 3 \geq \sqrt{e}$)

$$\frac{\log p}{p(p-1)} \leq \frac{5}{4} \cdot \frac{\log p}{p^2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_{p-2}^{p} \frac{\log p}{p^2} dt \leq \frac{5}{8} \int_{p-2}^{p} \frac{\log t}{t^2} .dt$$

- Es ist

$$\frac{d}{dt}\left(-\frac{\log t + 1}{t}\right) = \frac{\log t}{t^2},$$

also gilt für $1 \leq a \leq b$

$$\int_a^b \frac{\log t}{t^2} dt = \left[-\frac{\log t + 1}{t}\right]_{t=a}^{b} = \frac{\log a + 1}{a} - \frac{\log b + 1}{b},$$

und damit insbesondere

$$\int_x^{\infty} \frac{\log t}{t^2} dt = \frac{\log x + 1}{x}.$$

- Sei $x \geq 3$ und seinen p_1, p_2 Primzahlen mit $x < p_1 < p_2$. Dann gilt $p_1 \geq 5$ und damit

$$\begin{aligned} \sum_{p_1 \leq p \leq p_2} \frac{\log p}{p(p-1)} \quad &\leq \quad \sum_{p_1 \leq p \leq p_2} \frac{5}{8} \int_{p-2}^{p} \frac{\log t}{t^2} dt \leq \frac{5}{8} \int_{p_1-2}^{p_2} \frac{\log t}{t^2} dt \leq \\ &\leq \quad \frac{5}{8} \int_{x-2}^{\infty} \frac{\log t}{t^2} dt = \frac{5}{8} \cdot \frac{\log(x-2)+1}{x-2}, \end{aligned}$$

  was sofort

$$\sum_{p>x} \frac{\log p}{p(p-1)} \leq \frac{5}{8} \cdot \frac{\log(x-2)+1}{x-2}$$

  liefert, wie behauptet.
- Mit Maple haben wir folgende Tabelle erstellt:

x	$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p(p-1)}$	$\frac{\log(x-2)+1}{x-2}$
2	0.3465735903	nicht definiert
3	0.5296756384	1.0000000000
5	0.6101475340	0.6995374296
7	0.6564787280	0.5218875825
11	0.6782777760	0.3552471753
97	0.7454231021	0.0584618620
101	0.7458800447	0.0565163621
997	0.7543752727	0.0079424550
1009	0.7543820733	0.0078597129
9973	0.7552671778	0.0010237124
10007	0.7552672698	0.0010205737
99991	0.7553566278	0.0001251419
100003	0.7553566290	0.0001251281
999983	0.7553656108	0.0000148158
1000003	0.7553656108	0.0000148155

  Daraus ergeben sich die restlichen Behauptungen. ■

Satz (Mertens)

Für $x \ge 1$ gilt

$$\left| \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x \right| \le 2, \qquad \textit{also insbesondere} \qquad \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Beweis: Mit $\left| \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right| \le 1.2$ und $\sum_p \frac{\log p}{p(p-1)} < 0.8$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x \right| &= \left| \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \right| + \left| \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} \right| \le \\
&\le 1.2 + \left| \sum_{p^k \le x} \frac{\log p}{p^k} - \sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} \right| = 1.2 + \sum_{\substack{p^k \le x \\ k \ge 2}} \frac{\log p}{p^k} \le \\
&\le 1.2 + \sum_p \sum_{k \ge 2} \frac{\log p}{p^k} < 1.2 + 0.8 = 2,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Wir haben auf Grund numerischer Experimente gemutmaßt, dass $\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x$ konvergiert.

Satz

Der Grenzwert von $\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x$ für $x \to \infty$ exisiert genau dann, wenn der Grenzwert von $\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x$ für $x \to \infty$ existiert. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \to \infty} (\sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x) = \lim_{x \to \infty} (\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x) + \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)}.$$

Beweis: Es ist

$$\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}.$$

Nun gilt mit den zuvor bewiesenen Abschätzungen für hinreichend großes x

$$\begin{aligned}
0 \;\le\; & \sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}-\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}=\sum_{p}\sum_{k\ge 2}\frac{\log p}{p^k}-\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}=\sum_{\substack{p^k> x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}=\\
=\; & \sum_{\substack{p>\sqrt{x}\\ p^k> x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ p^k> x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}=\sum_{\substack{p>\sqrt{x}\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}+\sum_{\substack{p\le\sqrt{x}\\ k\ge\left\lfloor\frac{\log x}{\log p}\right\rfloor+1}}\frac{\log p}{p^k}=\\
=\; & \sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p^{\left\lfloor\frac{\log x}{\log p}\right\rfloor+1}}\cdot\frac{\log p}{1-\frac{1}{p}}\le\sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{p^{\frac{\log x}{\log p}}}\cdot\frac{\log p}{1-\frac{1}{p}}=\\
=\; & \sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\sum_{p\le\sqrt{x}}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log p}{1-\frac{1}{p}}\overset{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\le 2}{\le}\sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\frac{2}{x}\sum_{p\le\sqrt{x}}\log p\le=\\
=\; & \sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\frac{2}{x}\cdot\vartheta(\sqrt{x})\overset{\vartheta(x)\le 1.4x}{\le}\sum_{p>\sqrt{x}}\frac{\log p}{p(p-1)}+\frac{2}{x}\cdot 1.4\sqrt{x}\le\\
\le\; & \frac{5}{8}\cdot\frac{\log(\sqrt{x}-2)+1}{\sqrt{x}-2}+\frac{2.8}{\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{\substack{p^k\le x\\ k\ge 2}}\frac{\log p}{p^k}=\sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}\quad\text{und damit}\quad\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n\le x}\frac{\Lambda(n)}{n}-\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}\right)=\sum_{p}\frac{\log p}{p(p-1)}$$

gilt, woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Bemerkung: Wir haben also die Implikationen

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} - \log x \text{ konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n \le x} \frac{\Lambda(n)}{n} - \log x \text{ konvergiert} \quad \Longrightarrow \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Leider können wir bisher keine der Aussagen für sich zeigen.

Zum Vergleich betrachten wir nun noch die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \frac{\log n}{n}$.

Satz

Es gibt eine Konstante c, sodass gilt

$$\left| \sum_{n \le x} \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2} (\log x)^2 + c \right| \le \frac{\log x}{x} \text{ für } x \ge e,$$

also

$$\sum_{n \le x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2} (\log x)^2 - c + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Es ist $c \approx 0.0728$.

Beweis:

- Wir verwenden partielle Summation an mit $a_n = 1$ und $b(x) = \frac{\log x}{x}$. Dann ist $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n = \lfloor x \rfloor$, $b'(x) = -\frac{\log x - 1}{x^2}$ und

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} &= \sum_{n\leq x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_1^x A(t)b'(t)dt = \\
&= \lfloor x \rfloor \cdot \frac{\log x}{x} + \int_1^x \lfloor t \rfloor \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \\
&= x \cdot \frac{\log x}{x} - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x} + \int_1^x t \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} - \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \\
&= \log x - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x} + \int_1^x \frac{\log t - 1}{t} dt - \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \\
&= \log x + [\frac{1}{2}(\log t)^2 - \log t]_{t=1}^x - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x} - \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \\
&= \frac{1}{2}(\log x)^2 - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x} - \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt.
\end{aligned}
$$

- Sind x_1, x_2 reelle Zahlen mit $e \leq x_1 \leq x_2$, so ist $\log t - 1 \geq 0$ für $x_1 \leq t \leq x_2$, also folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{x_1}^{x_2} \left| (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} \right| dt &\leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{\log t - 1}{t^2} dt = \int_{x_1}^{x_2} (-b'(t)) dt = b(x_1) - b(x_2) = \\
&= \frac{\log x_1}{x_1} - \frac{\log x_2}{x_2} \leq \frac{\log x_1}{x_1}.
\end{aligned}
$$

  Daher existiert das uneigentliche Integral

$$
c = \int_1^\infty (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt,
$$

  dessen Wert wir mit c bezeichnen.

- Wie erhalten nun für $x \geq e$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2}(\log x)^2 + c\right| &= \left|c - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x} - \int_1^x (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt\right| = \\ &= \left|\int_x^\infty (t - \lfloor t \rfloor) \cdot \frac{\log t - 1}{t^2} dt - (x - \lfloor x \rfloor) \cdot \frac{\log x}{x}\right|.\end{aligned}$$

Zwischen den letzten Betragsstrichen steht die Differenz zweier Zahlen, die zwischen 0 und $\frac{\log x}{x}$ liegen. Also folgt

$$\left|\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} - \frac{1}{2}(\log x)^2 + c\right| \leq \frac{\log x}{x} \qquad (\text{für } x \geq e).$$

- Die hergeleitete Ungleichung liefert für $x \geq e$

$$\frac{1}{2}(\log x)^2 - \sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} - \frac{\log x}{x} \leq c \leq \frac{1}{2}(\log x)^2 - \sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} + \frac{\log x}{x}.$$

x	$\frac{1}{2}(\log x)^2 - \sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} - \frac{\log x}{x}$	$\frac{1}{2}(\log x)^2 - \sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} + \frac{\log x}{x}$
10	-0.2714868218	0.1890301968
100	0.0037683355	0.0958717393
1000	0.0624547049	0.0762702154
10000	0.0714343013	0.0732763693
100000	0.0726431517	0.0728734102
1000000	0.0727951222	0.0728227532

Daher ist $c \approx 0.0728$. ■

Abschnitt 3.6: Die Primzahlsummenfunktion $\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$

Wir hatten bereits gezeigt, dass

$$\sum_{n\leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O(\frac{1}{x})$$

gilt. Jetzt wollen wir betrachten, was passiert, wenn wir uns auf Primzahlen beschränken.

Satz (Mertens)

Es gibt ein $c_1 \in \mathbb{R}$, sodass für $x \geq 2$ gilt

$$\left| \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - \log\log x - c_1 \right| \leq \frac{4}{\log x},$$

also insbesondere

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O(\frac{1}{\log x}).$$

Beweis: Wir verwenden partielle Summation mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{\log p}{p} & \text{für } n = p \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad b(x) = \frac{1}{\log x}, \quad \text{also} \quad b'(x) = -\frac{1}{x(\log x)^2} \quad \text{und} \quad n_0 = 2.$$

Es ist

$$A(x) = \sum_{n\le x} a_n = \sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} = \log x + \tilde{A}(x) \quad \text{mit} \quad |\tilde{A}(x)| \le 2,$$

wie zuvor gezeigt wurde. Dann gilt mit $\frac{d}{dt}(\log\log t) = \frac{1}{t\log t}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x} \frac{1}{p} &= \sum_{2\le n\le x} a_n b(n) = A(x)b(x) - \int_2^x A(t)b'(t)dt = \\
&= \frac{\log x + \tilde{A}(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\log t + \tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt = \\
&= 1 + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt = \\
&= 1 + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x} + [\log\log t]_{t=2}^x + \int_2^x \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt = \\
&= \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^x \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x}.
\end{aligned}$$

Für $2 \leq x_1 \leq x_2$ gilt:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left|\frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2}\right| dt \leq \int_{x_1}^{x_2} \frac{2dt}{t(\log t)^2} = -2\int_{x_1}^{x_2} b'(t)dt = 4(b(x_1)-b(x_2)) = \frac{2}{\log x_1} - \frac{2}{\log x_2} \leq \frac{2}{\log x_1}.$$

Daher existiert das uneigentliche Integral $\int_x^\infty \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt$ und es gilt

$$\left|\int_x^\infty \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt\right| \leq \frac{2}{\log x} \quad \text{für} \quad x \geq 2.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} &= \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^x \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x} = \\ &= \log\log x + 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt - \int_2^x \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x}.\end{aligned}$$

Setzen wir

$$c_1 = 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt,$$

so gilt also

$$\left|\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log\log x - c_1\right| = \left|-\int_x^\infty \frac{\tilde{A}(t)}{t(\log t)^2} dt + \frac{\tilde{A}(x)}{\log x}\right| \leq \frac{4}{\log x} \quad \text{für} \quad x \geq 2.$$

Dies war zu zeigen. ■

Bespiele: Wir berechnen für ausgewählte x die Differenz $\sum_{n \le x} \frac{1}{p} - \log\log x$ und sollten so eine Approximation der Konstanten $c_1 = \lim_{x\to\infty}(\sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log x)$ des letzten Satzes erhalten:

x	$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log x$
10	0.3421580309
100	0.2756375752
1000	0.2654353933
10000	0.2627331409
100000	0.2618018214
1000000	0.2615361851

Setzen wir in die Abschätzung des letzten Satzes $x = 10^6$ ein, so folgt $|0.2615361851 - c_1| \le \frac{4}{\log 10^6} \le 0.29$, also insbesondere $-0.03 \le c_1 \le 0.56$. (Man kann zeigen, dass die Konstante c_1 des letzten Satzes tatsächlich ungefähr $c_1 \approx 0.2615$ ist.)

Beispiele: Wir haben also
$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} \approx \log\log x,$$
was natürlich insbesondere die Divergenz der Reihe $\sum_p \frac{1}{p}$ zeigt. Um ein Gefühl dafür zu erhalten, geben wir ein paar Beispiele:

x	$\log\log x$	$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p}$
10	0.8340324452	1.1761904762
10^2	1.5271796258	1.8028172010
10^3	1.9326447339	2.1980801272
10^4	2.2203268064	2.4830599472
10^5	2.4434703577	2.7052721790
10^6	2.6257919145	2.8873280996
10^{10}	3.1366175382	
10^{100}	5.4392026312	
10^{1000}	7.7417877242	
10^{10000}	10.0443728172	
10^{100000}	12.3469579102	
$10^{1000000}$	14.6495430032	
$10^{10000000}$	16.9521280962	
$10^{100000000}$	19.2547131892	
$10^{1000000000}$	21.5572982822	
$10^{10000000000}$	23.8598833752	

Hier endete die Vorlesung am 4.12.2020.

Abschnitt 3.7: Die Produktfunktion $x \mapsto \prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$

Wir wollen in Abhängigkeit von x die Produktfunktion

$$\prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \prod_{p\leq x} \frac{p}{p-1}$$

untersuchen. Wir beginnen mit ein paar Zahlenbeispielen:

x	$\prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
2	2.0000
3	3.0000
5	3.7500
7	4.3750
11	4.8125
13	5.2135

x	$\prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
17	5.5394
19	5.8471
23	6.1129
29	6.3312
31	6.5423
37	6.7240

x	$\prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
41	6.8921
43	7.0562
47	7.2096
53	7.3482
59	7.4749
61	7.5995

x	$\prod_{p\leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$
10	4.3750
100	8.3114
1000	12.351
10000	16.424
100000	20.512
1000000	24.607

Lemma

- *Es gilt*

$$0 < \log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} < \frac{1}{2p(p-1)} \le \frac{1}{p^2}.$$

- *Für $x \ge 1$ gilt*

$$0 < \sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}) < \frac{1}{x}.$$

- *Die Reihe*

$$\sum_{p} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p})$$

konvergiert und hat einen Wert zwischen 0.31 *und* 0.32*.*

Beweis:

- Für $|x| < 1$ gilt

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_{k \ge 1} \frac{x^k}{k} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots,$$

sodass sich ergibt

$$\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \sum_{k \ge 1} \frac{1}{kp^k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{4p^4} + \dots$$

Daher gilt

$$0 < \log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p} = \sum_{k \ge 2} \frac{1}{kp^k} < \sum_{k \ge 2} \frac{1}{2p^k} = \frac{1}{2p^2} \sum_{k \ge 0} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{2p^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{1}{2p(p-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right).$$

Also erhält man für $x \ge 1$

$$0 < \sum_{p > x} \left(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\right) = \sum_{p > x} \sum_{k \ge 2} \frac{1}{kp^k} < \frac{1}{2} \sum_{p > x} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{2} \sum_{n = \lfloor x \rfloor + 1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2\lfloor x \rfloor}.$$

Ist $x \ge 1$ und $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon$, so ist $\epsilon \le \lfloor x \rfloor$ und damit $x = \lfloor x \rfloor + \epsilon \le 2\lfloor x \rfloor$.
Dies zeigt $\frac{1}{2\lfloor x \rfloor} \le \frac{1}{x}$ und damit

$$0 < \sum_{p > x} \left(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\right) < \frac{1}{x},$$

was zu beweisen war.

- Wir haben numerisch berechnet

$$\sum_{p \leq 1000} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}) = \sum_{p \leq 1000} (\log p - \log(p-1) - \frac{1}{p}) = 0.3156549\ldots$$

Teil (1) sagt, dass die Abweichung für $x = 1000$ höchstens 0.001 ist, woraus die Behauptung folgt. ■

Wir haben gesehen, dass folgende Grenzwerte existieren:

$$c_1 = \lim_{x \to \infty} (\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \log \log x) \quad \text{und} \quad c_2 = \sum_p (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}),$$

Satz (Mertens)

Mit den Bezeichnungen

$$c_1 = \lim_{x \to \infty} \Big(\sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \log\log x\Big) \quad \textit{und} \quad c_2 = \sum_p \Big(\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\Big)$$

gilt für $x \ge 2$

$$\left| \prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - e^{c_1+c_2} \cdot \log x \right| \le 16366,$$

insbesondere

$$\prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = e^{c_1+c_2} \cdot \log x + O(1).$$

Beweis:

- Wir haben für $x \geq 1$
$$0 < \sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}) < \frac{1}{x}$$
und können daher eine Zahl c_2 durch die Gleichung
$$c_2 = \sum_{p} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p})$$
definieren.
- Wir hatten die Formel
$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + \frac{a(x)}{\log x} \quad \text{mit} \quad |a(x)| \le 4$$
für $x \geq 2$ gezeigt.
- Es folgt
$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x} \log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} &= \sum_{p\le x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}) + \sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \\
&= c_2 - \sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}) + \log\log x + c_1 + \frac{a(x)}{\log x} = \\
&= c_1 + c_2 + \log\log x + \frac{a(x)}{\log x} - \sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}).
\end{aligned}$$

- Definieren wir
$$b(x) = \frac{a(x)}{\log x} - \sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}),$$
so gilt also
$$\sum_{p \le x} \log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = c_1 + c_2 + \log\log x + b(x).$$
Für $x \ge 2$ gilt
$$|b(x)| \le \frac{|a(x)|}{\log x} + |\sum_{p>x} (\log \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p})| \le \frac{4}{\log x} + \frac{1}{x} \le \frac{4}{\log x} + \frac{1}{\log x} = \frac{5}{\log x}.$$
Weiter erhält man durch Exponenzieren
$$\prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = e^{c_1+c_2} \cdot \log x \cdot e^{b(x)} = e^{c_1+c_2} \cdot \log x + e^{c_1+c_2} \cdot \log x \cdot (e^{b(x)} - 1).$$
- Für $x \ge 2$ ist $|b(x)| \le \frac{5}{\log x}$, also
$$\log x \cdot |b(x)| \le 5 \quad \text{und} \quad |b(x)| \le \frac{5}{\log x} \le \frac{5}{\log 2}.$$
Dies liefert für $x \ge 2$
$$\begin{aligned} \left|\log x \cdot (e^{b(x)} - 1)\right| &= \left|\log x \cdot \sum_{n \ge 1} \frac{b(x)^n}{n!}\right| \le \log x \cdot |b(x)| \cdot \sum_{n \ge 0} \frac{|b(x)|^n}{(n+1)!} \le \\ &\le 5 \cdot \sum_{n \ge 0} \frac{|b(x)|^n}{n!} = 5 \cdot e^{|b(x)|} \le 5 \cdot e^{5/\log 2}. \end{aligned}$$
Wir haben erwähnt, dass sicher $c_1 \le 0.56$ gilt, außerdem ist $c_2 \le 0.32$. Daher folgt weiter
$$\begin{aligned} \left|\prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - e^{c_1+c_2} \cdot \log x\right| &= \left|e^{c_1+c_2} \cdot \log x \cdot (e^{b(x)} - 1)\right| \le \\ &\le e^{0.88} \cdot 5 \cdot e^{5/\log 2} \le 16366, \end{aligned}$$
also die Behauptung. ■

Bemerkung: Das Ergebnis des letzten Satzes impliziert natürlich insbesondere die Aussagen

$$\prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \sim e^{c_1+c_2} \log x \quad \text{und} \quad \prod_{p \leq x} (1-\frac{1}{p}) \sim \frac{e^{-c_1-c_2}}{\log x},$$

die auch mit dem Namen Mertens verbunden sind.

Beispiele: Um Approximationen für $e^{c_1+c_2}$ bzw. $\log e^{c_1+c_2} = c_1 + c_2$ zu erhalten, haben wir folgende Tabelle erstellt:

x	$\frac{1}{\log x} \prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$	$\log\left(\frac{1}{\log x} \prod_{p \leq x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$
2	2.8853900818	1.0596601011
3	2.7307176799	1.0045644611
5	2.3300060046	0.8458708447
7	2.2483052479	0.8101767092
11	2.0069683837	0.6966253167
101	1.8189061200	0.5982352874
1009	1.7874422453	0.5807856847
2003	1.7863474333	0.5801729951
3001	1.7856879920	0.5798037707
4001	1.7841987311	0.5789694243
5003	1.7841447969	0.5789391951
6007	1.7832884554	0.5784591068
7001	1.7842927896	0.5790221404
8009	1.7828312195	0.5782026734
9001	1.7828884400	0.5782347682
10007	1.7833090367	0.5784706479
100003	1.7816274892	0.5775272663
200003	1.7814053578	0.5774025797
300007	1.7811595761	0.5772645995
400009	1.7813162708	0.5773525690

Die Zahlen in der rechten Spalte erinnern wieder an $\gamma = 0.5772156649$. Gilt etwa $c_1 + c_2 = \gamma$? Dies ist tatsächlich der Fall, was wir nochmals im folgenden Satz formulieren:

Satz

Für $x \ge 2$ gilt

$$\left| \prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} - e^{\gamma} \log x \right| \le 16366$$

mit $e^{\gamma} = 1.78107241\ldots$.

Im Anhang skizzieren wir einen Beweis, der allerdings etwas mehr Hilfsmittel benötigt.

Insbesondere folgt:

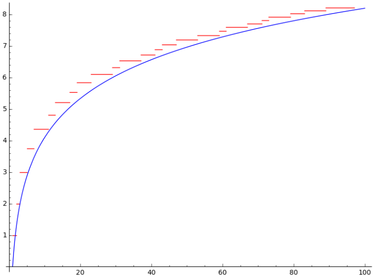
Satz (Mertens)

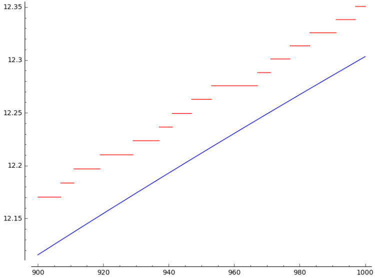
$$\prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} \sim e^{\gamma} \log x$$

und

$$\prod_{p \le x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log x}.$$

In den folgenden Abbildungen ist die Produktfunktion $\prod_{p \le x} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ rot, die Funktion $e^{\gamma} \log x$ blau eingezeichnet.





Abschnitt 3.8: Die Summenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$ und das Dirichletsche Teilerproblem

Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler der natürlichen Zahl n, also

$$\tau(n) = \#\{d \in \mathbb{N} : d \mid n\} = \sum_{d \mid n} 1.$$

Man findet auch die Bezeichnung $d(n)$ statt $\tau(n)$. Sage berechnet $\tau(n)$ mit `number_of_divisors(n)`.

Beispiele:

n	Teiler von n	$\tau(n)$
1	1	1
2	1,2	2
3	1,3	2
4	1,2,4	3
5	1,5	2
6	1,2,3,6	4
7	1,7	2
8	1,2,4,8	4
9	1,3,9	3

Kennt man die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl n, so kann man leicht alle Teiler angeben, und damit auch die Anzahl der Teiler $\tau(n)$:

Satz

Die natürliche Zahl n habe die Primfaktorzerlegung

$$n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}.$$

Die Menge der Teiler von n ist

$$T(n) = \{p_1^{d_1} \dots p_r^{d_r} : 0 \le d_1 \le e_1, \dots, 0 \le d_r \le e_r\}$$

und die Anzahl der Teiler

$$\tau(n) = (e_1 + 1) \dots (e_r + 1).$$

Beweis: Die Darstellung der Teilermenge $T(n)$ hatten wir bereits gesehen. Daraus folgt aber sofort die Aussage über $\tau(n)$, denn d_1 kann die Zahlen von 0 bis e_1 durchlaufen, also $e_1 + 1$ Zahlen, ..., d_r kann die Zahlen von 0 bis e_r durchlaufen, also $e_r + 1$ Zahlen, sodass es insgesamt $(e_1 + 1) \dots (e_r + 1)$ Möglichkeiten gibt. ■

Wir betrachten nun die Summenfunktion $\sum_{n \le x} \tau(n)$.

Lemma

Es gilt:

$$\sum_{n \le x} \tau(n) = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .$$

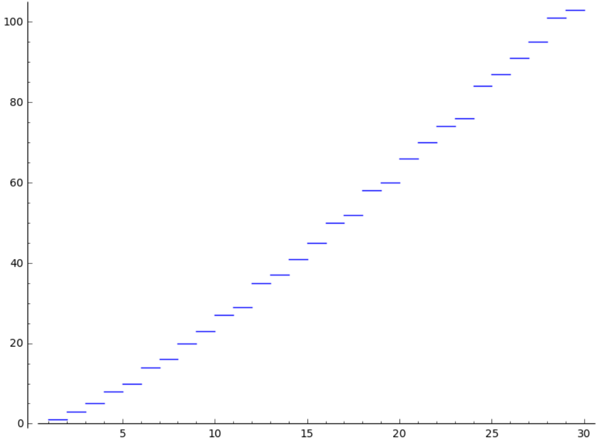
Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \le x} \tau(n) &= \sum_{n \le x} \sum_{d \mid n} 1 = \sum_{n \le x} \sum_{\substack{(d,e) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ de = n}} 1 = \sum_{\substack{(d,e) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ de \le x}} 1 = \\ &= \sum_{d \le x} \sum_{e \le \frac{x}{d}} 1 = \sum_{d \le x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor , \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. ■

Wir wollen uns mit dem Wachstum der Funktion $\sum_{n \le x} \tau(n)$ beschäftigen. Dies ist auch unter den Namen „Dirichlets Teilerproblem“ („Dirichlet's divisor problem“) bekannt.

Die folgende Skizze zeigt die Treppenfunktion $x \mapsto \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$. (Wegen $\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{n} \right\rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion in den Intervallen $[n, n+1)$ konstant.)



Wir erinnern zunächst an das Ergebnis

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x} \text{ mit } |a(x)| \leq 1 \text{ für } x \geq 1.$$

Multipliziert man diese Darstellung mit x, erhält man bereits eine Approximation für $\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$.

Satz

Für $x \geq 1$ gilt

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + \gamma x + r(x) \; \textit{mit} \; -x - 1 \leq r(x) \leq 1.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + O(x).$$

Beweis:

- Wir verwenden
$$\sum_{n\le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x} \text{ mit } |a(x)| \le 1 \text{ für } x \ge 1$$
und erhalten
$$\sum_{n\le x} \frac{x}{n} = x\log x + \gamma x + a(x).$$

- Nun ist
$$0 \le \sum_{n\le x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) \le \sum_{n\le x} 1 = \lfloor x \rfloor \le x.$$
Schreiben wir also
$$\sum_{n\le x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = b(x)x, \quad \text{so gilt} \quad 0 \le b(x) \le 1.$$

- Es folgt
$$\sum_{n\le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n\le x} \frac{x}{n} - \sum_{n\le x} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = x\log x + \gamma x + a(x) - b(x)x.$$
Schreiben wir $r(x) = a(x) - b(x)x$, so haben wir die gewünschte Darstellung.
Außerdem gilt
$$r(x) = a(x) - b(x)x \le a(x) \le 1 \quad \text{und} \quad r(x) = a(x) - b(x)x \ge -1 - x,$$
wie behauptet. ∎

Dirichlet konnte die letzte Abschätzung $\sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + O(x)$ deutlich verbessern [Chandrasekharan 1968, S.53], [Jameson 2003, S.82]:

Satz (Dirichlet)

Für $x \ge 1$ gilt

$$\sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + (2\gamma - 1)x + r(x)\sqrt{x} \textit{ mit } |r(x)| \le 5,$$

Insbesondere ist

$$\sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Dabei bezeichnet $\gamma = 0.5772\ldots$ die Eulersche Konstante.

Beweis:

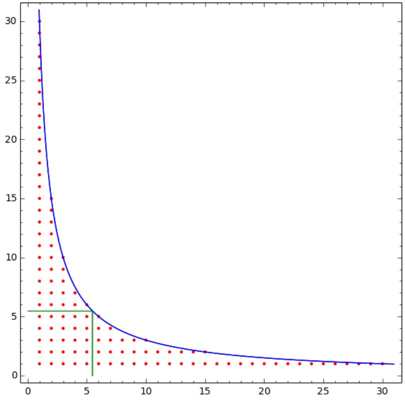
- Es gilt (für $x \ge 1$)

$$\sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \le x} \sum_{m \le \frac{x}{n}} 1 = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ mn \le x}} 1 = \#\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : mn \le x\}.$$

Wir müssen also die Mächtigkeit $\#M(x)$ der Menge

$$M(x) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : mn \le x\}$$

untersuchen. $M(x)$ besteht aus den Punkten $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die unterhalb der Hyperbel $v = \frac{x}{u}$ liegen, wenn wir als Koordinaten u, v verwenden.



- Wir betrachten noch folgende Teilmengen:

$$\begin{aligned} M_1(x) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq \sqrt{x}, mn \leq x\}, \\ M_2(x) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \leq \sqrt{x}, mn \leq x\}. \end{aligned}$$

Ist $(m,n) \in M(x)$, so gilt $m \leq \sqrt{x}$ oder $n \leq \sqrt{x}$, also

$$M(x) = M_1(x) \cup M_2(x).$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} M_1(x) \cap M_2(x) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq \sqrt{x}, n \leq \sqrt{x}, mn \leq x\} = \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m \leq \sqrt{x}, n \leq \sqrt{x}\} = \\ &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq m \leq \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor, 1 \leq n \leq \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor\} \end{aligned}$$

und damit

$$\# M_1(x) \cap M_2(x) = \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2.$$

Natürlich ist

$$M_1(x) \to M_2(x), \quad (m,n) \mapsto (n,m)$$

eine Bijektion. Daher folgt

$$\# M(x) \quad = \quad \# M_1(x) + \# M_2(x) - \# M_1(x) \cap M_2(x) = 2 \# M_1(x) - \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2.$$

- Es ist

$$\# M_1(x) = \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N} \\ m \leq \sqrt{x} \\ mn \leq x}} 1 = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \sum_{n \leq \frac{x}{m}} 1 = \sum_{m \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

und damit

$$\sum_{n \leq x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 2 \cdot \sum_{n \leq \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2.$$

- Wir schätzen nun

$$\sum_{n \le \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor$$

ab:

  - Die Formel

$$\sum_{n \le x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + \frac{a(x)}{x} \text{ mit } |a(x)| \le 1 \text{ für } x \ge 1$$

liefert

$$\begin{aligned} \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{x}{n} &= x \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{1}{n} = x \cdot \left(\log \sqrt{x} + \gamma + \frac{a(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} x \log x + \gamma x + a(\sqrt{x})\sqrt{x}. \end{aligned}$$

  - Es ist

$$0 \le \sum_{n \le \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) \le \sum_{n \le \sqrt{x}} 1 = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \le \sqrt{x}.$$

Also können wir schreiben

$$\sum_{n \le \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = b(x)\sqrt{x} \text{ mit } 0 \le b(x) \le 1.$$

  - Es folgt

$$\sum_{n \le \sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \le \sqrt{x}} \frac{x}{n} - \sum_{n \le \sqrt{x}} \left(\frac{x}{n} - \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor \right) = \frac{1}{2} x \log x + \gamma x + a(\sqrt{x})\sqrt{x} - b(x)\sqrt{x}.$$

- Wir schreiben
$$\sqrt{x} = \lfloor \sqrt{x} \rfloor + c(x) \text{ mit } 0 \le c(x) < 1.$$

- Es folgt nun
$$\begin{aligned}
\sum_{n\le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor &= 2 \cdot \sum_{n\le\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2 = \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x \log x + \gamma x + a(\sqrt{x})\sqrt{x} - b(x)\sqrt{x} \right) - (\sqrt{x} - c(x))^2 = \\
&= x \log x + 2\gamma x + 2a(\sqrt{x})\sqrt{x} - 2b(x)\sqrt{x} - x + 2c(x)\sqrt{x} - c(x)^2 = \\
&= x \log x + (2\gamma - 1)x + \left(2a(\sqrt{x}) - 2b(x) + 2c(x) - \frac{c(x)^2}{\sqrt{x}} \right) \cdot \sqrt{x}.
\end{aligned}$$

Schreiben wir also
$$\sum_{n\le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + (2\gamma - 1)x + r(x)\sqrt{x},$$
so gilt
$$r(x) = 2a(\sqrt{x}) - 2b(x) + 2c(x) - \frac{c(x)^2}{\sqrt{x}}$$
und mit $|a(x)| \le 1$, $0 \le b(x) \le 1$, $0 \le c(x) \le 1$ dann
$$r(x) \le 2 + 2 = 4 \quad \text{und} \quad r(x) \ge -2 - 2 - 1 = -5,$$
also
$$|r(x)| \le 5.$$
Dies beweist die Behauptung. ■

Bemerkung: Definieren wir (für $x \geq 1$)

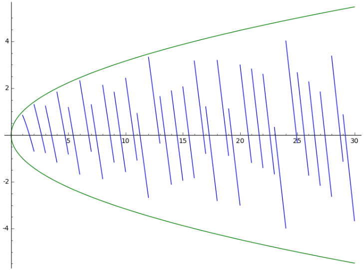
$$\Delta(x) = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - \big(x \log x + (2\gamma - 1)x\big),$$

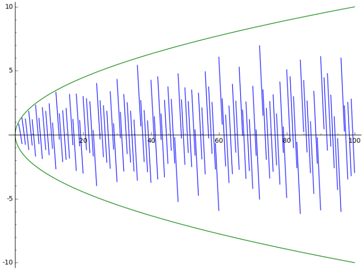
so lieferte der erste Satz des Abschnitts $\Delta(x) = O(x)$, der Satz von Dirichlet aber $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$. Das **Dirichletsche Teilerproblem** ([Brüdern 1995, 4.3] (**Dirichlet divisor problem**) fragt nach dem kleinsten Exponenten α mit

$$\Delta(x) = O(x^{\alpha}).$$

Eine Zusammenstellung neuerer Ergebnisse findet man unter http://mathworld.wolfram.com/DirichletDivisorProblem.html.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Funktionen
$\Delta(x) = \sum_{n \le x} \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - (x \log x + (2\gamma - 1)x)$ und $\pm\sqrt{x}$.





Abschnitt 3.9: Die Anzahl $\omega(n)$ der verschiedenen Primteiler von n

Wir definieren

$$\omega(n) = \#\{p : p \mid n\} = \sum_{p \mid n} 1,$$

d.h. $\omega(n)$ ist die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n. Ist $n = p_1^{e_1} \dots p_r^{e_r}$ die Primfaktorzerlegung von n, so ist also $\omega(n) = r$.

Beispiele:

n	Primfaktorzerlegung	$\omega(n)$
12	$2^2 \cdot 3$	2
123	$3 \cdot 41$	2
1234	$2 \cdot 617$	2
12345	$3 \cdot 5 \cdot 823$	3
123456	$2^6 \cdot 3 \cdot 643$	3
1234567	$127 \cdot 9721$	2
12345678	$2 \cdot 3^2 \cdot 47 \cdot 14593$	4
123456789	$3^2 \cdot 3607 \cdot 3803$	3

Bemerkungen:

- Es ist $\omega(1) = 0$ und $\omega(n) \geq 1$ für $n \geq 2$.
- Genau dann ist $\omega(n) = 1$, wenn n eine Primzahlpotenz p^k ist.
- Sind m und n teilerfremde natürliche Zahlen, so gilt offensichtlich $\omega(mn) = \omega(m) + \omega(n)$.

Wir wollen $\omega(n)$ nach oben abschätzen.

Satz

Sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, ... die Folge der Primzahlen und

$$n_k = p_1 p_2 \dots p_k = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

das Produkt der ersten k Primzahlen, also

$$n_1 = 2, \quad n_2 = 2 \cdot 3 = 6, \quad n_3 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30, \quad n_4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, \quad \dots$$

Es gilt:

- *Gilt der Primzahlsatz, so ist*

$$\omega(n_k) \sim \frac{\log n_k}{\log \log n_k}, \text{ d.h. } \lim_{k\to\infty} \frac{\omega(n_k) \cdot \log \log n_k}{\log n_k} = 1.$$

- *Für $k \geq 2$ gilt*

$$\omega(n_k) \leq 3.421 \frac{\log n_k}{\log \log n_k}.$$

  (Im Fall $k = 1$ ist $n_1 = 2$ und $\frac{\log 2}{\log \log 2} \approx -1.89$.)
- *Für $n \geq 3$ gilt*

$$\omega(n) \leq 3.421 \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Beweis:

- Für $n_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ gilt

$$\omega(n_k) = k = \pi(p_k), \quad e^{\vartheta(p_k)} = \prod_{p \le p_k} p = n_k,$$

also

$$\frac{\omega(n_k) \cdot \log\log n_k}{\log n_k} = \frac{\pi(p_k) \cdot \log \vartheta(p_k)}{\vartheta(p_k)}.$$

- Es folgt

$$\frac{\omega(n_k) \cdot \log\log n_k}{\log n_k} = \frac{\pi(p_k) \cdot \log \vartheta(p_k)}{\vartheta(p_k)} = \frac{\pi(p_k) \log p_k}{p_k} \cdot \frac{p_k}{\vartheta(p_k)} \cdot \frac{\log \vartheta(p_k)}{\log p_k}.$$

Der Primzahlsatz liefert

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\pi(p_k) \cdot \log p_k}{p_k} = 1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\vartheta(p_k)}{p_k} = 1,$$

und damit natürlich auch

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log \vartheta(p_k)}{\log p_k} = 1,$$

woraus dann

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\omega(n_k) \cdot \log\log n_k}{\log n_k} = 1$$

folgt.

- Wir haben in Kapitel 2 folgende Abschätzungen hergeleitet:

$$0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}$$

und

$$0.5 \cdot x \overset{x\geq 11}{\leq} \vartheta(x) \overset{x\geq 0}{\leq} 1.4 \cdot x.$$

Wegen $p_5 = 11 \geq 11$ folgt dann für $k \geq 5$

$$\begin{aligned} \frac{\omega(n_k) \cdot \log\log n_k}{\log n_k} &= \frac{\pi(p_k) \cdot \log \vartheta(p_k)}{\vartheta(p_k)} \leq \\ &\leq \frac{1.5 \cdot \frac{p_k}{\log p_k} \cdot \log(1.4\, p_k)}{0.5 \cdot p_k} = \\ &= 3 \cdot \frac{\log(1.4) + \log p_k}{\log p_k} = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{\log 1.4}{\log p_k} + 1\right) \leq 3 \cdot \left(\frac{\log 1.4}{\log 11} + 1\right) \leq \\ &\leq 3.421. \end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt auch für $k = 1, 2, 3, 4$, wie man der nachfolgenden Tabelle entnehmen kann.

Beweis:

- Wir betrachten die Funktion

$$f : (1, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \frac{\log\log x}{\log x}.$$

Es ist

$$f'(x) = -\frac{\log\log x - 1}{x(\log x)^2} = -\frac{\log\frac{\log x}{e}}{x(\log x)^2} = -\frac{\log\frac{\log x}{\log e^e}}{x(\log x)^2}.$$

Für $x \in (1, e^e)$ ist $f(x)$ streng monoton steigend, für $x \in (e^e, \infty)$ ist $f(x)$ streng monoton fallend. Dabei ist $e^e \approx 15.15$. Insbesondere folgt

$$f(x) \leq f(e^e) = \frac{1}{e} \leq 0.36788.$$

Es ist

$$f(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x \in (1, e), \\ > 0 & \text{für } x \in (e, \infty). \end{cases}$$

- Für $n \geq 3$ mit $\omega(n) \in \{1, 2\}$ gilt dann die triviale Abschätzung

$$\frac{\omega(n) \cdot \log\log n}{\log n} = \omega(n) \cdot f(n) \leq \omega(n) \cdot f(e^e) = \frac{\omega(n)}{e} \leq \frac{2}{e} \leq 0.74.$$

- Sei $\in \mathbb{N}$ mit $k = \omega(n) \geq 3$. Dann ist $n \geq n_k \geq 30$. Es folgt

$$\frac{\omega(n) \cdot \log\log n}{\log n} = \omega(n) \cdot f(n) \leq \omega(n) \cdot f(n_k) = \omega(n_k) \cdot f(n_k) \leq 3.421.$$

Es folgt die Behauptung. ■

k	n_k	$\frac{\omega(n_k)\cdot\log\log n_k}{\log n_k}$
1	2	-0.528766
2	6	0.650978
3	30	1.07973
4	210	1.25418
5	2310	1.32153
6	30030	1.35778
7	510510	1.37192
8	9699690	1.38146
9	223092870	1.38401
10	6469693230	1.38002
11	200560490130	1.37753
12	7420738134810	1.37227
13	304250263527210	1.36710
14	13082761331670030	1.36336
15	614889782588491410	1.35959
16	32589158477190044730	1.35502
17	1922760350154212639070	1.35006
18	117288381359406970983270	1.34614
19	7858321551080267055879090	1.34195
20	557940830126698960967415390	1.33810
21	40729680599249024150621323470	1.33497
22	3217644767340672907899084554130	1.33166
23	267064515689275851355624017992790	1.32859
24	23768741896345550770650537601358310	1.32544
25	2305567963945518424753102147331756070	1.32201
26	232862364358497360900063316880507363070	1.31885
27	23984823528925228172706521638692258396210	1.31616
28	2566376117594999414479597815340071648394470	1.31365
29	279734996817854936178276161872067809674997230	1.31149
30	31610054640417607788145206291543662493274686990	1.30947
31	4014476939333036189094441199026045136645885247730	1.30680
32	525896479052627740771371797072411912900610967452630	1.30433
33	72047817630210000485677936198920432067383702541010310	1.30191
34	10014646650599190067509233131649940057366334653200433090	1.29976
35	1492182350939279320058875736615841068547583863326864530410	1.29744
36	225319534991831177328890236228992001350685163362356544091910	1.29537
37	35375166993717494840635767087951744212057570647889977422429870	1.29333
38	5766152219975951659023630035336134306565384015606066319856068810	1.29134
39	962947420735983927056946215901134429196419130606213075415963491270	1.28948
40	166589903787325219380851695350896256250980509594874862046961683989710	1.28765
41	29819592777931214269172453467810429868925511217482600306406141434158090	1.28586
42	5397346292805549782720214077673687806275517530364350655459511599582614290	1.28424
43	1030893141925860008499560888835674370998623848299590975192766715520279329390	1.28252
44	198962376391690981640415251545285153602734402721821058212203976095413910572270	1.28097
45	39195588149163123383161804554421175259738677336198748467804183290796540382737190	1.27949
46	7799922041683461553249199106329813876687996789903550945093032474868511536164700810	1.27816
47	1645783550795210387735581011435590727981167322669649249414629852197255934130751870910	1.27668
48	367009731827331916465034565550136732339800312955331782619462457039988073311157667212930	1.27510
49	83311209124804345037562846379881038241134671040860314654617977748077292641632790457335110	1.27360

Hier endete die Vorlesung am 9.12.2020.

Satz

Bezeichnet

$$c_1 = \lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{p\le x}\frac{1}{p} - \log\log x\Big) \approx 0.2615,$$

so gilt für $x \ge 2$

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n) - \log\log x - c_1\right| \le \frac{5.6}{\log x},$$

insbesondere also

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n) = \log\log x + c_1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n)$ ist die durchschnittliche Anzahl der Primteiler der Zahlen $\le x$.

Beweis: Durch die Primzahl p sind genau $\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor$ Zahlen $\leq x$ teilbar. Daher gilt

$$\sum_{n\leq x} \omega(n) = \sum_{n\leq x} \sum_{p|n} 1 = \sum_{p\leq x} \sum_{\substack{n\leq x \\ p|n}} 1 = \sum_{p\leq x} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \sum_{p\leq x} \frac{x}{p} - \sum_{p\leq x} (\frac{x}{p} - \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor).$$

Nun haben wir gezeigt, dass gilt

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + \frac{a(x)}{\log x} \quad \text{mit} \quad |a(x)| \leq 4.$$

Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n\leq x} \omega(n) - x\log\log x - c_1 x \right| &= \left| x \sum_{p\leq x} \frac{1}{p} - \sum_{p\leq x} \left(\frac{x}{p} - \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor \right) - x\log\log x - c_1 x \right| = \\
&= \left| x(\log\log x + c_1 + \frac{a(x)}{\log x}) - \sum_{p\leq x} (\frac{x}{p} - \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor) - x\log\log x - c_1 x \right| \leq \\
&\leq \frac{|a(x)|x}{\log x} + \sum_{p\leq x} (\frac{x}{p} - \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor) \leq \frac{4x}{\log x} + \pi(x) \leq \frac{4x}{\log x} + \frac{1.6x}{\log x} \leq \frac{5.6x}{\log x},
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Bemerkung: Der Satz besagt, dass Zahlen in der Größenordnung von x durchschnittlich ungefähr $\log\log x + c_1 \approx \log\log x$ verschiedene Primteiler haben. Dabei ist das Wort „durchschnittlich" wie im Satz zu verstehen.

Beispiele:

x	$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\omega(n)$	$\log\log x + c_1$	$\frac{5.6}{\log x}$
10	1.10	1.10	2.43
100	1.71	1.79	1.22
1000	2.13	2.19	0.81
10000	2.43	2.48	0.61
100000	2.66	2.70	0.49
1000000	2.85	2.89	0.41

Für RSA-Verschlüsselung benutzt man zur Zeit Zahlen mit 4096 Bit. Solche haben ungefähr 1233 Dezimalstellen. Im Durchschnitt haben Zahlen in dieser Größenordnung ungefähr

$$\log\log 2^{4096} + c_1 \approx 8.21$$

verschiedene Primteiler.

Heuristische Betrachtung: Wir nehmen nun an — was mathematisch so nicht zu rechtfertigen ist —, n ist eine „durchschnittliche" Zahl mit Primfaktorzerlegung $n = p_1 \dots p_k$ (mit maximalem Primteiler p_k), und auch $\frac{n}{p_k} = p_1 \dots p_{k-1}$ ist „durchschnittlich". Dann sollte gelten

$$k = \omega(n) \approx \log\log n \quad \text{und} \quad k-1 = \omega\left(\frac{n}{p_k}\right) \approx \log\log \frac{n}{p_k}.$$

Es folgt

$$1 = k-(k-1) \approx \log\log n - \log\log \frac{n}{p_k} = \log \frac{\log n}{\log \frac{n}{p_k}}, \quad \text{also} \quad e \approx \frac{\log n}{\log \frac{n}{p_k}}$$

und damit

$$\log n \approx e \log \frac{n}{p_k}, \quad \text{also} \quad n^{1/e} \approx \frac{n}{p_k}, \quad \text{also} \quad p_k \approx n^{1-1/e} \approx n^{0.6321}$$

und

$$\frac{\log p_k}{\log n} \approx 1 - \frac{1}{e} = 0.6321.$$

Da $\log n$ in etwa proportional zur Anzahl der Dezimalstellen von n ist, kann man also sagen, dass der größte Primteiler p_k von n ungefähr 63% der Dezimalstellen von n hat. Die folgende Tabelle illustriert diese heuristischen Überlegungen.

Beispiele: Wir haben die ersten 50 Zahlen $n > 10^{31}$ faktorisiert, jeweils $\omega(n)$, den maximalen Primteiler $p_{\max}$ von n und $\frac{\log p_{\max}}{\log n}$ bestimmt.

n	Primfaktorzerlegung von n	$\omega(n)$	$\frac{\log p_{\max}}{\log n}$
$10^{31}+1$	$11 \cdot 909090909090909090909090909091$	2	0.966407
$10^{31}+2$	$2 \cdot 3 \cdot 67 \cdot 24875621890547263681592039801$	4	0.915993
$10^{31}+3$	$13 \cdot 23 \cdot 1453 \cdot 17021 \cdot 1352315810743633261969$	5	0.681648
$10^{31}+4$	$2^2 \cdot 7 \cdot 619 \cdot 96266771 \cdot 251574767 \cdot 23823624521$	6	0.334742
$10^{31}+5$	$3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 89 \cdot 4542364571 \cdot 97003593963096329$	6	0.547961
$10^{31}+6$	$2 \cdot 19 \cdot 953 \cdot 11815707734539 \cdot 23370271767211$	5	0.431247
$10^{31}+7$	$900821 \cdot 11100984546319413068745067$	2	0.807915
$10^{31}+8$	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 2638907 \cdot 526312177310109408 51227$	4	0.732943
$10^{31}+9$	$18821053 \cdot 531319900113984058171453$	2	0.765334
$10^{31}+10$	$2 \cdot 5 \cdot 61 \cdot 101 \cdot 3541 \cdot 9901 \cdot 27961 \cdot 4188901 \cdot 39526741$	9	0.245061
$10^{31}+11$	$3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 20278493 \cdot 443066748887998794079$	5	0.666015
$10^{31}+12$	$2^2 \cdot 11 \cdot 129339377 \cdot 1757181243208920611449$	4	0.685317
$10^{31}+13$	$71 \cdot 629987 \cdot 223568217157711526218169$	3	0.753207
$10^{31}+14$	$2 \cdot 3 \cdot 79 \cdot 11411 \cdot 81432971 \cdot 22703754031979731$	6	0.527616
$10^{31}+15$	$5 \cdot 29 \cdot 199 \cdot 8837 \cdot 1632417869 \cdot 24023856568681$	6	0.431634
$10^{31}+16$	$2^4 \cdot 13 \cdot 251 \cdot 1312183 \cdot 1459716565470523429 69$	5	0.650460
$10^{31}+17$	$3^3 \cdot 24273006892919 \cdot 15258528620053909$	3	0.522049
$10^{31}+18$	$2 \cdot 7 \cdot 28033828861 \cdot 25479420518237224667$	4	0.626006
$10^{31}+19$	$587 \cdot 17035775127768313458262350937$	2	0.910689
$10^{31}+20$	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 43 \cdot 84623843 \cdot 45802327746425579083$	6	0.634222
$10^{31}+21$	$31 \cdot 173 \cdot 156110623 \cdot 1152361759 \cdot 10365038231$	5	0.323083
$10^{31}+22$	$2 \cdot 17 \cdot 294117647058823529411764705883$	3	0.950597
$10^{31}+23$	$3 \cdot 11^3 \cdot 97 \cdot 122049833 \cdot 211539642482385911$	5	0.558884
$10^{31}+24$	$2^3 \cdot 420799 \cdot 2970539378658219244817597$	3	0.789446
$10^{31}+25$	$5^2 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 131 \cdot 35343237863 \cdot 649577122635449$	6	0.477827
$10^{31}+26$	$2 \cdot 3^2 \cdot 23 \cdot 563 \cdot 4360091 \cdot 984001386679739 8723$	6	0.612677
$10^{31}+27$	$37^2 \cdot 47 \cdot 509 \cdot 78779 \cdot 3875881119002942099$	5	0.599625
$10^{31}+28$	$2^2 \cdot 2500000000000000000000000000007$	2	0.980579
$10^{31}+29$	$3 \cdot 13 \cdot 113 \cdot 12438490371493 \cdot 182427066757679$	5	0.460035
$10^{31}+30$	$2 \cdot 5 \cdot 1859827 \cdot 537684419034673655130289$	4	0.765501
$10^{31}+31$	$41 \cdot 655912249 \cdot 734808341 \cdot 506053373699$	4	0.377555
$10^{31}+32$	$2^5 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 569 \cdot 743 \cdot 55807 \cdot 90103763225619307$	7	0.546927
$10^{31}+33$	$10000000000000000000000000000033$	1	1.000000
$10^{31}+34$	$2 \cdot 11 \cdot 20479 \cdot 1784191 \cdot 12440196170959280723$	5	0.615962
$10^{31}+35$	$3^2 \cdot 5 \cdot 11317 \cdot 1963614228348698614670161 9$	4	0.815905
$10^{31}+36$	$2^2 \cdot 769 \cdot 3250975292587776332899869961$	3	0.887484
$10^{31}+37$	$317 \cdot 167346539 \cdot 188505489945753438299$	3	0.654043
$10^{31}+38$	$2 \cdot 3 \cdot 857 \cdot 1944768572539867755737067289$	4	0.880286
$10^{31}+39$	$7 \cdot 17 \cdot 318781 \cdot 454723 \cdot 579713866290740087$	5	0.573007
$10^{31}+40$	$2^3 \cdot 5 \cdot 157 \cdot 18737561 \cdot 1267985441 \cdot 67021328093$	6	0.349233
$10^{31}+41$	$3 \cdot 59 \cdot 137 \cdot 3413 \cdot 6089387 \cdot 19842496047528839$	6	0.525729
$10^{31}+42$	$2 \cdot 13^2 \cdot 1796167 \cdot 16471630319768733830027$	4	0.716669
$10^{31}+43$	$112031 \cdot 174091 \cdot 283573 \cdot 2527409 \cdot 715393619$	5	0.285630
$10^{31}+44$	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 244524344941 \cdot 229076894429441$	6	0.463225
$10^{31}+45$	$5 \cdot 11 \cdot 83 \cdot 454942123 \cdot 4815075133927565291$	5	0.602665
$10^{31}+46$	$2 \cdot 7 \cdot 599429 \cdot 810049 \cdot 1471034722824274109$	5	0.586052
$10^{31}+47$	$3 \cdot 193 \cdot 733 \cdot 23562288086671520498012521$	4	0.818459
$10^{31}+48$	$2^4 \cdot 1301 \cdot 994723 \cdot 16825934683 \cdot 28702608167$	5	0.337352
$10^{31}+49$	$23 \cdot 434782608695652173913043478263$	2	0.956073
$10^{31}+50$	$2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 4723 \cdot 1399606163 \cdot 10085210079364883$	6	0.516248

Der Mittelwert von $\omega(n)$ ist 4.46, während $\log\log 10^{31} + c_1 \approx 4.53$ ist, der Mittelwert von $\frac{\log p_{\max}}{\log n}$ ist 0.6373, während $1 - \frac{1}{e} \approx 0.6321$ ist.

Der Satz von Erdős-Kac

Erdős und Kac zeigten [Alon/Spencer 2016, Theorem 4.2.2, S.48], dass für große x die Anzahl der verschiedenen Primteiler $\omega(n)$ einer Zahl $n \in \{1, \ldots, \lfloor x \rfloor\}$ ungefähr normalverteilt ist mit Mittelwert $\log\log x$ und Varianz $\log\log x$:

Satz (Erdős-Kac)

Für a, b mit $-\infty \leq a < b \leq \infty$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \left\{ n \leq x : a \leq \frac{\omega(n) - \log\log x}{\sqrt{\log\log x}} \leq b \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Wir betrachten den Spezialfall $a = 0$, $b = \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \# \{ n \leq x : \omega(n) \geq \log\log x \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Beispiel: Wir betrachten $x = 10000$ mit $\log\log x \approx 2.22$:

k	$\#\{n \leq x : \omega(n) = k\}$
0	1
1	1280
2	4097
3	3695
4	894
5	33

(Hier ist $\frac{1}{x}\#\{n \leq x : \omega(n) \geq \log\log x\} = \frac{3695+894+33}{10000} = 0.4622.$)

- N. Alon, J. H. Spencer. The Probabilistic Method. Fourth Edition. Wiley, 2016.
- T. M. Apostol. Mathematical Analysis. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- T. M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 1976.
- A. Axer. Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$. Prace Matematyczno-Fizyczne 21 (1910), 65-95.
- E. Bach, J. Shallit. Algorithmic Number Theory. Volume 1: Efficient Algorithmus. The MIT Press, 1996.
- R. C. Baker, G. Harman and J. Pintz. The difference between consecutive primes, II. Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001) 532-562.
- P. T. Bateman, R. A. Horn. A Heuristic Asymptotic Formula Concerning the Distribution of Prime Numbers. Math. Comp. **16** (1962), 363-367.
- V. Bouniakowsky. Nouveaux théorèmes relatifs à la distinction des nombres premiers et à la décomposition des entiers en facteurs. Mém. Acad. Sci. St. Petersbourg (6), Sci. Math. Phys. **6** (1857), 305-329.

- J. Brüdern. Einführung in die analytische Zahlentheorie. Springer-Verlag, 1995.
- K. Chandrasekharan. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 1968.
- H. Cohen. Number Theory. Volume II: Analytic and Modern Tools. Graduate Texts in Mathematics 240. Springer-Verlag, 2007.
- H. Cramér. Some theorems concerning prime numbers. Ark. Mat. Astr. Fys. **15** (5) (1920), 1-33. Oder: Collected Works I, S.138-170.
- H. Cramér. On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arith. **2** (1) (1936), 23-46. Oder: Collected Works II, S.871-894.
- R. Crandall, C. Pomerance. Prime Numbers, A Computational Perspective. Second Edition. Springer-Verlag, 2005.
- P. G. L. Dirichlet. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1849, 69-83. Oder: Werke II, 49-66.

- P. Dusart. Sharper bounds for ψ, ϑ, π, p_k. Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation. Rapport de recherche n^0 1998-06.
- H. M. Edwards. Riemann's Zeta Function. Dover Publications, Inc., 1974.
- W. Ellison, F. Ellison. Prime Numbers. John Wiley and Sons, 1985.
- K. Ford, B. Green, S. Konyagin, T. Tao. Large gaps between consecutive prime numbers. arXiv:1408.4505v1 [math.NT].
- G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of 'partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. 44 (1923), pp. 1-70.
- G. H. Hardy, M. Riesz. The general theory of Dirichlet series. Cambridge University Press, 1915.
- G. H. Hardy, E. M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth Edition. Clarendon Press, Oxford, 1979.
- H. A. Helfgott. The ternary Goldbach conjecture is true. arXiv:1312.7748v2 [math.NT].

- D. Hensley, I. Richards. Primes in Intervals. Acta Arithmetica **25** (1974), 375-391.
- A. E. Ingham. The distribution of prime numbers. Cambridge University Press, 1932.
- G. J. O. Jameson. The Prime Number Theorem. London Mathematical Society Student Texts **53**, Cambridge University Press, 2003.
- J. Korevaar. On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem. The Mathematical Intelligencer **4** (1982), 108–115.
- E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Erster Band. Second Edition. Chelsea Publishing Company, New York, 1953.
- E. Landau. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace Matematyczno-Fizyczne 21 (1910), 97-177.
- S. Lang. Complex Analysis. Fourth Edition. Graduate Texts in Mathematics **103**. Springer, 1999.
- J. Maynard. Small gaps between primes. arXiv:1311.4600v2 [math.NT].
- J. Maynard. Large gaps between primes. arXiv:1408.5110v1 [math.NT].

H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory. Cambridge studies in advanced mathematics **97**, Cambridge University Press, 2006.

W. Narkiewicz. The Development of Prime Number Theory. Springer-Verlag, 2000.

M. B. Nathanson. Elementary Methods in Number Theory. Graduate Texts in Mathematics **195**. Springer-Verlag, 2000.

D. J. Newman. Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem. American Mathematical Monthly **87** (1980), 693–696.

O. Ramaré. On S'nirel'man's constant. Annali dela Scuola Superiore di Pisa, vol. 21, no. 4 (1995), pages 645-705.

P. Ribenboim. Die Welt der Primzahlen. Aktualisierte Übersetzung der englischen Ausgabe 'The Little Book of Bigger Primes' (2. Auflage, Springer-Verlag, 2004). Springer-Verlag, 2006.

H. Riesel. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Birkhäuser, 1985.

- J. B. Rosser, L. Schoenfeld. Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers. Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.
- W. Ruppert. Analytische Zahlentheorie II. Vorlesungsskript zu einer Vorlesung im Sommersemester 2005.
- A. Schinzel, W. Sierpiński. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Acta Arith. **4** (1958), 185-208. Erratum: **5** (1959), 259.
- K. Soundararajan. Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yildirim. Bull. AMS **44** (2007), 1-18.
- G. Tenenbaum, M. Mend'es France. The Prime Numbers and Their Distribution. AMS, 2000.
- E. C. Titchmarsh. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Second Edition. Revised by D. R. Heath-Brown. Clarendon Press, Oxford, 1986.
- D. Zagier. Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem. The American Mathematical Monthly **104** (1997), 705-708.
- Y. Zhang. Bounded gaps between primes. Annals of Mathematics. Volume 179 (2014), Issue 3, Pages 1121-1174.