Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Fragestellungen

In dieser Diplomarbeit beschäftigen wir uns mit Markovprozessen auf der komplexen Einheitskreisscheibe, welche durch iterierte Möbiustransformationen mit zufällig gewählten Matrizen gegeben sind.
Die Möbiustransformation $A\cdot : \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty$ zu einer 2×2-Matrix
$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x := \frac{ax + b}{cx + d}$$

Für das zugrundeliegende stochastische Matrizensystem gelten hierbei folgende Eigenschaften und Notationen:

Definition 1.1. Es ist $(\Sigma, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ ist S_σ eine komplexe 2×2-Matrix. Dabei sei zu jedem $\sigma \in \Sigma$ die Matrix S_σ derart gewählt, dass die Möbiustransformation $S_\sigma \cdot$ die komplexe Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ invariant lässt, d.h. $S_\sigma \cdot \mathbb{D} \subseteq \mathbb{D}$. Wegen der Analytizität von Möbiustransformationen lässt $S_\sigma \cdot$ dann auch die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ invariant.
Weiterhin ist $\omega := (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\Omega := \Sigma^{\mathbb{N}}$. Wir nehmen nun an, dass σ und die σ_n unabhängig identisch verteilt (u.i.v.) nach dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ sind. Dann ist ω verteilt nach dem Produktmaß $\mathbb{P} := \mathcal{P}^{\times \mathbb{N}}$.
Damit ist S_σ ein stochastisches Matrizensystem und

$$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{D},\, n \mapsto \zeta_n$$
$$\zeta_0 \in \mathbb{D},\ \zeta_n := S_{\sigma_n} \cdot \zeta_{n-1} \, \forall n \in \mathbb{N}$$

ein Markovprozess auf $\mathbb{D}$.
Dies definiert ein zufälliges dynamisches System auf einem zweidimensionalen Zustandsraum. Eine andere gängige Bezeichnung hierfür ist ein zweidimensionales IFS (von engl. iterated function system).
Sei $S^n_\omega := S_{\sigma_n} S_{\sigma_{n-1}} \cdots S_{\sigma_1}$. Dann ist die obige rekursive Definition der ζ_n gleichbedeutend mit

$$\zeta_0 \in \mathbb{D},\ \zeta_n := S^n_\omega \cdot \zeta_0 \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere interessieren uns hierbei Eindeutigkeit und absolute Stetigkeit invarianter Maße solcher Markovprozesse.

Definition 1.2. Sei σ eine Zufallsvariable in $(\Sigma, \mathcal{P})$, A eine Menge und D_σ ein stochastisches System von Dynamiken auf A. Ein Maß ν auf A heißt **invariant** unter D_σ bezgl. $\mathcal{P}$, wenn:

$$\nu(B) = \mathbb{E}_\sigma \nu(D_\sigma^{-1}(B)) \ \forall \text{ Borelteilmengen } B \subseteq A$$

Bemerkung: Die obige Definition ist gleichbedeutend mit:

$$\int_A d\nu(x) f(x) = \int_A d\nu(x) \mathbb{E}_\sigma f(D_\sigma(x)) \, \forall \text{ integrierbaren Funktionen } f \text{ auf } A$$

Habe zusätzlich A positives Maß und ν die Dichte ρ bezüglich des d-dimensionalen Lebesquemaßes $\mathcal{L}^d$. Dann gilt für alle Funktionen $f \in L^2(A, \nu)$:

$$\begin{aligned}
\int_A dx\ \rho(x) f(x) \quad &\overset{nachDef.}{=} \quad \int_A dx\ \rho(x) \mathbb{E}_\sigma f(D_\sigma(x)) \\
&= \quad \int_A dx'\ \mathbb{E}_\sigma \rho(D_\sigma^{-1}(x')) \frac{dD_\sigma^{-1}(x')}{dx'} f(x') \\
\Rightarrow \rho(x) \quad &= \quad \mathbb{E}_\sigma \left(\rho(D_\sigma^{-1}(x)) \frac{dD_\sigma^{-1}(x)}{dx} \right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

In Kapitel 3 zeigen wir hinreichende Voraussetzungen für die Eindeutigkeit des invarianten Maßes, für deren Beweis wir Ergebnisse aus [1] verwenden.
Die Hauptaussage des Kapitels ist dabei Folgendes:

Satz 1.1. *Es sei S_σ wie in Definition 1.1. Die Verteilung $\mathcal{P}$ der σ_n sei so, dass mindestens 2 verschiedene Werte existieren (O.B.d.A. 1 und 2), die mit Wahrscheinlichkeiten $\mathcal{P}(1) = p_1 > 0, \mathcal{P}(2) = p_2 > 0$ gewählt werden, so dass für die Matrizen $S_1 \neq S_2$ gilt:*

1. *$S_1\cdot$ und $S_2\cdot$ haben in $\mathbb{D}$ die eindeutigen Fixpunkte P_1 und P_2.*
2. *Beide Dynamiken $S_1\cdot$ und $S_2\cdot$ erfüllen die Kontraktionseigenschaft:*

$$\forall r > 0, i \in \{1, 2\} \exists N_1 = N_1(r) \in \mathbb{N} : (S_i^z)^{N_1} \cdot (\overline{\mathbb{D}}) \subseteq U_r(P_i) \qquad \text{(K)}$$

3. *Die Dynamik $S_2\cdot$ erfüllt die Rotationseigenschaft:*

$$\exists M \in GL_2(\mathbb{C}) \text{ mit } M^{-1} S_2 M \cdot z = R e^{i\alpha} z \forall z \in \mathbb{C} \qquad \text{(R)}$$

wobei $R \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in (0, 2\pi) \backslash \pi$ ist.

Seien $z_1, z_2 = 0$ die Fixpunkte von $M^{-1}S_1M\cdot$ und $M^{-1}S_2M\cdot$,
$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} | n\alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\}$ und
$n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} | n\alpha \in [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]\}$.
(n_1, n_2 existieren, da α kein Vielfaches von π ist.)
Dann hat für $z_1 \neq 0$ und $R^{n_i} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(i = 1, 2)$ die stochastische Dynamik $x \mapsto S_\sigma(x)$ auf $\mathbb{D}$ ein eindeutiges invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß ν (entsprechend der Definiton 1.2) und

$$d_{\mathcal{A}}(S^{*n}\mu, \nu) \leq (1 - \chi)^{[n/N]} \ (\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{D})),$$

Hierbei ist:

- $S^{*n}\mu$ *die Wahrscheinlichkeitsverteilung von* $S_{\sigma_n} \cdots S_{\sigma_1}(X)$*, wenn* X *die Verteilung* μ *hat*

- $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ *die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf* $\mathbb{D}$

- $\mathcal{A} := \{\overline{\mathbb{D}} \cap C | C \subset \mathbb{C}$ *und* ∂C *ist Kreis oder Gerade* $\}$

- $d_{\mathcal{A}}(\mu_1, \mu_2) := \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|, \ (\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{D}))$

Am Ende des Kapitels wenden wir diesen Satz auf eines der Beispielsysteme aus Kapitel 2 an.

Im Weiteren beschäftigen wir uns mit der Frage nach absoluter Stetigkeit des invarianten Maßes:

Definition 1.3. Sei A eine Menge, die bezüglich des Lebesquemaßes $\mathcal{L}^d$ positives Maß hat. Ein Maß μ auf A heißt **absolut stetig** (bezüglich $\mathcal{L}^d_{|A}$), g.d.w.:

$$\mu(N) = 0 \ \forall \mathcal{L}^d\text{-Nullmengen } N \subset A$$

Ist $\mathcal{L}^d(A) < \infty$ so ist dies gleichbedeutend mit:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \mathcal{L}^d(B) \leq \delta \Rightarrow \mu(B) \leq \epsilon \,\forall \text{ Borelmengen } B \subset A$$

Ist für alle $x \in \mathbb{D}$ die Übergangswahrscheinlichkeit $p(x, \cdot)$ (gegeben durch $p(x, M) = \mathcal{P}(\{\sigma \in \Sigma | S_\sigma \cdot x \in M\})$ absolut stetig, so zeigen Bhattacharya und Majumdar in [1] die absolute Stetigkeit des invarianten Maßes.
Proposition 5.2 aus [1] besagt:

Satz 1.2. *Angenommen die Übergangswahrscheinlichkeiten* $p(x, \cdot)$ *eines Markovprozesses auf einem Zustandsraum* $(B, \mathcal{B})$ *seien für jedes* $x \in B$ *absolut stetig bezüglich eines sigmaendlichen Maßes* μ*. Sei dann* ν *invariant unter* p*, so ist* ν *absolut stetig bezüglich* μ*.*

In unserem Fall ist die absolute Stetigkeit der Übergangswahrscheinlichkeiten beispielsweise dann gegeben, wenn $\Sigma \subset \mathbb{C}$ und $\mathcal{P}$ absolut stetig bezüglich der Einschränkung $\mathcal{L}^2_{|\Sigma}$ ist, sowie die Abbildungen $f_x : \Sigma \to \mathbb{D}, \ \sigma \mapsto S_\sigma \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{D}$ injektiv und deren Umkehrabbildungen $f_x^{-1} : f_x(\Sigma) \to \Sigma$ stetig sind.

Die Frage nach der absoluten Stetigkeit ist wesentlich schwieriger in dem Fall von einer Verteilung $\mathcal{P}$ mit endlichem Träger (z.B. einer Bernoulli-Verteilung). Für einen eindimensionalen Zustandsraum konnte auch bei solchen Verteilungen die absolute Stetigkeit für fast alle Elemente einer kontinuierlichen Familie von zufälligen dynamischen Systemen gezeigt werden.

So zeigt Solomyak in [6] für Lebesque-fast alle $\lambda \in (1/2, 1)$ die absolute Stetigkeit der Verteilung der zufälligen Reihe $Y_\lambda := \sum_{n=0}^{\infty} \pm\lambda^n$, wobei jedes Vorzeichen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ gewählt wird.
Diese Verteilung ist ein invariantes Maß des eindimensionalen IFS $\{f_{\lambda,-1}, f_{\lambda,1}\}$ mit $f_{\lambda,j}(x) = j + \lambda x$.
Einen einfacheren Beweis derselben Behauptung liefern Perez und Solomyak in [11].

In [9] beschäftigen sich Simon, Solomyak und Urbanski mit allgemeineren parameterabhängigen Familien parabolischer IFS. Sie zeigen dabei, dass unter bestimmten Voraussetzungen (unter anderem Transversalität und $\frac{h}{\gamma} > 1$ für alle Parameter t, wobei h die Entropie und γ der Lyapunovexponent des IFS zum Parameter t ist) das invariante Maß ν_t für fast alle t absolut stetig ist.

Ausgehend von Definition 1.1 definieren wir die kontinuierliche Familie $S_{\lambda,\sigma}$ 2-dimensionaler IFS wie folgt:

Definition 1.4. Es ist $U \subset \mathbb{R}^d$ eine nichtleere, offene Menge. Für jedes $\lambda \in \overline{U}$ ist $S_{\lambda,\sigma}$ ein zufälliges Matrizensystem, welches die Bedingungen aus Definition 1.1 erfüllt.
Weiterhin ist für jedes $\sigma \in \Sigma,\ x \in \mathbb{D}$ die Abbildung $\lambda \mapsto S_{\lambda,\sigma} \cdot x$ stetig auf $\overline{U}$.

Bei unserem Versuch, eine Strategie zum Nachweis absoluter Stetigkeit eines invarianten Maßes im zweidimensionalen Fall zu entwickeln orientieren wir uns an dem Beweis von Simon, Solomyak und Urbanski in [9] für eindimensionale IFS.

Zwei zentrale Voraussetzungen zur Anwendbarkeit dieses Beweises sind:

- Das IFS ist topologisch, was entsprechend der Definiton aus Kapitel 2 in [8] folgendermaßen definiert ist:

  Definition 1.5. Bezeiche $\widetilde{S^n_\omega} := S_{\sigma_1} S_{\sigma_2} \cdots S_{\sigma_n} = ((S_\omega^{-1})^n)^{-1}$. Das dynamische System $S_\sigma\cdot$ auf $\mathbb{D}$ heißt **topologisch** wenn zu jedem festen Code ω aus Ω ein $\xi \in \mathbb{D}$ existiert, mit

  $$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S^n_\omega} \cdot \zeta = \xi\, \forall \zeta \in \mathbb{D}$$

  Die Abbildung $\Pi : \Omega \to \mathbb{D}$, $\omega \mapsto \lim_{n\to\infty} \widetilde{S^n_\omega} \cdot \zeta$ bezeichnen wir dann als die **natürliche Projektion** zu $S_\sigma\cdot$. Die natürliche Projektion zu einer parameterabhängigen Familie $S_{\lambda,\sigma}$ von IFS bezeichnen wir mit Π_λ.

- Es gilt die Transversalitätsbedingung. In [9], Gleichung (2.9) ist diese für ein eindimensionales IFS gegeben. Die Entsprechung für ein zweidimensionales

IFS lautet:
Transversalitätsbedingung: Es gibt eine Konstante C, so dass für alle ω, τ in Ω mit $\omega_1 \neq \tau_1$ gilt:

$$\mathcal{L}^d\{\lambda \in U : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\} \leq Cr^2 \tag{2}$$

Wir konnten die Transversalitätsbedingung in keinem Beispielsystem nachweisen.

In Kapitel 6 betrachten wir zufällige dynamische Systeme, die bezüglich einer geeigneten Metrik auf $\mathbb{D}$ hyperbolisch sind. Wie wir dort zeigen sind solche Systeme topologisch:

Satz 1.3. *Zu dem zweidimensionalen IFS $S_\sigma\cdot$ gebe es eine kompakte Menge $K \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, eine Metrik d auf K sowie zwei Zahlen $\kappa \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\xi, \zeta \in K, \omega \in \Omega$ gilt:*

- $S_\omega^N \cdot \overline{\mathbb{D}} \subseteq K$
- $d(S_\omega^N \cdot \xi, S_\omega^N \cdot \zeta) \leq \kappa\, d(\xi, \zeta)$
- $\sup_{\xi,\zeta \in K} d(\xi, \zeta) < \infty$

Dann ist das IFS topologisch.

Für den Fall, dass die Transversalitätsbedingung gilt, können wir in Kapitel 7 die absolute Stetigkeit eines invarianten Maßes von $S_{\lambda,\sigma}$ für fast alle λ in U mit $\frac{h}{\gamma_\lambda} > 4$ nachweisen, wobei h die Entropie und γ_λ der Lyapunovexponent des IFS $S_{\lambda,\sigma}\cdot$ ist.

Definition 1.6. Die **Entropie** h zu dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{P}$ auf der endlichen Menge Σ ist gegeben durch:

$$h := -\sum_{\sigma \in \Sigma} \mathcal{P}(\sigma) \log \mathcal{P}(\sigma)$$

Definition 1.7. Der **Lyapunovexponent** γ des stochastischen Matrizensystems S_σ ist gegeben durch:

$$\gamma := \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_\omega \log \|S_{\sigma_N} S_{\sigma_{N-1}} \dots S_{\sigma_1}\| \tag{3}$$

wobei $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \|S_{\sigma_N} S_{\sigma_{N-1}} \dots S_{\sigma_1}\|$ $\mathbb{P}$-f.s. existiert und konstant ist.

Satz 1.4. *Sei $S_{\lambda,\sigma}$ wie in Definition 1.4. Weiterhin sei $S_{\lambda,\sigma}$ topologisch und erfülle die Transversalitätsbedingung. Der Lyapunovexponent γ_λ sei stetig in $\lambda \in U$. Dann ist für Lebesque-fast alle λ in der Teilmenge $U' := \{\lambda \in U : \frac{h}{\gamma} > 4\}$ von U das Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu_\lambda := \mathbb{P} \circ \Pi_\lambda^{-1}$ absolut stetig bezüglich des Lebesquemaßes auf $\mathbb{D}$.*

Offensichtlich ist das Maß ν_λ aus obigem Satz invariant unter $S_{\lambda,\sigma}\cdot$.

2 Motivation durch ein Beispielsystem

Motiviert durch die Festkörperphysik betrachten wir einen Hamiltonoperator H auf $l^2(\mathbb{Z})$, welcher gegeben ist durch:
$(H\psi)_n = t_{n+1}\psi_{n+1} + t_n\psi_{n-1} + \lambda v_n \psi_n$ wobei die $\sigma_n := (t_n, v_n)$ $(n \in \mathbb{Z})$ u.i.v. Zufallsvariablen in dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Sigma, \mathcal{P}) = (\Sigma_n, \mathcal{P}_n)$ sind. Dabei ist $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ beschränkt.

Sei $\mathbb{P}$ das Produktmaß der $\mathcal{P}_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Erfüllt ein $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ die Schrödingergleichung $H\psi = z\psi$ zu einer komplexen "Energie" $z \in \mathbb{C}$ so gilt für die Transfermatrix $T_n^z := T_{\sigma_n}^z := \begin{pmatrix} (z-\lambda v_n)/t_n & -t_n \\ 1/t_n & 0 \end{pmatrix}$ folgendes:

$$\begin{pmatrix} t_{n+1}\psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = T_n^z \begin{pmatrix} t_n\psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} = T_n^z T_{n-1}^z \dots T_1^z \begin{pmatrix} t_1\psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

Ist dieses $\psi \in l^2(\mathbb{Z})\backslash\{0\}$, so ist ψ ein Eigenvektor von H.

Mit Hilfe dieser Matrix T_σ^z lassen sich zwei verwandte Dynamiken definieren welche, wie wir später sehen werden, unter anderem für die Berechnung des Lyapunovexponenten des Systems der T_σ^z von Bedeutung sind (siehe Kapitel 4).:

1. Die rekursive Gleichung
$$e_n := \frac{\prod_{k=1}^n T_k^z e}{\|\prod_{k=1}^n T_k^z e\|} = \frac{T_n^z e_{n-1}}{\|T_n^z e_{n-1}\|}$$
ergibt für $e_0 \in \mathbb{C}P(1)$ einen Markov-Prozess auf $\mathbb{C}P(1)$.

2. Sei $T_n^z\cdot$ die Möbiustransformation mit T_n^z. Dann definiert
$$\zeta_n = T_n^z \cdot \zeta_{n-1}$$
mit $\zeta_0 \in \mathbb{C} \cup \infty$ einen Markovprozess auf $\mathbb{C} \cup \infty$.

Unter der Abbildung $\pi : \mathbb{C}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{C} \cup \infty : \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{a_n}{b_n}$ wird die Dynamik aus 1. zu der aus 2..

Betrachten wir nun den Fall dass z in der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathbb{H}}$ liegt. (Dabei ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0\}$.)
Dann lässt $T_\sigma^z \cdot$ die obere Halbebene $\mathbb{H}$ invariant, d.h. $T_\sigma^z \cdot \mathbb{H} \subseteq \mathbb{H} \, \forall \sigma \in \Sigma$, so dass $T_\sigma^z \cdot$ als eine Dynamik auf $\mathbb{H}$ betrachtet werden kann.

Mit Hilfe der Cayleytransformation $\mathcal{C} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}; \xi = \mathcal{C} \cdot \zeta$ und $z = E + i\epsilon$ lässt sich die Dynamik dann zu einer Dynamik auf der beschränkten Menge $\mathbb{D} := \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ transformieren:

$$\begin{aligned} S_\sigma^z \quad &:= \mathcal{C} T_\sigma^z \mathcal{C}^* = \frac{1}{2t} \begin{pmatrix} z - \lambda v - i(1+t^2) & z - \lambda v - i(1-t^2) \\ z - \lambda v + i(1-t^2) & z - \lambda v + i(1+t^2) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2t} \begin{pmatrix} E - \lambda v + i(\epsilon - (1+t^2)) & E - \lambda v + i(\epsilon - (1-t^2)) \\ E - \lambda v + i(\epsilon + (1-t^2)) & E - \lambda v + i(\epsilon + (1+t^2)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Möbiustransformation $S_\sigma^z \cdot$ bildet also eine Dynamik auf $\mathcal{C} \cdot \mathbb{H} = \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$.
Wählt man also ein $z \in \overline{\mathbb{H}}$ und einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für σ so ist S_σ^z ein stochastisches Matrizensystem der Form, welche wir in Kapitel 1 definiert haben.

2.1 Dyson- und Andersonmodell

Besonders interessieren uns hierbei zwei Varianten dieses Modells:
Das " Anderson-Modell " $(H\psi)_n = \psi_{n+1} + \psi_{n-1} + \lambda v_n \psi_n$ aus [3] erhält man in dem Fall $t_n = 1 \forall n$,
Das " Dyson-Modell " $(H\psi)_n = t_{n+1}\psi_{n+1} + t_n \psi_{n-1}$ aus [2] in dem Fall $v_n = 0, t_n > 0 \forall n$. Wenn wie uns auf dieses Modell beziehen schreiben wir in Zukunft T_t^z statt $T_{(t,1)}^z$.

Sei $z = E + i\epsilon$, $E, \epsilon \in \mathbb{R}$.
Im " Anderson-Modell " hat T_σ^z die Form

$$\begin{aligned} T_\sigma^z = \begin{pmatrix} z - \lambda v_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda v_n & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda v_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Im “ Dyson-Modell “ hat T_σ^z die Form

$$T_\sigma^z = \begin{pmatrix} z/t_n & -t_n \\ 1/t_n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/t_n & -t_n \\ 1/t_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i\epsilon & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/t_n & -t_n \\ 1/t_n & 0 \end{pmatrix}$$

Hierbei tun sich zwei Spezialfälle besonders hervor:

- Für $z \in \mathbb{R}$ ist $T_\sigma^z \cdot \mathbb{H} = \mathbb{H}$. Ist weiterhin $0 < |z - \lambda v| < 2t$ für $t \in \mathbb{R}^+$, $v \in \mathbb{R}$, so gibt es eine Transformationsmatrix M und ein $\eta \in [0, 2\pi)$ so, dass $M^{-1} S_{(t,v)}^z M = \begin{pmatrix} e^{i\eta} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta} \end{pmatrix}$ ist (und somit durch Möbiustransformation als Rotation um den Nullpunkt wirkt) und $M \cdot \mathbb{D} = \mathbb{D}$ ist.

- Im Dyson-Modell lässt $T_t^z \cdot$ für $z \in i\mathbb{R}^+$ die Halbgerade $i\mathbb{R}^+$ invariant. Damit lässt $S_t^z \cdot$ die Strecke $(-1, 1) = \mathcal{C} \cdot i\mathbb{R}^+$ invariant und kann somit als eindimensionale Dynamik auf dieser Strecke betrachtet werden.

2.2 Eigenschaften des Dyson-Modells

Wir betrachten nun das “ Dyson-Modell “ in dem Fall, dass $z = E + i\epsilon$ mit $E \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in \mathbb{R}^+$.
Wir zeigen hier, dass für bestimmte Einschränkungen an ϵ die Kontraktions- und Rotationsbedingung erfüllt sind, welche wir in Kapitel 3 für den Beweis der Eindeutigkeit des invarianten Maßes verwenden.

Lemma 2.1. *Für $\epsilon > 0, t > 0$ fest, erfüllt S_t^z die Kontraktionsbedingung (K), d.h.:*

$$\forall r > 0 \exists N_1 = N_1(r) \in \mathbb{N} : (S_t^z)^{N_1} \cdot (\overline{B}) \subseteq U_r(P)$$

wobei P der eindeutige Fixpunkt von S_t^z in $\mathbb{D}$ ist.

Beweis. Sei $T^{E+i\epsilon} := T_t^{E+i\epsilon}$ und P der Fixpunkt von $S_t^{E+i\epsilon}$.

$$T^{E+i\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{E+i\epsilon}{t} & -t \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{E+i\epsilon}{2t} + a + ib$ und $\lambda_2 = \frac{E+i\epsilon}{2t} - (a + ib)$, mit $(a + ib)^2 = (\frac{E+i\epsilon}{2t})^2 - 1$ und $b > 0$. Dabei ist $\lambda_1 \lambda_2 = 1$.

$(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = \frac{E^2-\epsilon^2+2iE\epsilon}{4t^2} - 1 \Rightarrow ab = \frac{E\epsilon}{4t^2} \Rightarrow \operatorname{sign} a = \operatorname{sign} E$. Daraus und aus $b > 0$ folgt:
$|\lambda_1|^2 = (\frac{E}{2t} + a)^2 + (\frac{\epsilon}{2t} + b)^2 > (\frac{E}{2t} - a)^2 + (\frac{\epsilon}{2t} - b)^2 = |\lambda_2|^2$

Aus $a^2 - b^2 + 2iab = \frac{E^2-\epsilon^2+2iE\epsilon}{4t^2} - 1$ lässt sich auch berechnen, dass $b > \frac{\epsilon}{2t}$, woraus folgt, dass $\lambda_1 \in \mathbb{H}$ und $\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{H}}$ sind.
Die Fixpunkte von $T^{E+i\epsilon}$ sind: $t\lambda_1 \in \mathbb{H}$ und $t\lambda_2 \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{H}}$.

Für $\mathcal{M}^{E+i\epsilon} := \mathcal{M}_t^{E+i\epsilon} := \begin{pmatrix} t & t \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{M}^{E+i\epsilon})^{-1} \cdot t\lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_2 & -t \\ -\lambda_1 & t \end{pmatrix} \cdot t\lambda_1 = \frac{t-t}{-t\lambda_1^2 + t} = 0 \\
(\mathcal{M}^{E+i\epsilon})^{-1} \cdot t\lambda_2 &= \begin{pmatrix} \lambda_2 & -t \\ -\lambda_1 & t \end{pmatrix} \cdot t\lambda_2 = \frac{t\lambda_2^2 - t}{-t+t} = \infty \\
(\mathcal{M}^{E+i\epsilon})^{-1} T^{E+i\epsilon} \mathcal{M}^{E+i\epsilon} &= \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot x = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x, \ |\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{M}^{E+i\epsilon} \cdot \infty = t\lambda_2 \notin \overline{\mathbb{H}}$ gibt es eine offene Kreisscheibe $K \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in K$, so dass: $(\mathcal{M}^{E+i\epsilon})^{-1} \cdot \overline{\mathbb{H}} = \overline{K}$
Mit $k := \sup_{x\in K}(|x|)$ gilt dann: $\forall \delta > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} : |\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}^{N_1} \cdot x| \leq k|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|^{N_1} < \delta \forall x \in \overline{K}$
Für $r > 0$ wähle $0 < \delta < \inf_{x\notin K}(|x|)$ so, dass $\mathcal{C}\mathcal{M}^{E+i\epsilon} \cdot U_\delta(0) \subseteq U_r(P)$. Dann gilt:

$$(S_t^{E+i\epsilon})^{N_1} \cdot \overline{\mathbb{D}} = \mathcal{C}(T^{E+i\epsilon})^{N_1} \cdot \overline{\mathbb{H}} = \mathcal{C}\mathcal{M}^{E+i\epsilon} \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}^{N_1} \cdot \overline{K} \subseteq \mathcal{C}\mathcal{M}^{E+i\epsilon} \cdot U_\delta(0) \subseteq U_r(P)$$

Damit ist K erfüllt.

Lemma 2.2. *Für $0 < |E| < 2t, \epsilon > 0, z = E + i\epsilon$ erfüllt S_t^z die Rotationseigenschaft (R), d.h.:*

$$(\mathcal{C}\mathcal{M}_t^z)^{-1} S_t^z \mathcal{C}\mathcal{M}_t^z \cdot x = R_\epsilon e^{i\alpha_\epsilon} x$$

mit $R_\epsilon \in \mathbb{R}^+$ und $\mathcal{M}_t^z$ wie im obigen Beweis. Damit ist insbesondere $(\mathcal{C}\mathcal{M}_t^z)^{-1} \cdot \mathbb{D}$ eine offene Kreisscheibe K in $\mathbb{C}$ mit $0 \in K$. Außerdem ist $\lim_{\epsilon\searrow 0} R_\epsilon = 1$ und $\lim_{\epsilon\searrow 0} \alpha_\epsilon =: \alpha \notin \mathbb{Z}\pi$.

Beweis. Mit λ_i aus Lemma 2.1 ist:
$(\mathcal{C}\mathcal{M}_t^z)^{-1} S_t^z \mathcal{C}\mathcal{M}_t^z \cdot x = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} x$ und $|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}| \in (0,1)$.
Weiterhin ist $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ stetig in ϵ für $\epsilon \in (0,\infty)$ und rechtsseitig stetig bei $\epsilon = 0$ mit:

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{E + i\sqrt{4t^2 - E^2}}{E - i\sqrt{4t^2 - E^2}}$$

Da $\forall E \in (-2t, 2t)\backslash 0 \, \exists \alpha \in (0, 2\pi)\backslash \pi$ so, dass $\frac{E+i\sqrt{4t^2-E^2}}{E-i\sqrt{4t^2-E^2}} = e^{i\alpha}$ ist die Behauptung gezeigt. $\square$

2.3 Eindeutigkeit des invarianten Maßes in einem Spezialfall

In dem Spezialfall des "Dyson-Modells" mit rein imaginärer Energie lässt sich die Eindeutigkeit des invarianten Maßes vergleichsweise leicht nachweisen:
Betrachte wir im Dyson-Modell den Spezialfall $z = i\epsilon, \epsilon > 0$
Da $z \in i\mathbb{R}_+$ ist, lässt T_t^z die imaginäre Halbachse $i\mathbb{R}_+$ invariant.
Ebenso lässt S_t für $z = i\epsilon, \epsilon > 0 \quad \mathcal{C} \cdot i\mathbb{R}_+ = [-1, 1)$ und damit auch den Abschluss $[-1, 1]$ dieses Intervalls invariant. In diesem Fall gilt für $x \in [-1, 1]$:

$$S_t^{i\epsilon} \cdot x = \begin{pmatrix} \epsilon - (1 + t^2) & \epsilon - (1 - t^2) \\ \epsilon + (1 - t^2) & \epsilon + (1 + t^2) \end{pmatrix} \cdot x$$

Auf $[-1, 1]$ ist $S_t^{i\epsilon}$ monoton fallend und $(S_t^{i\epsilon})^2$ hat einen global attraktiven Fixpunkt.
Damit folgt aus [1], Theorem 5.1:
Der Markovprozess $n+1 \mapsto x_{n+1} = S_t^{i\epsilon} \cdot x_n$ hat auf [-1,1] ein eindeutiges invariantes Maß ν und $\exists k \in \mathbb{N} : (S_t^{*kn}\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich der Kolmogorov-Metrik d_K auf $\mathcal{M}([-1, 1])$ für jedes $\mu \in \mathcal{M}([-1, 1])$ gleichmäßig gegen ν,
wobei $\mathcal{M}([-1, 1])$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $[-1, 1]$,
$S_t^* : \mathcal{M}([-1, 1]) \to \mathcal{M}([-1, 1]) : \mu(A) \mapsto \mu(S_t^{-1}(A))$,
und $d_K(\mu, \mu') = \sup_{a\in\mathbb{R}} |\mu((-\infty, a] \cap [-1, 1]) - \mu'((-\infty, a] \cap [-1, 1])|$ ist.

Angenommen ν hat bzgl. des Lebesquemaßes die Dichte ρ.
Dann gilt: $\rho(x) = \int_0^\infty dt^2 G(t^2) \frac{dS_t^{-1}(x)}{dx} \rho(S_t^{-1}(x))$
wobei G die Verteilung von t^2 ist. Mit $u := R_x(t^2) := S_t^{-1}(x)$ und $\lim_{t\to 0} S_t^{-1} = -1, \lim_{t\to\infty} S_t^{-1} = 1$ folgt:

$$\rho(x) = \int_{-1}^{1} du \frac{dR_x^{-1}(u)}{du} G(R_x^{-1}(u)) \frac{du}{dS_t(u)} \rho(u)$$

wobei gilt:

$$S_t^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \epsilon + (1 + t^2) & -(\epsilon - (1 - t^2)) \\ -(\epsilon + (1 - t^2)) & \epsilon - (1 + t^2) \end{pmatrix} \cdot x$$

$$R_x(t^2) = \begin{pmatrix} x-1 & (\epsilon+1)x-(\epsilon-1) \\ x-1 & -(\epsilon+1)x-(\epsilon-1) \end{pmatrix} \cdot t^2$$

$$R_x^{-1}(u) = \begin{pmatrix} (\epsilon+1)x-(\epsilon-1) & (\epsilon+1)x-(\epsilon-1) \\ x-1 & -(x-1) \end{pmatrix} \cdot u$$

$$\frac{dS_t(u)}{du} = \frac{-4t^2}{((\epsilon+1-t^2)u+\epsilon+1+t^2)^2}$$

$$\frac{dR_x^{-1}(u)}{du} = \frac{-2}{(u-1)^2}\left(\epsilon+\frac{x+1}{x-1}\right)$$

3 Eindeutigkeit des invarianten Maßes

In diesem Kapitel untersuchen wir die Eindeutigkeit des invarianten Maßes eines IFS. Da für jedes unter einem zufälligen Dynamischen System $S_\sigma\cdot$ invariante Maß ν auch jedes Produkt $c\nu$ mit einer positiven Konstante c invariant unter $S_\sigma\cdot$ ist, kann Eindeutigkeit nur bis auf Multiplikation mit einer positiven Konstante gelten. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es im Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{D}$ ein eindeutiges invariantes Maß gibt.

Diaconis und Freedman zeigen in [10] die Eindeutigkeit invarianter Wahrscheinlichkeitsmaße von zufälligen dynamischen Systemen. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, dass das dynamische System im Erwartungswert kontrahierend ist, was in diesem Fall Folgendes bedeutet:
Für jedes $\sigma \in \Sigma$ ist $S_\sigma\cdot$ lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante K_σ und

$$\mathbb{E}_\sigma(K_\sigma) < 1$$

Wir wollen jedoch auch dynamische Systeme zulassen, bei denen die Abbildungen zu festen σ zwar die Kontraktionsbedingung (K) erfüllen, jedoch keine Kontraktionen im Sinne einer Lipschitzkonstante < 1 sind. Hierfür nutzen wir eine Verallgemeinerung des Satzes aus [1], welcher uns bereits in Kapitel 2.3 die Eindeutigkeit des invarianten Maßes in dem dort behandelten Spezialfall lieferte.
Folgendes Theorem entspricht Theorem 5.2 in [1] :

Theorem 3.1. *Sei B eine Borelteilmenge von $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ die borelsche σ-Algebra auf B. Sei weiterhin $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von u.i.v. Zufallsvariablen mit Werten in einer Menge Σ, D_σ eine durch die σ_n indizierte Familie von Dynamiken mit $D_\sigma(B) \subseteq B$ und Ξ eine σ-Algebra auf Σ, so dass die Abbildung $(\Sigma\times B, \Xi\otimes\mathcal{B}) \to (B, \mathcal{B})$, $(\sigma, x) \mapsto D_\sigma(x)$ messbar ist. Sei $\mathbb{P}$ das Produktmaß der durch die Verteilung der σ_n gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße.*
Gibt es nun ein geeignetes System $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ von Teilmengen von B s.d. für:
$\mathcal{M}(B) = \{$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $B\}$ und

$d_{\mathcal{A}}(\mu_1, \mu_2) := \sup_{A \in \mathcal{A}} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|,\ (\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{D}))$
gilt:

1. $(\mathcal{M}(B), d_{\mathcal{A}})$ *ist ein vollständiger metrischer Raum.*
2. $d_{\mathcal{A}}(\mu_1 \circ (D_\sigma)^{-1}, \mu_2 \circ (D_\sigma)^{-1}) \leq d_{\mathcal{A}}(\mu_1, \mu_2)$ *für alle* $\sigma \in \Sigma, \mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(B)$
3. $\exists N \in \mathbb{N}, \chi > 0 \, \forall A \in \mathcal{A}$ *gilt:* $P(B \cap (D_{\sigma_N} \cdots D_{\sigma_1})^{-1}(A) = B$ *oder* $\emptyset) \geq \chi$

Dann existiert für die stochastische Dynamik $x \mapsto D_\sigma(x)$ *auf* B *ein eindeutiges invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß* ν *(entsprechend der Definition 1.2) und*

$$d_{\mathcal{A}}(D^{*n}\mu, \nu) \leq (1-\chi)^{[n/N]} \ (\mu \in \mathcal{M}(B)),$$

wobei $D^{*n}\mu$ *die Wahrscheinlichkeitsverteilung von* $D_{\sigma_n} \cdots D_{\sigma_1}(X)$ *ist, wenn* X *die Verteilung* μ *hat.*

Wir wenden nun dieses Theorem auf die Situation aus Satz 1.1 an.

Satz 3.2. *Es seien die Voraussetzungen aus Satz 1.1 gegeben.*
Dann sind für $z_1 \neq 0$ *und* $R^{n_i} > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $(i = 1, 2)$ *die Voraussetzungen von Th. 3.1 mit*

$$\mathcal{A} := \{\overline{\mathbb{D}} \cap C | C \subset \mathbb{C} \text{ und } \partial C \text{ ist Kreis oder Gerade } \}$$

erfüllt.

Beweis. Da Möbiustransformationen kreisverwandt sind, ist **Voraussetzung 2** offensichtlich erfüllt.
zu Voraussetzung 1:
$d_{\mathcal{A}}$ ist eine Metrik auf $\mathcal{M}$ gdw. $\forall \mu, \nu, \rho \in \mathcal{M}$ gilt:

- $d_{\mathcal{A}}(\mu, \mu) = 0$
- $d_{\mathcal{A}}(\mu, \nu) = d_{\mathcal{A}}(\nu, \mu)$
- $d_{\mathcal{A}}(\mu, \nu) \leq d_{\mathcal{A}}(\mu, \rho) + d_{\mathcal{A}}(\rho, \nu)$
- $d_{\mathcal{A}}(\mu, \nu) = 0 \Rightarrow \mu = \nu$

Die ersten drei Bedingungen folgen direkt aus den entsprechenden (Un-)Gleichungen für $\mu(A), \nu(A), \rho(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.
Sei nun $\mu \neq \nu \in \mathcal{M}$. Die Menge $\mathcal{I} = \{((a,b) \times (c,d)) \cap \overline{\mathbb{D}} | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ ist ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{D})$, daher $\exists I \in \mathcal{I}$ mit $\mu(I) \neq \nu(I)$.
Da ein Rechteck komplett durch abzählbar viele sich höchstens berührende Kreise ausgefüllt werden kann und für einen Kreis K jede Menge der Form $A = (\mathring{K} \cup K') \cap \overline{\mathbb{D}}$ mit $K' \subseteq \partial K$ beliebig, in $\mathcal{A}$ liegt, gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

disjunkten $A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}$ und $\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = I$. Damit ist $0 < |\mu(I) - \nu(I)| = |\sum_{n\in\mathbb{N}}(\mu(A_n) - \nu(A_n))| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n) - \nu(A_n)|$. Daher gibt es ein $A_n \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_n) \neq \nu(A_n)$. Also ist auch die vierte Bedingung erfüllt, und $d_{\mathcal{A}}$ ist eine Metrik auf $\mathcal{M}$.
zur Vollständigkeit: Sei $(\mu_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{A}})$. Seien $\tilde{\mu}_m$ Erweiterungen der Maße μ_m auf $\mathcal{B}(\mathbb{C})$, gegeben durch $\tilde{\mu}_m(B) = \mu_m(B \cap \mathbb{D})$
Dann existiert eine Abbildung $f : \mathcal{B}(\mathbb{C}) \to [0,1]$ mit $f(B) = \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(B) \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$.
Dabei gilt:

- $f(B) \leq f(C) \forall B \subseteq C, B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$
- $f(\mathbb{D}) = 1,\ f(\emptyset) = 0$
- $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap C) \forall B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{D})$

(*)
Sei $x \leq y \Leftrightarrow \Re(x) \leq \Re(y)$ und $\Im(x) \leq \Im(y)$. Die Verteilungsfunktionen F_n der Maße $\tilde{\mu}_m$ seien gegeben durch $F_n(x) = \tilde{\mu}_m(\{z \leq x\})$. Die F_n konvergieren punktweise gegen eine Funktion $F : \mathbb{C} \to [0,1]$ mit $F(x) = f(\{y \leq x\})$.
Behauptung: F ist rechtsseitig stetig. Bew.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $x_{n+1} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{C}$. Dann ist $F(x_n) - F(x) = f(\{y \leq x_n\} \backslash \{y \leq x\}) = f(J_n^1 \uplus J_n^2 \uplus J_n^3)$, wobei $J_n^i \in \mathcal{J} = \{((a,b] \times (c,d]) \cap \mathbb{D}\},\ J_{n+1}^i \subseteq J_n^i$ und $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} J_n^i = \emptyset$.
Für alle Folgen $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $J_n \in \mathcal{J} \forall n \in \mathbb{N}$ und $J_n \downarrow \emptyset$ gibt es A_n mit $A_n = A_n^1 \backslash A_n^2,\ A_n^i \in \mathcal{A},\ A_n^2 \subset A_n^1,\ A_n \downarrow \emptyset$. Dann gilt $\tilde{\mu}_m(A_n) = \tilde{\mu}_m(A_n^1) - \tilde{\mu}_m(A_n^2) \forall m \in \mathbb{N}$ und da $\tilde{\mu}_m(A_n^i)$ für $m \to \infty$ gleichmäßig in n gegen $f(A_n^i)$ konvergiert, konvergiert auch $\tilde{\mu}_m(A_n)$ gleichmäßig in n gegen $f(A_n)$. Daher ist $\lim_{n\to\infty} f(A_n) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \tilde{\mu}_m(A_n) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}_m(A_n) = 0$.
Damit ist $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty}(f(\{y \leq x\}) + f(J_n^1) + f(J_n^2) + f(J_n^3)) = f(\{y \leq x\}) + 0 = F(x)$.
Mit (*) ist F Verteilungsfunktion zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mu}$ und die $\tilde{\mu}_m$ konvergieren schwach gegen $\tilde{\mu}$. Da $\tilde{\mu}_m(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gleichmäßig gegen $f(A)$ konvergieren, ist $f(A) = \tilde{\mu}(A) \forall A \in \mathcal{A}$. Daher konvergiert $\tilde{\mu}_m$ bzgl. $d_{\mathcal{A}}$ gegen $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\mu}(\mathbb{D}) = 1$. Also ist die Einschränkung μ von $\tilde{\mu}$ auf $\mathbb{D}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{D})$ und $\mu = \lim_{n\to\infty} \mu_n$ sowohl in $d_{\mathcal{A}}$ als auch im schwachen Sinn.

zu Voraussetzung 3:
Behauptung:

$$\begin{aligned} &\exists N_2 \in \mathbb{N}, \delta > 0 \\ \forall A \in \mathcal{A} \exists n \leq N_2, j \in \{1,2\} : S_2^n \cdot U_\delta(z_j) \cap A = \emptyset \text{ oder } &S_2^n \cdot U_\delta(z_j) \subseteq A. \end{aligned} \tag{4}$$

Beweis zu (4):
Sei $K_1 = M^{-1} \cdot \mathbb{D}$. Dann ist K_1 eine offene Kreisscheibe in $\mathbb{C}$ mit $0 \in K_1$.

Wähle ein $A \in \mathcal{A}$ beliebig aber fest.
Falls für ein $i \in \{1,2\}$ gilt $U_\delta(z_i) \cap \partial A = \emptyset$, ist nichts mehr zu zeigen und (4) gilt mit $n = 1$.
Im weiteren beschränken wir uns also auf den Fall: ∂A schneidet $U_\delta(z_1)$ und $U_\delta(0)$.
Da eine Drehung des Koordinatensystems die Multiplikation mit $Re^{i\alpha}$ nicht beeinflusst, kann man O.B.d.A. annehmen, dass $z_1 \in (0,1)$ liegt.

Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $m^\delta > 0$, so dass $\lim_{\delta \searrow 0} m^\delta = \frac{z_1}{2}$ und für alle Kreise K, die $U_\delta(z_1)$ und $U_\delta(0)$ schneiden gilt:
Liegt der Mittelpunkt von K in $\mathbb{C}\backslash\mathbb{H}$ so ist $(K \cap K_1) \subseteq \{x \in \mathbb{C} | \Im(x) \leq m^\delta\}$.
Liegt der Mittelpunkt von K in $\mathbb{H}$ so ist $(K \cap K_1) \subseteq \{x \in \mathbb{C} | \Im(x) \geq -m^\delta\}$.
Für alle Geraden g, die $U_\delta(z_1)$ und $U_\delta(0)$ schneiden gilt ebenfalls: $(g \cap K_1) \subseteq \{x \in \mathbb{C} | \Im(x) \leq m^\delta\}$.
Nach Definition von n_1, n_2 ist $\alpha n_1 \in [\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi]$ und $\alpha n_2 \in [\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi]$, d.h. $\Im((Re^{i\alpha})^{n_1} z_1) \geq z_1 R^{n_1} \sin(\frac{1}{3}\pi) = z_1 R^{n_1} \frac{1}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2} z_1$ und $\Im((Re^{i\alpha})^{n_2} z_1) \leq -z_1 R^{n_2} \sin(\frac{1}{3}\pi) = -z_1 R^{n_2} \frac{1}{2}\sqrt{3} < -\frac{1}{2} z_1$.
Dann ist $(Re^{i\alpha})^{n_i} \cdot U_\delta(z_1) \subseteq U_\delta((Re^{i\alpha})^{n_i} z_1)$.
Daher kann δ so gewählt werden, dass $z_1 R^{n_i} \frac{1}{2}\sqrt{3} - \delta > m^\delta$.
Wenn A wie in (3.2) definiert ist, dann schneidet ∂A die Umgebungen $U_\delta(z_1)$ und $U_\delta(0)$. Also gilt mit dem oben gewählten δ und für ein $n \in \{n_1, n_2\}$: $\partial A \cap (Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_1) = \emptyset$. Da der Schnitt mit dem Rand von A leer ist, muss $(Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_1)$ entweder komplett in A, oder komplett in $\mathbb{C}\backslash A$ liegen.
Damit ist (4) für $N_2 = \max(n_1, n_2)$ erfüllt.

Sind (4) und (K) erfüllt, so $\exists r$ mit $M^{-1} \cdot U_r(P_i) \subseteq U_\delta(z_i)$.
Dann gilt für ein beliebiges $A \in \mathcal{A}$: $M^{-1} \cdot A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow \exists j \in \{1,2\}$ und $n \leq N_2$, so dass:

$$(Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_j) \subseteq M^{-1} \cdot A \text{ oder } (Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_j) \cap M^{-1} A = \emptyset$$

1.Fall: $(Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_j) = M(M^{-1} S_2 M)^n M^{-1} \cdot U_r(P_j) \subseteq M^{-1} \cdot A$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (S_2)^n \cdot U_r(P_j) \subseteq M(M^{-1} S_2 M)^n \cdot U_\delta(z_j) \\ & \subseteq M M^{-1} \cdot A = A \\ \Rightarrow \quad & U_r(P_j) \subseteq (S_2)^{-n} \cdot A \overset{K}{\Rightarrow} (S_j)^{-N_1} (S_2)^{-n} \cdot A \cap \mathbb{D} = \mathbb{D} \\ \Rightarrow \quad & (S_j)^{-(N_2 - n)} (S_j)^{-N_1} (S_2)^{-n} \cdot A \cap \mathbb{D} = \mathbb{D} \end{aligned}$$

2.Fall: $(Re^{i\alpha})^n \cdot U_\delta(z_j) \subseteq \mathbb{C}\backslash(M^{-1} \cdot A) = M^{-1} \cdot (\mathbb{C}\backslash A)$, da $M^{-1} \cdot \mathbb{C} = \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & (S_2)^n \cdot U_r(P_j) = M(M^{-1} S_2 M)^n M^{-1} \cdot U_r(P_j) \subseteq M(M^{-1} S_2 M)^n U_\delta(z_j) \\ & \subseteq M M^{-1} \cdot (\mathbb{C}\backslash A) = (\mathbb{C}\backslash A) \\ \Rightarrow \quad & U_r(P_j) \cap (S_2)^{-n} \cdot A = \emptyset \overset{K}{\Rightarrow} (S_j)^{-N_1} (S_2)^{-n} \cdot A \cap \mathbb{D} = \emptyset \\ \Rightarrow \quad & (S_j)^{-(N_2 - n)} (S_j)^{-N_1} (S_2)^{-n} \cdot A \cap \mathbb{D} = \emptyset \end{aligned}$$

Da $\mathbb{P}((D_{\sigma_{N_1+N_2}} \cdots D_{\sigma_1})^{-1} = (S_j)^{-(N_2-n)}(S_j)^{-N_1}(S_2)^{-n}) \geq (\min(p_1,p_2))^{N_1+N_2} > 0$ folgt daraus Voraussetzung 3.

Satz 3.1 ist auch bei kontinuierlich verteilten σ_n anwendbar:

Satz 3.3. *Für diesen Satz ist nicht vorausgesetzt, dass Σ endlich ist.*
Sei d eine Metrik auf Σ, bezüglich welcher S_σ stetig in σ ist. Es gebe zwei Werte (o.B.d.A: $1,2$), so dass $\forall \Delta > 0\, \exists p_1(\Delta), p_2(\Delta) > 0 : \mathbb{P}(\sigma \in U_\Delta(i)) = p_i$ $(i = 1,2)$. Weiterhin erfüllen S_1 und S_2 die Kontraktionsbedingung (K) und S_2 erfülle zusätzlich die Rotationseigenschaft (R).
Mit z_1, z_2, n_1, n_2, R wie in Satz 3.2 sei $z_1 \neq 0$ und $R^{n_i} > \frac{1}{\sqrt{3}}, (i = 1,2)$.
Dann hat die zufällige Dynamik S_σ ein eindeutiges invariantes Maß ν auf $\mathbb{D}$ und für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}, \Delta > 0$ und $\chi = \min(p_1(\Delta)^N, p_2(\Delta)^N)$ gilt:

$$d_{\mathcal{A}}(S^{*n}\mu, \nu) \leq (1-\chi)^{[n/N]} \; (\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{D})),$$

wobei $S^{*n}\mu$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $S_{\sigma_n} \cdots S_{\sigma_1} \cdot X$ ist, wenn X die Verteilung μ hat.

Beweis. Für jedes $c > 0$ $\exists \Delta_1 > 0$, so dass $|S_\sigma(x) - S_i(x)| \leq c$ $\forall \sigma \in U_{\Delta_1}(i), x \in \mathbb{D}$, $i = 1,2$.
Daher ist, mit $N_1 = N_1(\frac{\delta}{2})$ aus (K) und Δ_1 so klein, dass $N_1 c < \frac{\delta}{2}$ ist, die Kontraktionsbedingung:

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0, i \in \{1,2\} \exists N_1 \in \mathbb{N} : (S^z_{\sigma_{N_1}} \cdots S^z_{\sigma_1})(\overline{\mathbb{D}}) \subseteq U_\delta(P_i) \\ \text{falls } t_1, \ldots t_{N_1} \in U_{\Delta_1}(i) \end{aligned} \tag{K'}$$

erfüllt.
Außerdem gilt: $\forall k > 0 \exists \Delta_2 > 0$:
$|M^{-1}S_\sigma M \cdot z - Re^{i\alpha}z| \leq k$ $\forall \sigma \in U_{\Delta_2}(2)$ und $|z_\sigma - z_1| \leq k$ $\forall \sigma \in U_{\Delta_2}(1)$,
wobei z_σ der Fixpunkt von $M^{-1}S_\sigma M$ ist.
Da Behauptung (4) aus dem Beweis von Satz 3.2 gleichbedeutend ist mit:

$$\begin{aligned} \exists N_2 \in \mathbb{N}, \delta, k > 0 \\ \forall A \in \mathcal{A} \exists n \leq N_2, j \in \{1,2\} : S_2^n \cdot U_{\delta+k}(z_j) \cap A = \emptyset \text{ oder } S_2^n \cdot U_{\delta+k}(z_j) \subseteq A. \end{aligned} \tag{5}$$

ist der Beweis zu diesem Satz analog zu dem von Satz 3.2.

Satz 3.4. *[Anwendung auf ein Beispielsystem] Sei S_t wie im Dyson-Modell aus Kapitel 2 definiert.*
Die Verteilung der t_n sei so, dass mindestens 2 verschiedene Werte $t', t'' > 0$ existieren, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 > 0$ gewählt werden, wobei $0 < |E| < 2t''$ und $\epsilon > 0$. Dann hat die zufällige Dynamik S_t für ϵ hinreichend klein

ein eindeutiges invariantes Maß ν auf $\mathbb{D}$ und für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ und $\chi = \min(p_1^N, p_2^N)$ gilt:

$$d_{\mathcal{A}}(S^{*n}\mu, \nu) \leq (1-\chi)^{[n/N]}\ (\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{D})),$$

wobei $S^{*n}\mu$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $S_{t_n} \cdots S_{t_1} \cdot X$ ist, wenn X die Verteilung μ hat.

Beweis. Mit Lemma 2.1 und 2.2 muss nur noch gezeigt werden, dass die attraktiven Fixpunkte P_1, P_2 von $S_{t'}, S_{t''}$ verschieden sind, denn dann ist $z_1 \neq 0$ in Satz 3.2. Dies folgt jedoch direkt aus $P_i = \mathcal{C} \cdot s_i \lambda_{1,s_i}$ mit $t' \neq t''$.
Also lässt sich Satz 3.2 anwenden. $\square$

Über den Träger des invarianten Maßes kann man folgende einfache Aussage treffen:

Satz 3.5. *Sei σ auf der endlichen Menge Σ verteilt. Weiterhin gebe es ein $M \in \mathbb{N} : S_\omega^M \cdot \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}\, \forall \omega \in \Omega$. (Dies gilt zum Beispiel immer dann, wenn S_σ für alle $\sigma \in \Sigma$ die Kontraktionsbedingung (K) erfüllt.)*
Dann gilt für $K := \bigcup_{\omega_{|M} \in \Sigma^M} S_\omega^M \cdot \overline{\mathbb{D}}$:

$$S_\omega^M \cdot K \subseteq K\, \forall \omega \in \Omega$$

Dabei ist $\omega_{|M}$ für $\omega = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Anfangssequenz $\omega_{|M} := (\sigma_1, \cdots, \sigma_M)$.
Damit liegt der Träger jedes invarianten Maßes von S_σ in K.

Beweis. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist $S_\omega^M \cdot K \subseteq S_\omega^M \cdot \mathbb{D} \subseteq K$.

Bemerkung: Da K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist, ist der Abstand $d(K, \partial\mathbb{D}) > 0$.

Beispiel: Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{T} \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $\hat{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2,\mathbb{R})$ mit $c \neq 0$.
Dann ist $T \cdot \overline{\mathbb{H}} \subset \mathbb{H}$ und damit $\mathcal{C}T\mathcal{C}^* \cdot \overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{D}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} T \cdot \overline{\mathbb{H}} &= \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{T} \cdot \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq \epsilon\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i\epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K' = K \end{aligned}$$

Dabei ist (wegen $c \neq 0$) K' eine abgeschlossene Kreisscheibe in $\overline{\mathbb{H}}$ und damit K eine abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{H}$.

4 Der Lyapunovexponent

In Definition 1.7 haben wir den Lyapunovexponenten als den erwarteten Grenzwert der zufälligen Folge der Spektralnormen von S_ω^n definiert. In diesem Kapitel geben wir weitere zufällige Folgen an, deren (erwarteten und fast sicheren) Grenzwert der Lyapunovexponent darstellt.
Insbesondere die Verbindung zwischen dem Lyapunovexponenten und der Ableitung der Möbiustransformation $S_\omega^n\cdot$ wird im Weiteren in den Kapiteln 5 und 7 verwendet.

Mit Definition 1.7 lässt sich der Lyapunovexponent für alle $e \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}$ folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N} \log \|(\prod_{n=1}^{N} S_{\sigma_n})e\| \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N} \log \left(\frac{\|S_{\sigma_N} \prod_{n=1}^{N-1} S_{\sigma_n} e\|}{\| \prod_{n=1}^{N-1} S_{\sigma_n} e\|} \| \prod_{n=1}^{N-1} S_{\sigma_n} e\| \right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N} (\log \|S_{\sigma_N} e_{N-1}\| + \log \| \prod_{n=1}^{N-1} S_{\sigma_n} e\|) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\log \|S_{\sigma_n} e_{n-1}\|)
\end{aligned}$$

wobei $n \mapsto e_n := \frac{\prod_{k=1}^n S_{\sigma_k} e}{\| \prod_{k=1}^n S_{\sigma_k} e\|} = \frac{S_{\sigma_n} e_{n-1}}{\|S_{\sigma_n} e_{n-1}\|}$ einen Markov-Prozess auf $\mathbb{C}P(1)$ darstellt.

Tatsächlich gilt sogar für $\mathbb{P}$- fast alle $\omega = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$:

$$\gamma = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \|(\prod_{n=1}^{N} S_{\sigma_n})e\| = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} (\log \|S_{\sigma_n} e_{n-1}\|)$$

Satz 4.1. *Sei* $S_{\sigma_n} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ *mit* $\det(S_{\sigma_n}) = 1$. *Zu einem Code* $\omega \in \Omega$ *und einem Anfangspunkt* $e_0 \in \mathbb{C}P(1)$ *mit* $\pi(e_0) \in \mathbb{D}$ *sei die Folge* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *durch den obigen Markovprozess gegeben. Definiere weiterhin die Folgen* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *und* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *durch* $e_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$, $z_n := \pi(e_n) = \frac{\alpha_n}{\beta_n} \forall n \in \mathbb{N}_0$.
(Damit ist $z_n = S_{\sigma_n} \cdot z_{n-1}$ *und daher auch* $z_n \in \mathbb{D} \forall n \geq 1$.*)*

Dann gilt mit beliebigem aber festem e_0 für $\mathbb{P}$-f.a. $\omega = (\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}(\log\|S_{\sigma_n}e_{n-1}\|) &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\log|c_n z_{n-1}+d_n| + R_N \\
&= -\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}\log|(S_{\sigma_n}\cdot)'(z_{n-1})| + R_N \\
&= -\frac{1}{2N}\log|(S_\omega^N\cdot)'(z_0)| + R_N
\end{aligned}$$

Dabei sind die R_N Randterme der Ordung $\mathcal{O}(\frac{1}{N})$ und $(S\cdot)'$ bezeichnet die Ableitung der Abbildung $S\cdot : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}, z \mapsto S\cdot z$.

Beweis. Die zweite Gleichheit folgt direkt aus:

$$(S_{\sigma_n}\cdot)'(z) = \frac{d}{dz}\frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} = \frac{1}{(c_n z + d_n)^2}$$

und mit der Kettenregel folgt auch die dritte Gleichheit.

Beweis der ersten Gleichheit:
Aus der Definition der β_k folgt für $k \geq 1$:

$$\beta_k^2 = \frac{(c_k\alpha_{k-1} + d_k\beta_{k-1})^2}{|a_k\alpha_{k-1} + b_k\beta_{k-1}|^2 + |c_k\alpha_{k-1} + d_k\beta_{k-1}|^2}$$

Damit und mit der Definition der z_k erhält man:

$$\begin{aligned}
2(\log\|S_{\sigma_k}e_{k-1}\| + \log|\beta_k|) &= \log(|a_k\alpha_{k-1} + b_k\beta_{k-1}|^2 + |c_k\alpha_{k-1} + d_k\beta_{k-1}|^2) + \log|\beta_k|^2 \\
&= \log|c_k\alpha_{k-1} + d_k\beta_{k-1}|^2 \\
&= \log|\beta_{k-1}|^2 + \log|c_k z_{k-1} + d_k|^2
\end{aligned}$$

Nach Iteration ergibt sich also:

$$\begin{aligned}
2\sum_{n=1}^{N}(\log\|S_{\sigma_n}e_{n-1}\|) &= \sum_{n=1}^{N}(\log|c_n z_{n-1} + d_n|^2) + \log|\beta_0|^2 - \log|\beta_N|^2 \\
&= 2\sum_{n=1}^{N}(\log|c_n z_{n-1} + d_n|) + 2\log|\beta_0| - 2\log|\beta_N|
\end{aligned}$$

Die Gleichheit folgt nun, wenn $\log|\beta_0|, \log|\beta_N|$ uniform in N beschränkt sind. $\log|\beta_0|$ ist beschränkt aufgrund der Wahl von e_0. Eine uniforme obere Schranke für $\log|\beta_N|$ folgt daraus, dass $|\beta_N| \leq \|e_N\| = 1$. Eine untere Schranke folgt aus $|z_N|^2 = \frac{1-|\beta_N|^2}{|\beta_N|^2} < 1$.

Korollar 4.2. *Für ein festes $z_0 \in \mathbb{D}$ lässt sich der Lyapunovexponent auch darstellen als:*

$$\begin{aligned}\gamma &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \log |c_n z_{n-1} + d_n| \\ &= -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N} \log |(S_\omega^N)'(z_0)|\end{aligned}$$

für fast alle $\omega \in \Omega$, wobei die c_n, d_n und z_n wie in Satz 4.1 definiert sind.

5 Störungstheorie

In diesem Kapitel behandeln wir zufällige dynamische Systeme die durch ein zufälliges Matrizensystem der Form

$$S_{\lambda,\epsilon,\sigma} := R_\sigma e^{\lambda P_\sigma + i\epsilon Q_\sigma}$$

gegeben sind. Dabei sind λ, ϵ zwei positive reelle Parameter,

$$R_\sigma = \begin{pmatrix} e^{i\eta_\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_\sigma} \end{pmatrix}$$

mit $\eta_\sigma \in (0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ und P_σ, Q_σ Matrizen in $u(1,1)$.
Wir betrachten hierbei den störungstheoretischen Fall mit $\epsilon \leq \lambda^{2+\delta}$ für ein geeignetes $\delta > 0$ und $\lambda \ll 1$.

5.1 Störungstheoretische Berechnung des Lyapunovexponenten

Im letzten Kapitel haben wir mit Korollar 4.2 einen Zusammenhang zwischen dem Lyapunovexponenten und der Folge der Ableitungen der Möbiustransformationen $S_{\lambda,\epsilon,\omega}^N \cdot$ hergestellt. In Verbindung mit der Tatsache, dass der Abstand der Punkte $S_{\lambda,\epsilon,\omega}^N \cdot \xi$, $S_{\lambda,\epsilon,\omega}^N \cdot \zeta$ für $\xi, \zeta \in \mathbb{D}$ durch das Integral $\int_{[\xi,\zeta]} (S_{\lambda,\epsilon,\omega}^N \cdot)'(z) dz$ gegeben ist, führt dies zu der Vermutung, dass dieser Abstand durch $e^{-2\gamma N}$ abschätzbar sein sollte. Wenn der Lyapunovexponent einen echt positiven Anteil hat, welcher nicht von höherer Ordnung ist als $\mathcal{O}(\lambda^2)$, können wir in dem hier behandelten störungstheoretischen Fall zumindest eine etwas schwächere Abschätzung nachweisen.
Wir berechnen nun den Lyapunovexponenten bis zur Ordnung von λ^2.

Satz 5.1. *Der Lyapunovexponent $\gamma = \gamma(\lambda, \epsilon)$ des zufälligen dynamischen Systems $\xi_{n+1} := S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n} \cdot \xi_n$ ist gegeben durch:*

$$\gamma(\lambda, \epsilon) = D\lambda^2 + \mathcal{O}(\epsilon, \lambda^3)$$

mit $D = \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(P_\sigma)_{1,2}|^2) + \Re\frac{\mathbb{E}(\overline{(P_\sigma)_{1,2}}\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma}(P_\sigma)_{1,2})}{1-\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma})}$.
($(P_\sigma)_{i,j}$ *bezeichnet hier den Eintrag der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte von* P_σ*.)*

Für den Beweis zeigen wir zuerst folgendes Lemma:

Lemma 5.2. *Zu einer durch ein beliebiges* $z_0 \in \mathbb{D}$ *und den Markovprozess* $z_n = S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n} \cdot z_{n-1}$ *bestimmten Folge* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *von Zufallsvariablen in* $\mathbb{D}$ *seien* $I_1(N), I_2(N)$ *gegeben durch:*

$$I_1(N) := \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n \text{ und } I_2(N) := \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} z_n^2$$

Ist $S_{\lambda,\epsilon,\sigma}$ *wie in Satz 5.1 definiert, so gilt:*

1. $I_j(N) = \mathcal{O}(\lambda, \epsilon, \frac{1}{N})\, \forall j = 1, 2$
2. $I_1(N) = \lambda\frac{\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}(P_\sigma)_{1,2})}{1-\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma})} + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon, \frac{1}{N})$

Beweis. Zuerst zeigen wir 1. für $I_1(N)$:
Da $z_n = e^{2i\eta_n} z_{n-1} + \mathcal{O}(\lambda, \epsilon)$ ist und $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ unabhängig sind, erhalten wir
$\mathbb{E}_\omega z_n = \mathbb{E}_{\sigma_n}(e^{2i\eta_n})\mathbb{E}_{\sigma_1,\ldots,\sigma n-1}(z_{n-1}) + \mathcal{O}(\lambda, \epsilon)$.
Damit ist $I_1(N) = I_1(N)\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}) + \mathcal{O}(\lambda, \epsilon, \frac{1}{N})$.
Nach Umformung erhält man daraus:

$$I_1(N) = \frac{\mathcal{O}(\lambda, \epsilon, \frac{1}{N})}{1 - \mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})} = \mathcal{O}(\lambda, \epsilon, \frac{1}{N})$$

Die Behauptung für $I_2(N)$ folgt analog dazu aus $z_n^2 = e^{4i\eta_n} z_{n-1}^2 + \mathcal{O}(\lambda, \epsilon)$.

2. folgt aus:

$$\begin{aligned}
z_n &= e^{2i\eta_n}[e^{\lambda P_n} \cdot z_{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon)] \\
&= e^{2i\eta_n}[(\mathbb{1} + \lambda P_n) \cdot z_{n-1} + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon)] \\
&= e^{2i\eta_n}\left[\frac{(1 + \lambda(P_n)_{1,1})z_{n-1} + \lambda(P_n)_{1,2}}{\lambda(P_n)_{2,1}z_{n-1} + 1 + \lambda(P_n)_{2,2}} + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon)\right] \\
&= e^{2i\eta_n}[z_{n-1} + \lambda((P_n)_{1,1} - (P_n)_{2,2})z_{n-1} - \lambda(P_n)_{2,1}z_{n-1}^2 + \lambda(P_n)_{1,2} + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon)]
\end{aligned}$$

Da $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ unabhängig sind, erhalten wir für den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\omega z_n &= \mathbb{E}_{\sigma_n}[e^{2i\eta_n}(1 + \lambda(P_n)_{1,1} - \lambda(P_n)_{2,2}]\mathbb{E}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}}(z_{n-1}) \\
&+ \mathbb{E}_{\sigma_n}[e^{2i\eta_n}(-\lambda(P_n)_{2,}]\mathbb{E}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{n-1}}(z_{n-1}^2) \\
&+ \mathbb{E}_{\sigma_n}[e^{2i\eta_n}\lambda(P_n)_{1,1}] + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon)
\end{aligned}$$

Mit 1. folgt daraus:

$$I_1(N) = \mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})I_1(N) + \lambda\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}(P_\sigma)_{1,2}) + \mathcal{O}(\lambda^2, \epsilon, \frac{1}{N})$$

Die Behauptung folgt, wenn man diese Gleichung nach $I_1(N)$ auflöst. $\square$

Beweis zu Satz 5.1:
Da $\|R_\sigma v\| = \|v\| \forall v \in \mathbb{C}^2$ gilt mit Korollar 4.2 sowie mit

$$c_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* R_\sigma^{-1} S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } d_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* R_\sigma^{-1} S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für den Lyapunovexponenten:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N}\mathbb{E}_\omega \sum_{n=1}^{N} \log|c_n z_{n-1} + d_n| \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2N}\mathbb{E}_\omega \sum_{n=1}^{N} (\log(c_n z_{n-1} + d_n) + \log(\overline{c}_n \overline{z}_{n-1} + \overline{d}_n))
\end{aligned}$$

Dabei ist $\log(re^{i\phi}) := \log(r) + i\phi$ für $\phi \in (-\pi, \pi)$.
Weiterhin ist:

$$R_\sigma^{-1} S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n} = e^{\lambda P_\sigma + i\epsilon Q_\sigma} = \mathbb{1} + \lambda P_\sigma + \frac{1}{2}\lambda^2 P_\sigma^2 + i\epsilon Q_\sigma + \mathcal{O}(\lambda^3, \epsilon^2, \lambda\epsilon)$$

und daher:

$$\begin{aligned}
\log(d_n + c_n z_{n-1}) &= \log[1 + \lambda(P_n)_{2,2} + \frac{1}{2}\lambda^2(P_n^2)_{2,2} + i\epsilon(Q_n)_{2,2} \\
&+ z_{n-1}(\lambda(P_n)_{2,1} + \frac{1}{2}\lambda^2(P_n^2)_{2,1} + i\epsilon(Q_n)_{2,1}) + \mathcal{O}(\lambda^3, \epsilon^2, \lambda\epsilon)] \\
&= \lambda(P_n)_{2,2} + \frac{1}{2}\lambda^2(P_n^2)_{2,2} + i\epsilon(Q_n)_{2,2} \\
&+ z_{n-1}(\lambda(P_n)_{2,1} + \frac{1}{2}\lambda^2(P_n^2)_{2,1} + i\epsilon(Q_n)_{2,1}) - \frac{1}{2}\lambda^2((P_n)_{2,2})^2 \\
&- \frac{1}{2}\lambda^2 z_{n-1}^2((P_n)_{2,1})^2 - \lambda^2 z_{n-1}(P_n)_{2,1}(P_n)_{2,2} + \mathcal{O}(\lambda^3, \epsilon^2, \lambda\epsilon)
\end{aligned}$$

Mit Lemma 5.2 folgt daraus:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{N}\mathbb{E}_\omega \sum_{n=1}^{N} \log|c_n z_{n-1}+d_n| &= \mathbb{E}_\sigma[\lambda(P_\sigma+\overline{P}_\sigma)_{2,2}+\frac{1}{2}\lambda^2(P_\sigma^2+\overline{P}_\sigma^2)_{2,2} \\
&- \frac{1}{2}\lambda^2((P_\sigma)_{2,2}^2+\overline{P}_\sigma)_{2,2}^2)+i\epsilon(Q_\sigma+\overline{Q}_\sigma)_{2,2} \\
&+ \lambda((P_\sigma)_{2,1}I_1(N)+(\overline{P}_\sigma)_{2,2}\overline{I}_1(N))]+(O)(\lambda^3,\epsilon^2,\lambda\epsilon,\frac{1}{N}) \\
&= 2\lambda\Re[\mathbb{E}_\sigma(P_\sigma)_{2,2}]+2\lambda^2\Re\left[\mathbb{E}_\sigma(P_\sigma)_{2,1}\frac{\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}(P_\sigma)_{1,2})}{1-\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})}\right] \\
&+ \lambda^2\Re[\mathbb{E}_\sigma(P_\sigma^2)_{2,2}]-\lambda^2\Re[\mathbb{E}_\sigma((P_\sigma)_{2,2})^2] \\
&+ 2\epsilon\Im[\mathbb{E}_\sigma(Q_\sigma)_{2,2}+(O)(\lambda^3,\epsilon^2,\lambda\epsilon,\frac{1}{N})
\end{aligned}
$$

Da $P_\sigma \in u(1,1)\forall\sigma$ ist $(P_\sigma)_{1,1},(P_\sigma)_{2,2}\in i\mathbb{R}$ und $(P_\sigma)_{1,2}=(\overline{P}_\sigma)_{2,1}$. Damit folgt für $\beta := (P_\sigma)_{1,2}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{N}\mathbb{E}_\omega \sum_{n=1}^{N} \log|c_n z_{n-1}+d_n| &= \lambda^2\mathbb{E}_\sigma(|\beta|^2-|(P_\sigma)_{2,2}|^2-(-|(P_\sigma)_{2,2}|^2) \\
&+ 2\lambda^2\Re\left(\frac{\mathbb{E}_\sigma(\overline{\beta})\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}\beta)}{1-\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})}\right)+\mathcal{O}(\epsilon,\lambda^3,\frac{1}{N})
\end{aligned}
$$

Im Limes ergibt sich dann:

$$
\gamma = \lambda^2\left[\frac{1}{2}\mathbb{E}_\sigma(|\beta|^2)+\Re\frac{\mathbb{E}_\sigma(\overline{\beta})\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}\beta)}{1-\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})}\right]+\mathcal{O}(\epsilon,\lambda^3)
$$

□

5.2 Kontraktionsgeschwindigkeit im Erwartungswert

Nachdem wir nun den Lyapunovexponenten bis auf $\mathcal{O}(\epsilon,\lambda^3)$ kennen, versuchen wir den Radius R des Erwartungswertes $\mathbb{E}_\omega S_{\lambda,\epsilon,\sigma_1}\cdots S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n}\cdot\mathbb{D}$ durch diesen abzuschätzen. Dabei können wir zeigen:
Für jedes $C<2D$ gibt es hinreichend kleine λ und hinreichend große N, so dass:

$$
R(\mathbb{E}_\omega S_{\lambda,\epsilon,\sigma_1}\cdots S_{\lambda,\epsilon,\sigma_n}\cdot\mathbb{D}) < e^{-C\lambda^2 n}
$$

für alle $n\geq N$.

Zu einem Code $\omega=(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\Omega$ und dem zufälligen Matrizensystem $S_{\lambda,\sigma}$ ist $S_{\lambda,\omega}^N := S_{\lambda,\sigma_N}S_{\lambda,\sigma_{N-1}}\cdots S_{\lambda,\sigma_1}$ und $\widetilde{S_{\lambda,\omega}^N} := S_{\lambda,\sigma_1}\cdots S_{\lambda,\sigma_N}=((S_{\lambda,\omega}^{-1})^N)^{-1}$.

Bezeichne mit (M,R), $M \in \mathbb{C}, R \in \mathbb{R}_+$ den Kreis mit Mittelpunkt M und Radius R. Seien $\omega \in \Omega, M_0 \in \mathbb{D}, 0 < R_0 < 1 - |M|$ beliebig gewählt. Die Folgen $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ seien so definiert, dass $(M_n, R_n) = \widetilde{S^N_{\lambda,\omega}} \cdot (M_0, R_0)$.

Satz 5.3. *Sei $(M_n, R_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie oben definiert. Gilt weiterhin*
$\mathbb{E}_\omega(\max_{z\in\mathbb{D}}(\frac{1}{N}\log|(S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)|)) \le -C\lambda^2$ mit einem $C > 0$.
Dann ist $\mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(R_n) \le -C\lambda^2 + \mathcal{O}(\frac{1}{N})$.
Damit ist $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(R_n) \le -C\lambda^2$.

Beweis. Es bezeichne $(X,Y)_1 = X, (X,Y)_2 = Y$
Da die σ_n uiv. sind, haben $\widetilde{S^N_{\lambda,\omega}}$ und $S^N_{\lambda,\omega}$ die gleiche Verteilung. Also ist

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log R_n &= \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(\widetilde{S^N_{\lambda,\omega}}\cdot(M_0,R_0))_2 \\
&= \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(S^N_{\lambda,\omega}\cdot(M_0,R_0))_2 \\
&= \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(\frac{1}{2}\max_{\zeta,\xi\in(M_0,R_0)}|(S^N_{\lambda,\omega}\cdot\zeta) - (S^N_{\lambda,\omega}\cdot\xi)|)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit folgt hierbei daraus, dass $S^N_\sigma \cdot (M_0,R_0)$ ein Kreis und der maximale Abstand zweier Punkte auf einem Kreis gleich dem doppelten Radius ist.
Da $S^N_{\lambda,\omega}\cdot$ analytisch auf $\mathbb{D}$ ist, gilt für die geradlinige Strecke $[\zeta,\xi]$ zwischen ζ und ξ bezüglich des eindimensionalen Lebesquemaßes auf $[\zeta,\xi]$:

$$S^N_{\lambda,\omega}\cdot\zeta - S^N_{\lambda,\omega}\cdot\xi = \int_{[\zeta,\xi]} dz (S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)$$

Somit ist:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(\max_{\zeta,\xi\in\mathbb{D}}|S^N_{\lambda,\omega}\cdot\zeta - S^N_{\lambda,\omega}\cdot\xi|) &= \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(\max_{\zeta,\xi\in\mathbb{D}}|\int_{[\zeta,\xi]} dz(S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)|) \\
&\le \mathbb{E}_\omega \frac{1}{N}\log(2\max_{z\in\mathbb{D}}|(S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)|) \\
&= \mathbb{E}_\omega \max_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{N}\log(2|(S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)|) \\
&\le -C\lambda^2 + \frac{1}{N}\log 2
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.4. *Sei $S_{\lambda,\epsilon,\sigma} := R_\sigma e^{\lambda P_\sigma + i\epsilon Q_\sigma}$, wobei λ, ϵ zwei positive reelle Parameter, $R_\sigma = \begin{pmatrix} e^{i\eta_\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_\sigma} \end{pmatrix}$ mit $\eta_\sigma \in (0,2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}\}$ und P_σ, Q_σ Matrizen in $u(1,1)$*

sind.
Sei weiterhin $\epsilon \leq \lambda^{2+\delta}$ *für ein geeignetes* $\delta > 0$ *und* $\lambda \ll 1$.
Dann gilt:

$$\mathbb{E}_\omega(\max_{z\in\mathbb{D}} \frac{1}{N}\log|(S^N_{\lambda,\omega}\cdot)'(z)|) = -2D\lambda^2 + \mathcal{O}(\epsilon, \lambda^3, \frac{1}{N})$$

mit $D = \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(P_\sigma)_{1,2}|^2) + \Re\frac{\mathbb{E}(\overline{(P_\sigma)_{1,2}}\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma}(P_\sigma)_{1,2})}{1-\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma})}$.
($(P_\sigma)_{i,j}$ *bezeichnet hier den Eintrag der* i*-ten Zeile und* j*-ten Spalte von* P_σ*.)*

Beweis. Ersetzt man im Beweis zu Satz 5.1 $\mathbb{E}_\omega\frac{1}{N}\log|c_n z_{n-1} + d_n|$ durch $\mathbb{E}_\omega(\max_{z_0\in\mathbb{D}}\frac{1}{N}\log|c_n z_{n-1} + d_n|$, so ändert das die Beweiskette und damit auch das Ergebnis nicht.
Daher folgt direkt aus jenem Beweis:

$$\mathbb{E}_\omega(\max_{z_0\in\mathbb{D}} \frac{1}{N}\log|c_n z_{n-1} + d_n|) = D\lambda^2 + \mathcal{O}(\epsilon, \lambda^3, \frac{1}{N})$$

Die Behauptung folgt damit aus Satz 4.1.

5.3 Große Abweichungen

Wir wissen nun, dass der Radius von $\widetilde{S^n_{\lambda,\epsilon,\omega}}\cdot\mathbb{D}$ im Erwartungswert über ω ähnlich wie $e^{-2\gamma n}$ abfällt. Wie aber verhält sich dieser Radius für feste $\omega \in \Omega$? Mithilfe einer Abschätzung für große Abweichungen zeigen wir im Folgenden, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der Radius größer als $e^{-C\lambda^2 n}$ ist, für $C < 2D$ und hinreichend kleine λ ebenfalls exponentiell in n abfällt.

Satz 5.5. *Sei* $S_{\lambda,\epsilon,\sigma} := e^{i\epsilon Q_\sigma}R_\sigma e^{\lambda P_\sigma}$*, wobei* λ, ϵ *zwei positive reelle Parameter,* $R_\sigma = \begin{pmatrix} e^{i\eta_\sigma} & 0 \\ 0 & e^{-i\eta_\sigma}\end{pmatrix}$ *mit* $\eta_\sigma = \eta_\sigma \in (0, 2\pi)\backslash\{\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$ *sind.*
Dabei sei η_σ *wirklich von* σ *abhängig, d.h. es gibt mindestens zwei verschiedene Werte* α_0, α_1 *mit* $\mathbb{P}(\eta_\sigma = \alpha_i) > 0 \forall i = 0, 1$.
Seien weiterhin P_σ, Q_σ *Matrizen in* $u(1,1)$*, sowie* $\epsilon \leq \lambda^{2+\delta}$ *für ein geeignetes* $\delta > 0$ *und* $\lambda \ll 1$.
Dann $\exists K \in \mathbb{N}$ *so, dass:*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \max_{z_0\in\mathbb{D}}|(S^N_\omega\cdot)'(z_0)| > e^{-C\lambda^2 N}\}) \leq e^{-N\lambda^{2+\delta}((2D-C)\lambda^2 + \mathcal{O}(K\epsilon, K\lambda^3))}$$

Dabei ist $D = \frac{1}{2}\mathbb{E}(|(P_\sigma)_{1,2}|^2) + \Re\frac{\mathbb{E}(\overline{(P_\sigma)_{1,2}}\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2} - P_\sigma)_{2,2}))}{1-\mathbb{E}(e^{2i\eta_\sigma})}$.
Insbesondere ist für $C = D$*:*

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \max_{z_0\in\mathbb{D}}|(S^N_\omega\cdot)'(z_0)| > e^{-D\lambda^2 N}\}) \leq e^{-N\lambda^{2+\delta}(D\lambda^2 + \mathcal{O}(K\epsilon, K\lambda^3))}$$

Lemma 5.6. *Sei $S_{\lambda,\epsilon,\sigma}$ wie in Satz 5.5 definiert. Dann $\exists K \in \mathbb{N}$ so dass:*

1. $\mathbb{E}_{\sigma_{n+1},\ldots,\sigma_{n+K}}(z_{n+K}) = \mathcal{O}(K\lambda)$

2. $\mathbb{E}_{\sigma_{n+1},\ldots,\sigma_{n+K}}(z_{n+K}^2) = \mathcal{O}(K\lambda)$.

3. $\mathbb{E}_{\sigma_{n+1},\ldots,\sigma_{n+2K}}(z_{n+2K}) = \lambda\frac{\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2}-(P_\sigma)_{2,2})}{1-\mathbb{E}_\sigma e^{2i\eta_\sigma}} + \mathcal{O}(2K\lambda^2)$

Hierbei ist $K = \lceil c\log(\lambda)\rceil$, wobei c nur von der Verteilung von η_σ abhängt.

Beweis. Setze $\kappa := \mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})$ und $\mathbb{E}_n(X) := \mathbb{E}_{\sigma_n}(X)$.
Da η_σ von σ abhängt, ist $|\kappa| < 1$. Daher gilt $|\kappa|^K < \lambda^2$ für $K = \lceil 2\log(\lambda)/\log(|\mathbb{E}_\sigma e^{2i\eta_\sigma}|)\rceil$.
Mit $\mathbb{E}_{\sigma_{n+1},\ldots,\sigma_{n+K}}(z_{n+K}) = (\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}))^K z_n + \mathcal{O}(K\lambda)$ ist die erste Behauptung bewiesen.
Der Beweis der zweiten Behauptung ist analog.
Genauer ist

$$z_{n+1} = e^{2i\eta_{n+1}}[z_n + \lambda((P_{n+1})_{1,2} - (P_{n+1})_{2,2}) + \lambda((P_{n+1})_{1,1} - (P_{n+1})_{2,1})z_n] + \mathcal{O}(\lambda^2)$$

Und daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+2K}(z_{n+2K}) &= \mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+2K} e^{2i\eta_{n+2K}}(z_{n+2K-1} + \lambda((P_{n+2K})_{1,2} - (P_{n+2K})_{2,2})) \\
&+ \lambda((P_{n+2K})_{1,1} - (P_{n+2K})_{2,1}))z_{n+2K-1} + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= \mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+K}[(\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}))^K(z_n)] \\
&+ \lambda[\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,1} - (P_\sigma)_{2,1}))]\sum_{j=0}^{K-1}[\mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+K+j}(z_{n+K+j})(\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}))^{K-j-1}] \\
&+ \lambda[\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2} - (P_\sigma)_{2,2}))]\sum_{j=0}^{K-1}(\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}))^j] + \mathcal{O}(K\lambda^2)
\end{aligned}$$

Wegen 1. ist $\mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+K+j}(z_{n+K+j}) = \mathcal{O}(K\lambda^2)$ für alle $j \geq 0$. Mit $|\kappa|^K < \lambda^2$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{n+1,\ldots,n+2K}(z_{n+2K}) &= \lambda[\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2} - (P_\sigma)_{2,2}))]\frac{1-(\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}))^{2K}}{1-\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})} + \mathcal{O}(2K\lambda^2) \\
&= \lambda\frac{\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2} - (P_\sigma)_{2,2}))}{1-\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma})} + \mathcal{O}(2K\lambda^2)
\end{aligned}$$

□

Beweis zu Satz 5.5: Die Abschätzung für große Abweichungen gibt für jedes $\beta > 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \quad : \quad & \max_{z_0 \in \mathbb{D}} |(S_\omega^N \cdot)'(z_0)| > e^{-C\lambda^2 N}\}) \\
\leq \quad & e^{\beta C \lambda^2 N} \mathbb{E}_\omega \big(e^{\beta \max_{z_0 \in \mathbb{D}} (\log |(S_\omega^N \cdot)'(z_0)|}\big) \\
= \quad & e^{\beta C \lambda^2 N} e^{-2\beta D \lambda^2 N} \mathbb{E}_\omega \big(e^{\beta \max_{z_0 \in \mathbb{D}} (\log |(S_\omega^N \cdot)'(z_0)| + 2D\lambda^2 N)}\big) \\
= \quad & e^{\beta C \lambda^2 N} e^{-2\beta D \lambda^2 N} \mathbb{E}_\omega \big(e^{2\beta \max_{z_0 \in \mathbb{D}} \sum_{n=1}^N (-\log |c_{n+1} z_n + d_{n+1}| + D\lambda^2)}\big)
\end{aligned}$$

Da für ein geeignetes $\tilde{Q}$ gilt

$$S_{\lambda,\epsilon,\sigma} = e^{i\epsilon Q_\sigma} R_\sigma e^{\lambda P_\sigma} = R_\sigma e^{\lambda P_\sigma + i\epsilon \tilde{Q}_\sigma} + \mathcal{O}(\lambda\epsilon)$$

lässt sich der Beweis zu Satz 5.1 anwenden. Aus diesem folgt:

$$\begin{aligned}
\max\nolimits_{z_0 \in \mathbb{D}} \quad & (-\log |c_{n+1} z_n + d_{n+1}| + D\lambda^2) \\
= \qquad & \max_{z_0 \in \mathbb{D}} \Re[-\lambda (P_{n+1})_{2,2} - \lambda z_n (P_{n+1})_{2,1} - \frac{1}{2}\lambda^2 (P_{n+1}^2)_{2,2} - \frac{1}{2}\lambda^2 z_n (P_{n+1}^2)_{2,1} \\
& + \frac{1}{2}\lambda^2 ((P_{n+1})_{2,2})^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 ((P_{n+1})_{2,1})^2 + z_n^2 + \lambda^2 (P_{n+1})_{2,1} (P_{n+1})_{2,2} z_n] \\
& + D\lambda^2 + \mathcal{O}(\epsilon, \lambda^3)
\end{aligned} \tag{6}$$

Ist Y eine zentrierte Zufallsvariable mit $-C' \leq Y \leq C'$ für eine Konstante $C' > 0$, dann ist:

$$\mathbb{E}(e^{\beta Y}) \leq (e^{\beta^2 C'^2 / 2})$$

Der Einfachheit halber nehmen wir zuerst auch an dass P_σ zentriert ist.

Die ersten beiden Terme aus (6) sind aufgrund der entsprechenden Bedingung an P_σ im Erwartungswert über σ_{n+1} zentriert. Nach der Definition von D ist $\Re[-\frac{1}{2}\lambda^2 (P_{n+1}^2)_{2,2} + \frac{1}{2}\lambda^2 ((P_{n+1})_{2,2})^2 = -D\lambda^2$. Laut Lemma 5.6 sind die restlichen Terme im Erwartungswert über $(\sigma_{n-K}, \ldots, \sigma_n)$ bis auf Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(K\lambda^3)$ zentriert, falls $n \geq K$ ist. Die Summe der Terme mit $n < K$ ist von Ordnung $\mathcal{O}(K)$. Die Hölder Ungleichung gibt für ein Produkt von Zufallsvariablen:

$$\mathbb{E}(\prod_{l=1}^K X_l) \leq (\prod_{l=1}^K \mathbb{E}(X_l^K))^{1/K}$$

Unter Verwendung davon ergibt sich mit einer Konstante C', so dass $\forall \sigma \in \Sigma, z \in \mathbb{D}$

gilt $-C' < \log|c_\sigma z + d\sigma| < C'$ folgendes:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\omega \quad \left(e^{2\beta \max_{z_0\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{N}(-\log|c_{n+1}z_n+d_{n+1}|+D\lambda^2)}\right)\\
&\leq \prod_{l=1}^{K}[\mathbb{E}_\omega(e^{2\beta K \max_{z_0\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\lfloor N/K\rfloor}(-\log|c_{nK+l+1}z_{nK+l}+d_{nK+l+1}|+D\lambda^2)+\mathcal{O}(\beta K)})]^{1/K}\\
&\leq \max_{1\leq l\leq K} \mathbb{E}_\omega(e^{2\beta K \max_{z_0\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\lfloor N/K\rfloor}(-\log|c_{nK+l+1}z_{nK+l}+d_{nK+l+1}|+D\lambda^2)+\mathcal{O}(\beta K)})
\end{aligned}$$

Jetzt kann man die Terme in den Erwartungswerten über jeweils $\sigma_{nK+1},\ldots,\sigma_{nK+K}$ als unabhängig behandeln und somit schrittweise entkoppeln, so dass:

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq l\leq K} \mathbb{E}_\omega(e^{2\beta K \max_{z_0\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{\lfloor N/K\rfloor}(-\log|c_{nK+l+1}z_{nK+l}+d_{nK+l+1}|+D\lambda^2)+\mathcal{O}(\beta K)})\\
\leq\ & e^{2\beta^2K^2C'^2+\mathcal{O}(\beta K^2\lambda^3,\beta K\epsilon)} \max_{1\leq l\leq K} \mathbb{E}_\omega(e^{2\beta K \max_{z_0\in\mathbb{D}} \sum_{n=2}^{\lfloor N/K\rfloor}(-\log|c_{nK+l+1}z_{nK+l}+d_{nK+l+1}|+D\lambda^2)+\mathcal{O}(\beta K)})\\
\leq\ & e^{2\beta^2K^2C'^2N+\mathcal{O}(\beta K^2N\lambda^3,\beta KN\epsilon)+\mathcal{O}(\beta K)}
\end{aligned}$$

Und damit ist:

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \max_{z_0\in\mathbb{D}}|(S_\omega^N\cdot)'(z_0)| > e^{-C\lambda^2N}\}) \leq e^{-N\beta(2D\lambda^2+-C\lambda^2-2\beta K^2C'^2+\mathcal{O}(K^2\lambda^3,K\epsilon)+\mathcal{O}(K/N))}$$

Setzt man nun $\beta=\epsilon=\lambda^{2+\delta}$ ($\delta>0$), so erhält man

$$\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \max_{z_0\in\mathbb{D}}|(S_\omega^N\cdot)'(z_0)| > e^{-C\lambda^2N}\}) \leq e^{-N\lambda^{2+\delta}(D\lambda^2-C\lambda^2+\mathcal{O}(K^2\lambda^3,K^2\epsilon,K/N)}$$

Da $K=\mathcal{O}(\log\lambda)$ ist, ist dabei $K^2\lambda^3$ und $K^2\epsilon$ von höherer Ordnung in λ als λ^2.

Ist P_σ nicht zentriert, so muss man den Erwartungswert über die jeweils $2K$ letzten Schritte nehmen. Für $P_\sigma\in u(1,1)$ ist $\Re((P_\sigma)_{2,2})=0$. Der zweite Summand aus (6) fällt jedoch nicht weg, sondern ergibt mit Lemma 5.6 (3.):

$$\mathbb{E}_\omega(-\lambda z_n(P_{n+1})_{2,1}) = -\lambda^2\mathbb{E}_\sigma((P_\sigma)_{2,1})\frac{\mathbb{E}_\sigma(e^{2i\eta_\sigma}((P_\sigma)_{1,2}-(P_\sigma)_{2,2})}{1-\mathbb{E}_\sigma e^{2i\eta_\sigma}} + \mathcal{O}(2K\lambda^2)$$

Dieser zusätzliche Term tritt jedoch auch in der Definition von D auf. Somit ergibt sich dann mit ähnlicher Beweisführung wie im vereinfachten Fall:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : \max_{z_0\in\mathbb{D}}|(S_\omega^N\cdot)'(z_0)| > e^{-C\lambda^2N}\}) &\leq e^{-N\beta(2D\lambda^2+-C\lambda^2-2\beta 2K^2C'^2+\mathcal{O}(K^2\lambda^3,K\epsilon)+\mathcal{O}(K/N))}\\
&= e^{-N\lambda^{2+\delta}(D\lambda^2-C\lambda^2+\mathcal{O}(K^2\lambda^3,K^2\epsilon,K/N)}
\end{aligned}$$

für $\beta=\epsilon=\lambda^{2+\delta}$. Auch hier ist natürlich $K^2\lambda^3$ und $K^2\epsilon$ von höherer Ordnung in λ als λ^2. □

6 Hyperbolische Systeme

6.1 Existenz und Analytitizät der natürlichen Projektion

Wir betrachten nun zufällige dynamische Systeme die bezüglich einer geeigneten Metrik auf $\mathbb{D}$ hyperbolisch sind. Wie wir sehen werden, sind solche Systeme topologisch.

Satz 6.1. *Zu dem zweidimensionalen IFS $S_\sigma \cdot$ gebe es eine kompakte Menge $K \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, eine Metrik d auf K sowie zwei Zahlen $\kappa \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\xi, \zeta \in K, \omega \in \Omega$ gilt:*

- $S_\omega^N \cdot \overline{\mathbb{D}} \subseteq K$
- $d(S_\omega^N \cdot \xi, S_\omega^N \cdot \zeta) \leq \kappa\, d(\xi, \zeta)$
- $\sup_{\xi,\zeta \in K} d(\xi, \zeta) < \infty$

Dann ist das IFS topologisch, d.h. der Limes

$$\lim_{M \to \infty} \widetilde{S_\omega^M} \cdot \xi$$

existiert und ist unabhängig von $\xi \in \mathbb{D}$.

Beweis. Da für jedes $\omega \in \Omega$ ein $\tau \in \Omega$ mit $\widetilde{S_\omega^N} = S_\tau^N$ existiert, ist die obige Voraussetzung gleichbedeutend mit:

- $\widetilde{S_\omega^N} \cdot \overline{\mathbb{D}} \subseteq K$
- $d(\widetilde{S_\omega^N} \cdot \xi, \widetilde{S_\omega^N} \cdot \zeta) \leq \kappa d(\xi, \zeta)$
- $\sup_{\xi,\zeta \in K} d(\xi, \zeta) < \infty$

für alle $\xi, \zeta \in K, \omega \in \Omega$ mit K, d, κ und N wie oben.

Da $\widetilde{S_\omega^{N+1}} \cdot \mathbb{D} \subseteq \widetilde{S_\omega^N} \cdot \mathbb{D}$ ist, gilt für alle $M \geq N$ und $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi,\zeta \in \mathbb{D}} d(\widetilde{S_\omega^M} \cdot \xi, \widetilde{S_\omega^M} \cdot \zeta) &\leq \sup_{\xi,\zeta \in K} d(\widetilde{S_\omega^{M-N}} \cdot \xi, \widetilde{S_\omega^{M-N}} \cdot \zeta) \\
&\leq \sup_{\xi,\zeta \in K} d(\widetilde{S_\omega^{N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor - 1}} \cdot \xi, \widetilde{S_\omega^{N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor - 1}} \cdot \zeta) \\
&\leq \kappa^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor - 1} \sup_{\xi,\zeta \in K} d(\xi, \zeta)
\end{aligned}$$

Da $\lim_{M \to \infty} \kappa^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor - 1} = 0$ ist, ist die Behauptung damit bewiesen. □

Jetzt betrachten wir eine analytische Familie $S_{\lambda,\sigma}\cdot$ von IFS, die die Voraussetzungen aus Satz 6.1 uniform in λ erfüllen.

Satz 6.2. *Sei $S_{\lambda,\sigma}\cdot$ mit $\lambda \in U \subset \mathbb{C}$, wobei $0 < \mathcal{L}^2(U) < \infty$, und $\sigma \in \Sigma$ eine parameterabhängige Familie von zufälligen dynamischen Systemen. Dabei sei für jedes $\xi \in \mathbb{D}$ die Abbildung $U \to \mathbb{D}$, $\lambda \mapsto S_{\lambda,\sigma} \cdot \xi$ analytisch auf U. Weiterhin erfülle $S_{\lambda,\sigma}\cdot$ die Voraussetzungen aus Satz 6.1 uniform in $\lambda \in U$ und d sei auf K vergleichbar mit der euklidischen Metrik, d.h. es gebe ein $C = C(K)$ mit:*

$$\frac{1}{C}|\xi - \zeta| \leq d(\xi, \zeta) \leq C|\xi - \zeta|$$

Dann ist für jedes $\omega \in \Omega$ die Abbildung $\lambda \mapsto \Pi_\lambda(\omega)$ analytisch auf U. (Dabei ist $\Pi_\lambda : \Omega \to \mathbb{D}$ die natürliche Projektion aus Definition 1.5.)

Beweis. Es sei $s : \Omega \to \Omega$, $(\sigma_n)_{n\geq 1} \mapsto (\sigma_n)_{n\geq 2}$ die Verschiebung eines Codes nach rechts.
Wähle ein $\lambda_0 \in U$. Zu $\lambda \in U, M \geq N$ betrachten wir die Abbildung $f_{M,\omega} : U \to \mathbb{D}$, $\lambda \mapsto (S_{\lambda,\sigma_1} \cdots S_{\lambda,\sigma_M}\cdot)(\Pi_{\lambda_0}(s^M(\omega)))$. Da $S_{\lambda,\sigma} \cdot z$ in $\lambda \in U$ analytisch ist, ist auch $f_{M,\omega}$ analytisch auf U.
Sei $f_\omega : U \to \mathbb{D}$, $\lambda \mapsto \Pi_\lambda(\omega)$.
Dann ist für alle $\lambda \in U$, $M \geq N$ mit geeigneten $z, z' \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} |f_{M,\omega} - f_\omega| &= |S_{\lambda,\sigma_1} \cdots S_{\lambda,\sigma_M} \cdot z - S_{\lambda,\sigma_1} \cdots S_{\lambda,\sigma_M} \cdot z'| \\ &\leq 2C^2\kappa^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor - 1} \end{aligned}$$

Da $\kappa < 1$ konvergieren damit die $f_{M,\omega}$ gleichmäßig auf U gegen f_ω und daher ist auch f_ω auf U analytisch. □

6.2 Beispielsystem

Im Folgenden zeigen wir ein Beispiel, in dem die Voraussetzungen der Sätze 6.1 und 6.2 mit der hyperbolischen Metrik erfüllt sind.

Die hyperbolische Metrik $d_{\mathbb{H}}$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ ist folgendermaßen definiert:

$$d_{\mathbb{H}}(x, y) := \text{Arccosh}\left(1 + \frac{|x - y|^2}{2\Im x \Im y}\right) \ \forall x, y \in \mathbb{H}$$

Damit definieren wir die Metrik $d_{\mathbb{D}}$ auf der Einheitkreisscheibe $\mathbb{D}$ durch:

$$d_{\mathbb{D}}(\xi, \zeta) := d_{\mathbb{H}}(\mathcal{C}^* \cdot \xi, \mathcal{C}^* \cdot \zeta) \ \forall \xi, \zeta \in \mathbb{D}$$

Wie in Kapitel 2 ist hierbei $\mathcal{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ die Cayleytransformation.
Auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ ist $d_{\mathbb{D}}$ vergleichbar mit der euklidischen Metrik.

Satz 6.3. *Zu $\sigma \in \Sigma$ und $\lambda \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}_+$ sei $S_{\lambda,\sigma} = \mathcal{C}T_{\lambda,\sigma}\mathcal{C}*$ mit*

$$T_{\lambda,\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{T}_\sigma \begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \hat{T}_\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sl(2, \mathbb{R})$$

mit $c \neq 0$.
Dann gibt es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{D}$ und eine Zahl $\kappa = \kappa(K) \in (0, 1)$ so, dass:

1. $S_{\lambda,\sigma} \cdot \overline{\mathbb{D}} \subset K$
2. $$\sup_{\xi,\zeta \in K} \frac{d_{\mathbb{D}}(S_{\lambda,\sigma} \cdot \xi, S_{\lambda,\sigma} \cdot \zeta)}{d_{\mathbb{D}}(\xi, \zeta)} \leq \kappa$$
3. $\sup_{\xi,\zeta \in K} d(\xi, \zeta) < \infty$

Dann können die Sätze 6.1 und 6.2 angewendet werden.

Beweis. Aufgrund der Definition von $d_{\mathbb{D}}$ und von $S_{\lambda,\sigma}$ reicht es zu zeigen, dass die obigen Behauptungen auf $\mathbb{H}$ für $T_{\lambda,\sigma}$ und die Metrik $d_{\mathbb{H}}$ gelten.
zu 1.
Wähle zuerst λ, σ beliebig aber fest. Dann ist

$$\begin{aligned} T_{\lambda,\sigma} \cdot \overline{\mathbb{H}} &= \begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{T}_\sigma \cdot \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) \geq \lambda\} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot K'_{\lambda,\sigma} = K''_{\lambda,\sigma} \end{aligned}$$

Dabei ist (wegen $c \neq 0$) $K'_{\lambda,\sigma}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in $\overline{\mathbb{H}}$ und damit $K''_{\lambda,\sigma}$ eine abgeschlossene Kreisscheibe in $\mathbb{H}$.
Da $[\alpha, \beta]$ kompakt und Σ endlich ist, ist $K'' = \bigcup_{\lambda,\epsilon \in [\alpha,\beta] \times \Sigma} K''_{\lambda,\sigma}$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{H}$ und daher ist $K := \mathcal{C} \cdot K''$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{D}$.
zu 2.
Da $\hat{T}_\sigma$ in $Sl(2, \mathbb{R})$ ist, gilt

$$d_{\mathbb{H}}(\hat{T}_\sigma \cdot x, \hat{T}_\sigma \cdot y) = d_{\mathbb{H}}(x, y) \; \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

Weiterhin ist

$$\frac{d_{\mathbb{H}}(x + i\lambda, y + i\lambda)}{d_{\mathbb{H}}(x, y)} = \frac{\operatorname{Arccosh}\left(1 + \frac{|x-y|^2}{2(\Im x + \lambda)(\Im y + \lambda)}\right)}{\operatorname{Arccosh}\left(1 + \frac{|x-y|^2}{2\Im x \Im y}\right)} < 1$$

für alle $x, y \in \mathbb{H}$ und da K'' kompakt ist gibt es damit auch ein $\kappa < 1$ so dass

$$\frac{d_{\mathbb{H}}(x + i\lambda, y + i\lambda)}{d_{\mathbb{H}}(x, y)} \leq \sqrt{\kappa}\ \forall x, y \in K''$$

Damit ist 2. bewiesen.
3. folgt direkt aus der Kompaktheit von K''. □

7 Absolute Stetigkeit des invarianten Maßes

Beweis von Satz 1.4:
Wir verwenden hier die Strategie des Beweises zu Theorem 2.3 (ii) aus [9].

Sei $U' := \{\lambda \in U : \frac{h}{\gamma_\lambda} > 4\}$. Da γ_λ stetig ist, ist U' eine offene Teilmenge von U. Wähle $\lambda_0 \in U'$ beliebig aber fest. Es genügt zu zeigen, dass $\nu_\lambda := \mathbb{P} \circ \Pi_\lambda$ für Lebesque-fast alle λ in einer Umgebung von λ_0 absolut stetig ist.

Sei $S_\sigma = S_{\lambda_0,\sigma}, \Pi = \Pi_{\lambda_0}$ und $\gamma = \gamma_{\lambda_0}$. Wähle $\epsilon > 0$ so, dass $4\gamma < h - 3\epsilon$.
Da γ_λ stetig in λ ist, können wir $\eta > 0$ so wählen, dass $|\gamma - \gamma_0| \leq \frac{\epsilon}{4}\, \forall \lambda \in \overline{U_\eta(\lambda_0)}$.

Mit Satz 4.1 gilt für den Lyapunovexponenten für $\mathbb{P}$-f.a. $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned} 2\gamma_\lambda &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|S^n_{\lambda,\omega}\| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \|\widetilde{S^n_{\lambda,\omega}}\| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\max_{e\in\mathbb{C}P(1)} \|\widetilde{S^n_{\lambda,\omega}} e\|) \\ &\geq 2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\max_{e\in\mathbb{C}P(1):\pi(e)\in\mathbb{D}} \|\widetilde{S^n_{\lambda,\omega}} e\|) \\ &= - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda,\omega}}\cdot)'(\xi)|) \end{aligned} \tag{7}$$

Mit dem Shannon-McMillan-Breiman Satz ist

$$h = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(\{\omega|\omega_{|n} = \tau_{|n}\}) \text{ für } \mathbb{P}\text{-f.a. } \tau \in \Omega \tag{8}$$

Laut dem Satz von Egorow kann man für jedes $\epsilon' > 0$ eine Menge $\Omega' = \Omega'(\epsilon') \subset \Omega$ finden, so dass $\mathbb{P}(\Omega') > 1 - \epsilon'$ und die Konvergenz in den Gleichungen (7) und (8) gleichmäßig auf Ω' ist.

Für den weiteren Beweis verwenden wir folgende Notationen:
Für ein endliches Wort $w \in \Sigma^n$ bezeichne $[w] := \{\omega \in \Omega' | (\omega_1, \dots, \omega_n) = w\}$ die

zugehörige Zylindermenge in Ω'.
Die gemeinsame Anfangssequenz zweier Codes $\omega, \tau \in \Omega'$ bezeichnen wir mit $\omega \wedge \tau$, d.h. $\omega, \tau \in [\omega \wedge \tau]$ und für $n = |\omega \wedge \tau|$ ist $\omega_{n+1} \neq \tau_{n+1}$.
Für ein endliches Wort w über Σ (welches auch leer sein kann) bezeiche $\Sigma_w := \{(\omega, \tau) \in \Omega'^2 : \omega \wedge \tau = w\}$.

Sei nun $\tilde{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_{|\Omega'}$ und $\tilde{\nu}_\lambda = \tilde{\mathbb{P}} \circ \Pi_\lambda^{-1}$.
Wenn wir nun zeigen, dass $\tilde{\nu}_\lambda$ für f.a. $\lambda \in U_\eta(\lambda_0)$ absolut stetig ist, dann können wir mit Hilfe einer geeigneten Folge von (ϵ'_n, Ω'_n) mit $\epsilon'_n \searrow 0$ folgern, dass ν_λ für fast alle $\lambda \in U_\eta(\lambda_0)$ absolut stetig ist.
Um dies zu erreichen zeigen wir, dass:

$$\mathcal{I} := \int_{U_\eta(\lambda_0)} \int_{\mathbb{D}} \underline{D}(\tilde{\nu}_\lambda, x) d\tilde{\nu}_\lambda d\lambda < \infty$$

ist, wobei

$$\underline{D}(\tilde{\nu}_\lambda, x) := \liminf_{r \searrow 0} \frac{\tilde{\nu}_\lambda(\overline{U_r(x)})}{r^2 \pi}$$

die untere Dichte von $\tilde{\nu}_\lambda$ am Punkt x ist.

Dann ist für f.a. $\lambda \in U_\eta(\lambda_0)$ die untere Dichte $\underline{D}(\tilde{\nu}_\lambda, x) < \infty$ für f.a. x und mit Theorem 2.12 aus [12] ist $\tilde{\nu}_\lambda$ absolut stetig.

Wenn wir das Lemma von Fatou auf die Definition von $\mathcal{I}$ anwenden erhalten wir:

$$\mathcal{I} \leq \liminf_{r \searrow 0} \int_{U_\eta(\lambda_0)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\tilde{\nu}_\lambda(\overline{U_r(x)})}{r^2 \pi} d\tilde{\nu}_\lambda d\lambda \tag{9}$$

Nun schreiben wir $\tilde{\nu}_\lambda(\overline{U_r(x)})$ als Integral über die Indikatorfunktion und nutzen die Definition von $\tilde{\nu}_\lambda$ für eine Änderung der Variablen. Damit erhalten wir:

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{\nu}_\lambda(\overline{U_r(x)}) d\tilde{\nu}_\lambda = \iint_{\mathbb{R}^2} 1_{\overline{U_r(x)}} d\tilde{\nu}_\lambda d\tilde{\nu}_\lambda = \iint_{\Omega'^2} 1_{\{\omega \in \Omega' : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\}} d\mathbb{P}_2(\omega, \tau)$$

Dabei ist $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P} \times \mathbb{P}$.

Setzen wir dies in (9) ein und ändern die Reihenfolge der Integration, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \liminf_{r \searrow 0} \frac{1}{r^2 \pi} \iint_{\Omega'^2} \mathcal{L}^d \{\lambda \in U_\eta(\lambda_0) : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\} d\mathbb{P}_2(\omega, \tau) \qquad (10) \\ &= \liminf_{r \searrow 0} \frac{1}{r^2 \pi} \sum_{n \geq 0} \sum_{w \in \Sigma^n} \iint_{\Sigma_w} \mathcal{L}^d \{\lambda \in U_\eta(\lambda_0) : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\} d\mathbb{P}_2(\omega, \tau) \end{aligned}$$

Sei nun $\omega \wedge \tau \in \Sigma^n$. Dann ist mit $s : \Omega' \to \Omega'$, $(\sigma_n)_{n\geq 1} \mapsto (\sigma_n)_{n\geq 2}$:

$$\begin{array}{rc} & \mathcal{L}^d\{\lambda \in U : |\Pi_\lambda(\omega) - \Pi_\lambda(\tau)| \leq r\} \\ = & \mathcal{L}^d\{\lambda \in U : |\widetilde{S^n_{\lambda\omega}} \cdot \Pi_\lambda(s^n(\omega)) - \widetilde{S^n_{\lambda,\omega}} \cdot \Pi_\lambda(s^n(\tau))| \leq r\} \\ \leq & \mathcal{L}^d\{\lambda \in U : |\Pi_\lambda(s^n(\omega)) - \Pi_\lambda(s^n(\tau))| \leq [\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda\omega}}\cdot)'(\xi)|]^{-1} r\} \\ \leq & C[\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda\omega}}\cdot)'(\xi)|]^{-2} r^2 \end{array}$$

Wobei C die Konstante aus der Transversalitätsbedingung ist.

Einsetzen in (10) ergibt:

$$\mathcal{I} \leq \frac{C}{\pi} \sum_{n\geq 0} \sum_{w\in\Sigma^n} \iint_{\Sigma_w} [\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda\omega}}\cdot)'(\xi)|]^{-2} d\mathbb{P}_2(\omega,\tau) \tag{11}$$

Da die Konvergenzen in (7) und (8) gleichmäßig auf Ω' sind, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $\omega \in \Omega'$ und $n \geq N$ gilt:

$$[\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda\omega}}\cdot)'(\xi)|]^{-2} \leq e^{n(4\gamma_\lambda+\epsilon)}$$

und

$$\mathbb{P}[\omega_{|n}] \leq e^{-n(h-\epsilon)}$$

Aufgrund der Wahl von η gilt für alle $\lambda \in U_\eta(\lambda_0)$:

$$e^{n(4\gamma_\lambda+\epsilon)} \leq e^{n(4\gamma+2\epsilon)}$$

Für jedes Wort $w \in \Sigma^n$ ist $\mathbb{P}_2(\Sigma_w) \leq (\mathbb{P}[w])^2$. Ist $w = \omega_{|n}$ für ein $\omega \in \Omega'$, so ist $\mathbb{P}[w] = \mathbb{P}[\omega_{|n}] \leq e^{-n(h-\epsilon)}$. Sonst ist $\Sigma_w = \emptyset$. In beiden Fällen ist also:

$$\mathbb{P}_2(\Sigma_w) \leq \mathbb{P}[w] e^{-n(h-\epsilon)}$$

Also ist:

$$\sum_{n\geq N} \sum_{w\in\Sigma^n} \iint_{\Sigma_w} [\min_{\xi\in\mathbb{D}} |(\widetilde{S^n_{\lambda\omega}}\cdot)'(\xi)|]^{-2} d\mathbb{P}_2(\omega,\tau) \leq \sum_{n\geq N} e^{n(4\gamma+2\epsilon)-n(h-\epsilon)}$$

Das ist endlich, da $h - 4\gamma > 3\epsilon$ ist. Damit ist auch $\mathcal{I}$ endlich. $\square$

Literatur

[1] Rabi Bhattacharya, Mukul Majumdar: Random dynamical systems (2007, Cambridge University Press, New York)

[2] Freeman J. Dyson: The dynamics of a disordered linear chain, Physical Review 92, No. 6, 1331-1338 (1953)

[3] P. W. Anderson: Absence of diffusion in certain random lattices, Physical Review 109, No. 5, 1492-1505 (1958)

[4] S. Jitomirskaya, H. Schulz-Baldes, G. Stolz: Delocalization in random polymer models, Commun. Math. Phys. 233, 27-48 (2003)

[5] Barry Simon: Kotani theory for one dimensional stochastic Jacobi matrices, Commun. Math. Phys. 89, 227-234 (1983)

[6] B. Solomyak: On the random series $\sum \frac{+}{-} \lambda^i$ (an Erdös problem), Annals of Math. 142, 611-625 (1995)

[7] B. Solomyak: Measure and dimension for some fractal families, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 124, No. 3, 531-546 (1998)

[8] K. Simon, B. Solomyak, M. Urbanski: Hausdorff dimension of limit sets for parabolic IFS with overlaps, Pacific Journal of Math. 201, No. 2, 441-478 (2001)

[9] K. Simon, B. Solomyak, M. Urbanski: Invariant measures for parabolic IFS with overlaps and random continued fractions, Trans. Am. Math. Soc. 353, No. 12, 5145-5164 (2001)

[10] Persi Diaconis, David Freedman: Iterated random functions, SIAM Review 41, No.1, 45-76 (1999)

[11] Yuval Perez, Boris Solomyak: Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof, Math. Research Letter 3, 231-239 (1996)

[12] P. Mattila: Geometry of Sets and measures in Euclidean spaces (1995, Cambridge University Press, Cambridge)

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als den angegebenen Quellen angefertigt habe und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen hat und von dieser als Teil einer Prüfungsleistung angenommen wurde. Alle Ausführungen, die wörtlich oder sinngemäß übernommen wurden, sind als solche gekennzeichnet.

Erlangen, den 17.12.2009

Dorothee Barthel