Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 2 (24.4.2024-1.5.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P6: Bestimme die Minimalpolynome von $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$ und $\beta = \sqrt{6+2\sqrt{5}}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe P7: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Gegeben sei $f = x^4 - x^3 + 2x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

(1) Zeige, dass f genau 2 reelle Nullstellen besitzt.
(2) Sei α eine von 1 verschiedene, reelle Nullstelle von f. Bestimme das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
(3) Zerlege f über $\mathbb{Q}(\alpha)$ in irreduzible Faktoren.

Aufgabe P8: Sei $f = x^4 + 2x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ und α das Bild von x in $K = \mathbb{Q}[x]/(f)$.

(1) Zeige, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. (Daher ist K ein Körper und jedes Element von K eine $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$.)
(2) Stelle
$$\frac{1}{\alpha^3 + 2\alpha + 2}$$
als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ dar.

Aufgabe P9: (Staatsexamensaufgabe)

(1) Zeigen Sie, dass durch
$$K = (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[T]/(T^3 - 2)$$
ein Körper mit 343 Elementen gegeben wird.
(2) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der komplexen Zahl $z = \pi + ei$ über $\mathbb{R}$.
(3) Zeigen oder widerlegen Sie, dass das Polynom
$$f(X) = X^{2001} + 105X^{103} + 15X + 45$$
über folgenden Körpern K irreduzibel ist:
   (a) $K = \mathbb{Q}$,
   (b) $K = \mathbb{R}$,
   (c) $K = \mathbb{F}_2$,
   (d) $K = \mathbb{Q}[T]/(f(T))$.
   (e) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}[T]/(f(T))$ ein Körper ist.

Datei: kt_u22.tex. Version vom 22.4.2024

Aufgabe P10: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei $\alpha = \sqrt{10 - 5\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$.

(1) Bestimme das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
(2) Zeige, dass die Nullstellen von f die reellen Zahlen $\pm\sqrt{10 + 5\sqrt{2}}$ und $\pm\sqrt{10 - 5\sqrt{2}}$ sind.
(3) Zeige:
$$\frac{\sqrt{10 + 5\sqrt{2}}}{\sqrt{10 - 5\sqrt{2}}} = 1 + \sqrt{2}.$$
(4) Zeige: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$.
(5) Zerlege f über $\mathbb{Q}(\alpha)$ in irreduzible Faktoren.

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H4: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Wir betrachten die Zahlen

$$\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \beta = i\sqrt{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{C}.$$

(1) Bestimme die Minimalpolynome von α und β über $\mathbb{Q}$.
(2) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha) \neq \mathbb{Q}(\beta)$ gilt.
(3) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\beta)$ gilt.
(4) Bestimme das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
(5) Bestimme alle komplexen Nullstellen des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe H5: (Staatsexamensaufgabe - mit Hinweis)
Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.
(b) Sei $K = \mathbb{F}_2[X]/(f) = \mathbb{F}_2(\alpha)$ mit $\alpha = \overline{X}$ die durch Adjunktion einer Nullstelle von f entstandene algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{F}_2$.
Zeigen Sie, dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $K^\times$ ist.
(c) Zeigen Sie: In $K[X]$ gilt

$$f = (X-\alpha)\cdot(X-\alpha^2)\cdot(X-\alpha^4)\cdot(X-\alpha^8).$$

(Hinweis: Zeige zunächst die Hilfsaussage: Ist β eine Nullstelle von f, so auch β^2.)

Aufgabe H6: (Staatsexamensaufgabe) Sei $f(X) = X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$, und sei α eine komplexe Nullstelle von f.

a) Zeigen Sie, daß $1, \alpha, \alpha^2$ eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.
b) Schreiben Sie $(1+\alpha)^{-1}$ als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten bezüglich dieser Basis.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 3.5.2024, 10:00 Uhr in Übungskästen oder in den Übungsgruppen