

Funktionentheorie II

Wolfgang M. Ruppert

Wintersemester 2025/2026

10. Februar 2026

Skript zu einer im Wintersemester 2025/2026 am Department Mathematik der Universität
Erlangen-Nürnberg gehaltenen Vorlesung

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundlagen	5
1. Wiederholung	5
2. Die Umlaufzahl	10
3. Der Residuensatz und Residuen	13
4. Null- und Polstellen zählen — Der Satz von Rouché	17
Kapitel 2. Folgen holomorpher Funktionen	25
1. Konvergenz von Funktionenfolgen (Wiederholung)	25
2. Der Satz von Hurwitz und Folgen injektiver holomorpher Funktionen	28
3. Der Satz von Montel	29
Kapitel 3. Die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$	33
1. Einführung	33
2. Meromorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$	36
3. Verzweigung - Die Riemann-Hurwitz-Formel für $\widehat{\mathbb{C}}$	40
4. Die Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion	45
Kapitel 4. Möbius-Transformationen	49
1. Einführung	49
2. Das Doppelverhältnis	55
3. Verallgemeinerte Geraden	57
Kapitel 5. Biholomorphe Abbildungen	67
1. Biholomorphe Abbildungen	67
2. $\text{Aut}(\mathbb{E})$ - die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$	69
3. Die Automorphismen der oberen Halbebene - $\text{Aut}(\mathbb{H})$	75
4. Die biholomorphen Abbildungen $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$	76
5. Die Automorphismen von $\mathbb{C}$ - $\text{Aut}(\mathbb{C})$	77
Kapitel 6. Der Riemannsche Abbildungssatz	79
1. Einführung	79
2. Reduktion von $G \subsetneq \mathbb{C}$ zu $G \subseteq \mathbb{E}$	80
3. Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebieten in $\mathbb{E}$	81
4. Warum gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{F}_G$ mit $ f'(0) = s_G$	83
5. Zurück zum Riemannschen Abbildungssatz	84
Kapitel 7. Meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$	87
1. Meromorphe Funktionen	87
2. Meromorphe Funktionen mit nur endlich vielen Polen	89
3. Meromorphe Funktionen mit unendlich vielen Polen	89
4. Konvergenz von Reihen meromorpher Funktionen	90
5. Der Satz von Mittag-Leffler	93
6. Doppeltperiodische Funktionen - elliptische Funktionen	96
Kapitel 8. Exkurse	103
1. Über Funktionen, die die gleichen Werte an den gleichen Stellen annehmen	103
2. Beispiele ausgefüllter Julia-Mengen für quadratische Polynome	107

Kapitel 9. Übungsaufgaben	109
Literaturverzeichnis	123

Grundlagen

Hier sind nochmals Grundlagen der Funktionentheorie zusammengestellt, wobei die meisten Aussagen normalerweise auch in einer Funktionentheorie-I-Vorlesung vorkommen.

1. Wiederholung

In diesem Abschnitt ist einiges zusammengestellt, was in der *Funktionentheorie I* behandelt wird.

DEFINITION. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion, so heißt f **komplex differenzierbar** in $z_0 \in U$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert $f'(z_0)$ beschrieben und als Ableitung von f in z_0 bezeichnet.

Beispiele:

(1) Durch

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

werden für alle $z \in \mathbb{C}$ Funktionen definiert, die in allen $z \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar sind mit Ableitung

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z), \quad \sin'(z) = \cos(z).$$

Man schreibt auch $e^z = \exp(z)$.

(2) Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ lässt sich eindeutig schreiben als

$$z = re^{i\varphi} \text{ mit } r = |z| \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Dann heißt

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(r) + i\varphi$$

der **Hauptzweig des Logarithmus**. Für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist Log komplex differenzierbar mit Ableitung

$$\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}.$$

Es gilt $e^{\operatorname{Log}(z)} = z$.

DEFINITION. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (1) f heißt **holomorph** (oder auch **analytisch**) in/auf U , wenn f in allen Punkten von U komplex differenzierbar ist.
- (2) f heißt **holomorph in** $z_0 \in U$, wenn ein $r > 0$ existiert mit $K_r(z_0) \subseteq U$, sodass f in allen Punkten von $K_r(z_0)$ komplex differenzierbar ist. (Dabei ist $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.)

DEFINITION. (1) Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ **lokal konstant**, wenn für jedes $z_0 \in M$ ein $r > 0$ existiert, sodass die Einschränkung $f|_{M \cap K_r(z_0)}$ konstant ist.

- (2) Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, wenn jede lokal konstante Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ konstant ist.
- (3) Eine nichtleere Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt ein **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängend ist.

DEFINITION. (1) Eine **Kurve** (oder ein **Weg**) ist eine stetige Abbildung eines kompakten Intervalls nach $\mathbb{C}$:

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

Dabei heißt $\alpha(a)$ der **Anfangspunkt**, $\alpha(b)$ der **Endpunkt** der Kurve (oder des Wegs).

- (2) Ist $\alpha(a) = \alpha(b)$, so spricht man von einer **geschlossenen Kurve** (oder einem **geschlossenen Weg**).
- (3) Eine Kurve heißt **glatt**, falls sie stetig differenzierbar ist.
- (4) Eine Kurve heißt **stückweise glatt**, wenn es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt, sodass die Einschränkungen $\alpha|_{[a_{j-1}, a_j]}$ für $j = 1, \dots, n$ glatt sind.

Freitag/Busam verwenden die Bezeichnung *Kurve*, Remmert/Schumacher die Bezeichnung *Weg*.

DEFINITION. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve mit $\text{Bild}(\alpha) \subseteq U$, d.h. $\alpha([a, b]) \subseteq U$. Ist α glatt, so wird das **Kurvenintegral** (oder **Wegintegral**) von f längs α durch

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt$$

definiert. Ist α stückweise glatt, d.h. existiert eine Partition $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, sodass $\alpha_k = \alpha|_{[a_{k-1}, a_k]}$ für $k = 1, \dots, n$ glatt ist, so definiert man

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\alpha_k} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{a_{k-1}, a_k} f(\alpha_k(t)) \alpha'_k(t) dt.$$

Bemerkung: Ist $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve, so schreiben wir trotzdem oft $\int_{\alpha} f(z) dz = \int_a^b f(\alpha(t)) \alpha'(t) dt$, obwohl $\alpha'(t)$ in endlich vielen Punkten des Intervalls $[a, b]$ nicht definiert sein muss.

DEFINITION. Die **Länge** einer stückweise glatten Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ wird definiert als

$$\ell(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Für das Kurvenintegral gibt es eine Reihe von Rechenregeln, die wir nicht alle zusammenstellen. Wir erinnern aber an ein paar wichtige Aussagen:

SATZ. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganz in U verlaufende, stückweise glatte Kurve.

- (1) **Standardabschätzung:** Gilt $|f(\alpha(t))| \leq M$ für alle $t \in [a, b]$ (mit $M \in \mathbb{R}_{\geq 0}$), so gilt

$$\left| \int_{\alpha} f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell(\alpha).$$

- (2) Ist $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine **Stammfunktion** von f , d.h. F ist holomorph mit $F' = f$, so gilt

$$\int_{\alpha} f(z) dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)).$$

Der folgende Satz charakterisiert die Existenz einer Stammfunktion mit Hilfe von Kurvenintegralen.

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind äquivalent:

- (1) f besitzt eine Stammfunktion, d.h. es gibt eine holomorphe Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' = f$.

- (2) Für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve α , die ganz in G verläuft, gilt

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

- (3) Sind $z_1, z_2 \in G$ und α, β zwei ganz in G verlaufende, stückweise glatte Kurven mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2 , so gilt

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \int_{\beta} f(z) dz.$$

Den (im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen) Rand eines Kreises $K_r(z_0)$ schreiben wir manchmal auch einfach $|z - z_0| = r$. (Eine Parametrisierung ist beispielsweise $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = z_0 + re^{2\pi i t}$.)

SATZ (Cauchy-Integralformel). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ist $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\} \subseteq U$, so gilt für alle $a \in K_r(z_0)$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Die abgeschlossene Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ schreiben wir auch manchmal $\overline{K}_r(z_0)$.

SATZ (Verallgemeinerte Cauchy-Integralformel). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

- (1) f ist beliebig oft (komplex) differenzierbar.
- (2) Ist $z_0 \in U$ und $r > 0$ mit $\overline{K}_r(z_0) \subseteq U$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ für alle } a \in K_r(z_0).$$

DEFINITION. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ definierte und holomorphe Funktion wird eine **ganze Funktion** genannt.

SATZ (Liouville). Jede beschränkte ganze Funktion ist konstant.

SATZ (Potenzreihenentwicklungssatz). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in U$ und $R > 0$ mit $K_R(z_0) \subseteq U$ und

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt:

- (1) Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$ ist mindestens R .
- (2) Es ist

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in K_R(z_0),$$

was man auch in der Form

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in K_R(z_0)$$

schreiben kann. (Dann spricht man auch von **Taylorreihe** und der **Taylorreihenentwicklung**.)

- (3) Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < R$, so ist $\overline{K}_r(z_0) \subseteq U$ und es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz.$$

Bemerkung: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, nicht identisch 0 und $z_0 \in G$, schreibt man die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 als

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

so definiert man die **Nullstellenordnung** von f in z_0 als

$$\text{ord}_{z_0}(f) = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : a_n \neq 0\} = \min\{n \in \mathbb{N}_0 : f^{(n)}(z_0) \neq 0\}.$$

Man kann dann schreiben

$$f(z) = (z - z_0)^{\text{ord}_{z_0}(f)} \cdot g(z),$$

wobei $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist mit $g(z_0) \neq 0$. (Für die Nullfunktion definiert man manchmal $\text{ord}_{z_0}(0) = \infty$.)

SATZ (Identitätssatz für holomorphe Funktionen). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $f = g$.
- (2) Die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G .
- (3) Es gibt einen Punkt $z_0 \in G$ mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

SATZ (Offenheitssatz - Satz von der Gebietstreue). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nichtkonstant holomorph. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq G$ ist dann auch $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen. Ist $U \subseteq G$ ein Gebiet, so auch $f(U)$.

Aus dem letzten Satz folgt beispielsweise das **Maximumprinzip**: Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $a \in G$ mit $|f(z)| \leq |f(a)|$ für alle $z \in G$, so ist f konstant.

SATZ (Laurentzerlegung). Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R \in (0, \infty]$ und $f : K_R(z_0) \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:

- (1) Es gibt eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ mit Konvergenzradius ∞ , sodass

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ holomorph ist und $f(z) - h(z)$ eine hebbare Singularität in $z = z_0$ hat. (Man nennt $h(z)$ den **Hauptteil** von $f(z)$. Er ist eindeutig bestimmt.)

- (2) Entwickelt man $f(z) - h(z)$ in eine Potenzreihe um z_0 , also

$$f(z) - h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

so ist der Konvergenzradius $\geq R$. (Man nennt dies auch den **Nebenteil** von $f(z)$.)

- (3) Es gilt

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ für alle } z \in K_R(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Setzt man $a_{-n} = b_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so kann man auch schreiben

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Man nennt dies die **Laurentreihenentwicklung** von $f(z)$ um z_0 .

Bemerkung: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \setminus \{z_0\}$ holomorph. (Man nennt dann z_0 eine **isolierte Singularität** von f .) Sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von $f(z)$ in z_0 . An der Laurentreihenentwicklung kann man auch den Singularitätentyp der isolierten Singularität z_0 ablesen:

- (1) f hat genau dann eine **hebbare Singularität** in z_0 , wenn $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\} = \emptyset$ gilt, d.h. der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung verschwindet.
- (2) f hat genau dann einen **Pol** in z_0 , wenn $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$ endlich, aber nichtleer ist, d.h. der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung hat nur endliche viele Summanden, ist aber von 0 verschieden. Ist $m = \max\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$, so hat f in z_0 einen Pol m -ter Ordnung. Es gibt eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \cdot g(z).$$

(Man definiert auch $\text{ord}_{z_0}(f) = -m$.)

- (3) f hat genau dann eine **wesentliche Singularität** in z_0 , wenn $\{n \in \mathbb{N} : a_{-n} \neq 0\}$ unendlich ist, d.h. unendlich viele a_{-n} sind von 0 verschieden.

DEFINITION. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Man sagt, f ist eine **meromorphe Funktion auf G** , wenn eine in G diskrete Teilmenge $S_f \subseteq G$ existiert, sodass $f : G \setminus S_f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und f in den Punkten von S_f nur hebbare Singularitäten oder Pole hat. Die Menge der auf G meromorphen Funktionen wird auch mit $\mathcal{M}(G)$ bezeichnet.

SATZ. Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1) Jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ besitzt eine Stammfunktion.
- (2) Für jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und jede geschlossene, stückweise glatte, ganz in G verlaufende Kurve α gilt

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 0.$$

- (3) Jede geschlossene, ganz in G verlaufende Kurve $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich in G auf einen Punkt z_0 zusammenziehen, d.h. es gibt eine stetige Funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$H(t, u) \in G \text{ für alle } t, u \in [0, 1]$$

und

$$H(t, 0) = \alpha(t) \text{ für alle } t \in [0, 1] \quad \text{und} \quad H(t, 1) = z_0 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Man nennt dann G **einfach zusammenhängend**.

Bemerkungen:

- (1) Sterngebiete sind einfach zusammenhängend. (Ein **Sterngebiet** ist eine offene Teilmenge $G \subseteq \mathbb{C}$, für die ein Punkt $z_* \in G$ (Sternmittelpunkt) existiert, sodass für alle $z \in G$ die Verbindungsstrecke $[z_*, z]$ ganz in G liegt.)
- (2) Sind G_1 und G_2 einfach zusammenhängende Gebiete in $\mathbb{C}$ und ist der Durchschnitt $G_1 \cap G_2$ nichtleer und zusammenhängend, so ist auch $G_1 \cup G_2$ einfach zusammenhängend.

2. Die Umlaufzahl

DEFINITION. Sei α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha)$. Dann heißt

$$\chi(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0}$$

die **Umlaufzahl** (oder die **Windungszahl** oder der **Index**) von α bezüglich z_0 . (Bei Remmert/Schumacher findet sich die Notation $\text{ind}_{\alpha}(z_0)$.)

Beispiel: Die Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$ durchläuft den Kreis um z_0 mit Radius r genau einmal. Es ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i dt = \frac{1}{2\pi i} \cdot i \cdot 2\pi = 1,$$

wie es sein sollte.

Die folgenden Lemmas zeigen einige Eigenschaften der Umlaufzahl und skizzieren Beweise.

LEMMA. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, dann gilt

$$\chi(\alpha, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha).$$

Beweis: Es gibt eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$, sodass α in (a_{i-1}, a_i) stetig differenzierbar ist; in a_i ist α eventuell nur links- und rechtsseitig differenzierbar. Die Funktion $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \int_a^t \frac{\alpha'(u)}{\alpha(u) - z_0} du$$

ist im Intervall $[a, b]$ stetig und für $t \neq a_1, \dots, a_{n-1}$ differenzierbar mit Ableitung $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0}$. Es ist - sofern definiert -

$$\left(e^{-F(t)} (\alpha(t) - z_0) \right)' = -\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0} \cdot e^{-F(t)} \cdot (\alpha(t) - z_0) + e^{-F(t)} \cdot \alpha'(t) = 0.$$

Daher gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit

$$e^{-F(t)} (\alpha(t) - z_0) = c \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Aus $\alpha(a) = \alpha(b)$ folgt $e^{-F(a)} = e^{-F(b)}$, also wegen $F(a) = 0$ dann $e^{F(b)} = 1$. Daher gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $F(b) = 2\pi i \cdot k$. Es folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \cdot F(b) = k \in \mathbb{Z},$$

und damit die Behauptung. ■

LEMMA. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte Kurve. Dann ist

$$\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z_0 \mapsto \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0} dt$$

stetig.

Beweis: Wir wollen zeigen, dass die Funktion stetig in $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha)$ ist. Sei $\delta = \inf\{|\alpha(t) - z_0| : t \in [a, b]\}$. Dann ist $\delta > 0$. Ist nun $|z - z_0| \leq \frac{\delta}{2}$, so folgt

$$|\alpha(t) - z| = |(\alpha(t) - z_0) + (z_0 - z)| \geq |\alpha(t) - z_0| - |z - z_0| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \left| \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z} dt - \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z_0} dt \right| &= \left| \int_a^b \frac{\alpha'(t)(z_0 - z)}{(\alpha(t) - z)(\alpha(t) - z_0)} dt \right| \leq \\
 &\leq \int_a^b \frac{|\alpha'(t)| |z - z_0|}{|\alpha(t) - z| |\alpha(t) - z_0|} dt \leq \int_a^b \frac{|\alpha'(t)| |z - z_0|}{\frac{\delta}{2} \cdot \delta} dt = \\
 &= \frac{2}{\delta^2} \int_a^b |\alpha'(t)| dt \cdot |z - z_0| = \frac{2\ell(\alpha)}{\delta^2} \cdot |z - z_0|.
 \end{aligned}$$

Dies impliziert die behauptete Stetigkeit. ■

FOLGERUNG. Sei α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganz in $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha)$ verlaufende Kurve, so ist die Umlaufzahl konstant auf γ , d.h.

$$\chi(\alpha, \gamma(a)) = \chi(\alpha, \gamma(t)) \text{ für alle } t \in [a, b].$$

Beweis: Da $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $\chi(\alpha, z)$ stetig ist, ist auch

$$[a, b] \rightarrow \mathbb{Z}, \quad t \mapsto \chi(\alpha, \gamma(t))$$

stetig, also konstant. ■

LEMMA. Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Sei $U \subseteq \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha)$ zusammenhängend. Dann ist $z \mapsto \chi(\alpha, z)$ konstant auf U . Ist U (zusammenhängend und) unbeschränkt, so ist $\chi(\alpha, z) = 0$.

Beweis: Da $z \mapsto \chi(\alpha, z)$ stetig ist und nur ganzzahlige Werte annimmt, ist die Funktion lokal konstant. Aus der Definition von zusammenhängend folgt dann, dass die Funktion auf U konstant ist. Ist $|\alpha(t) - z| \geq R$ für alle $t \in [a, b]$, so folgt

$$|\chi(\alpha, z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t) - z} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{|\alpha'(t)|}{|\alpha(t) - z|} dt \leq \frac{1}{2\pi R} \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \frac{\ell(\alpha)}{2\pi R}.$$

Ist $R > \frac{\ell(\alpha)}{2\pi}$, so folgt $|\chi(\alpha, z)| < 1$, also $\chi(\alpha, z) = 0$. Enthält U einen Punkt z mit $|\alpha(t) - z| > \frac{\ell(\alpha)}{2\pi}$, so ist $\chi(\alpha, z) = 0$. Es folgt die Behauptung. ■

Wie berechnet man die Umlaufzahl? Wir zeigen nun eine Möglichkeit, wie man die Umlaufzahl unter bestimmten Voraussetzungen berechnen kann. Sei also $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve und $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\alpha)$. Wir wählen einen von z_0 ausgehenden Strahl $S = \{z_0 + tv : t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ (mit $v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) und machen folgende Annahmen:

- Die Kurve schneidet den Strahl in nur endlichen vielen Punkten.
- In jedem Schnittpunkt „kreuzt“ die Kurve den Strahl, entweder von rechts nach links oder von links nach rechts (von z_0 aus betrachtet).

Kreuzt die Kurve den Strahl m -mal von rechts und links und n -mal von links nach rechts, so gilt

$$\chi(\alpha, z_0) = m - n.$$

Beweis: Nach einer eventuellen Translation und Drehung können wir

$$z_0 = 0 \quad \text{und} \quad S = \mathbb{R}_{\leq 0}$$

annehmen.

- Wir wollen

$$\int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt$$

berechnen. Wir wählen eine Partition $a = a_0 < a_1 < \dots < a_d = b$, wobei die Eigenschaften noch festgelegt werden. Es gilt dann

$$\int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt.$$

- Da α stückweise stetig differenzierbar sein soll, können wir annehmen, dass die Unstetigkeitsstellen von $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ in der Menge $\{a_1, \dots, a_{d-1}\}$ liegen, also ist $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ stetig im offenen Intervall (a_{i-1}, a_i) .
- Wir nehmen an, dass nur endlich viele Punkte von α auf dem Strahl $\mathbb{R}_{\leq 0}$ liegen. Durch entsprechende Wahl der Partition können wir annehmen, dass für alle $t \in (a_{i-1}, a_i)$ die Zahl $\alpha(t)$ nicht in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ ist.
- Unter den bisherigen Voraussetzungen besitzt $\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ im offenen Intervall (a_{i-1}, a_i) die Stammfunktion $\text{Log}(\alpha(t))$, wo Log den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt &= \sum_{i=1}^d \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = \sum_{i=1}^d \left(\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_{i-1}} \text{Log} \alpha(t) \right) = \\ &= \sum_{i=1}^d \lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \sum_{i=0}^{d-1} \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) = \\ &= \lim_{t \uparrow b} \text{Log} \alpha(t) + \sum_{i=1}^{d-1} \left(\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) \right) - \lim_{t \downarrow a} \text{Log} \alpha(t). \end{aligned}$$

Liegt $\alpha(a) = \alpha(b)$ nicht auf der negativen x -Achse, so ist Log in $\alpha(a) = \alpha(b)$ stetig, also

$$\text{Log} \alpha(a) = \lim_{t \downarrow} \text{Log} \alpha(t) \quad \text{und} \quad \text{Log} \alpha(b) = \lim_{t \uparrow b} \text{Log} \alpha(t),$$

und wir erhalten

$$\int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = \sum_{i=1}^d \left(\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) \right).$$

- Liegt $\alpha(a_i)$ nicht auf der negativen x -Achse, so ist Log dort stetig und es gilt

$$\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) = 0.$$

- Liegt $\alpha(a_i)$ auf der negativen x -Achse, so nehmen wir an, dass die Kurve die negative x -Achse in diesem Punkt „kreuzt“.
- Da 0 nicht auf der Kurve liegt, können wir für alle $t \in [a, b]$ schreiben

$$\alpha(t) = |\alpha(t)| \cdot e^{i\varphi(t)} \quad \text{mit} \quad -\pi < \varphi(t) \leq \pi.$$

Es ist

$$\text{Log} \alpha(t) = \ln(|\alpha(t)|) + i\varphi(t).$$

Liegt $\alpha(a_i)$ auf der negativen x -Achse, so gilt $\varphi(a_i) = \pi$. Kreuzt die Kurve die negative x -Achse **von rechts nach links** (von oben nach unten), so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(t) \in \begin{cases} (\pi - \varepsilon, \pi) & \text{für alle } t \in (a_i - \delta, a_i), \\ (-\pi, -\pi + \varepsilon) & \text{für alle } t \in (a_i, a_i + \delta). \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) = \ln(|\alpha(a_i)|) + i\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) = \ln(|\alpha(a_i)|) - i\pi.$$

Es folgt

$$\lim_{t \uparrow a_i} \text{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_i} \text{Log} \alpha(t) = 2\pi i.$$

Kreuzt die Kurve die negative x -Achse **von links nach rechts** (von unten nach oben), so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(t) \in \begin{cases} (-\pi, -\pi + \varepsilon) & \text{für alle } t \in (a_i - \delta, a_i), \\ (\pi - \varepsilon, \pi) & \text{für alle } t \in (a_i, a_i + \delta). \end{cases}$$

Dann ist

$$\lim_{t \uparrow a_i} \operatorname{Log} \alpha(t) = \ln(|\alpha(a_i)|) - i\pi \quad \text{und} \quad \lim_{t \downarrow a_i} \operatorname{Log} \alpha(t) = \ln(|\alpha(a_i)|) + i\pi,$$

und damit

$$\lim_{t \uparrow a_i} \operatorname{Log} \alpha(t) - \lim_{t \downarrow a_i} \operatorname{Log} \alpha(t) = -2\pi i.$$

- Nach Definition von m und n folgt dann

$$\int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} dt = m \cdot 2\pi i + n \cdot (-2\pi i),$$

und damit

$$\chi(\alpha, 0) = m - n,$$

wie behauptet. ■

DEFINITION. Für eine stückweise glatte, geschlossene Kurve α definiert man das **Innere** und das **Äußere** von α durch

$$\operatorname{Int}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\alpha) : \chi(\alpha, z) \neq 0\} \quad \text{und} \quad \operatorname{Ext}(\alpha) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Bild}(\alpha) : \chi(\alpha, z) = 0\}.$$

LEMMA. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und α eine stückweise glatte, geschlossene, ganz in G verlaufende Kurve, so liegt das Innere von α ganz in G :

$$\operatorname{Int}(\alpha) \subseteq G.$$

Beweis: Ist $z_0 \in \mathbb{C} \setminus G$, so ist $z \mapsto \frac{1}{z - z_0}$ eine in ganz G holomorphe Funktion. Da G einfach zusammenhängend ist, gilt

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = 0,$$

also

$$\chi(\alpha, z_0) = 0, \quad \text{und damit} \quad z_0 \in \operatorname{Ext}(\alpha).$$

Also erhalten wir $\mathbb{C} \setminus G \subseteq \operatorname{Ext}(\alpha)$. Da Inneres und Äußeres von α disjunkt sind, folgt sofort $\operatorname{Int}(\alpha) \subseteq G$, wie behauptet. ■

3. Der Residuensatz und Residuen

DEFINITION. Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $U \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Umgebung von z_0 und $f : U \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. (z_0 ist also eine isolierte Singularität von f .) Sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

die Laurentreihenentwicklung von f in z_0 . Dann heißt der Koeffizient bei $\frac{1}{z - z_0}$ das **Residuum** von f im Punkt z_0 , also

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

(Bei Remmert/Schumacher findet sich die Bezeichnung $\operatorname{res}_{z_0} f$.)

Motiviert wird der Begriff durch den folgenden Satz:

SATZ (Residuensatz). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, seien $z_1, \dots, z_r \in G$ paarweise verschiedene Punkte, sei $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_r\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $G \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$. Dann gilt:

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^r \chi(\alpha, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Beweis:

(1) Sei

$$h_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - z_j)^n}$$

der Hauptteil der Laurentreihenentwicklung von $f(z)$ in z_j . (Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,-n} z^n$ konvergiert auf ganz $\mathbb{C}$, $h_j(z)$ ist auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$ holomorph.) Dann hat $f(z) - h_j(z)$ in z_j eine hebbare Singularität.

(2) Definieren wir

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^r h_j(z),$$

so ist $g(z)$ holomorph in $G \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ mit hebbaren Singularitäten in $z_1, \dots, z_r$, kann also als holomorphe Funktion auf G betrachtet werden.

(3) Da G einfach zusammenhängend ist, liefert der Cauchy-Integralsatz (oder die Definition)

$$\int_{\alpha} g(z) dz = 0,$$

und damit sofort

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \sum_{j=1}^r \int_{\alpha} h_j(z) dz.$$

(4) Nun gilt auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$

$$\begin{aligned} h_j(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{(z - z_j)^n} = \frac{a_{j,-1}}{z - z_j} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{j,-n} (z - z_0)^{-n} = \\ &= \frac{a_{j,-1}}{z - z_j} + \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{j,-n}}{-n+1} (z - z_0)^{-n+1} \right). \end{aligned}$$

Integriert man nun längs der geschlossenen Kurve α , so wird der zweite Summand 0 und es folgt (mit der Definition der Umlaufzahl und des Residuums)

$$\int_{\alpha} h_j(z) dz = \int_{\alpha} \frac{a_{j,-1}}{z - z_j} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_j} dz \cdot a_{j,-1} = 2\pi i \cdot \chi(\alpha, z_j) \cdot \operatorname{Res}(h_j, z_j).$$

Die in (3) gezeigte Gleichung liefert

$$\int_{\alpha} f(z) dz = \sum_{j=1}^r \int_{\alpha} h_j(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^r \chi(\alpha, z_j) \cdot \operatorname{Res}(f, z_j),$$

wie behauptet. ■

In der Praxis hat man meist einfache Kurven, bei denen man die Umlaufzahl sofort sieht. Wir geben daher noch eine zweite Variante des Residuensatzes an:

SATZ (Residuensatz, 2. Variante). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, seien $z_1, \dots, z_r \in D$ paarweise verschiedene Punkte und sei $f : G \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ holomorph. Ist nun α eine stückweise glatte,

geschlossene Kurve in G , sodass für jedes $j \in \{1, \dots, r\}$ der Punkt z_j entweder im Äußeren von α liegt, oder im Inneren von α liegt und genau einmal von α umlaufen wird, so gilt:

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ z_j \in \text{Int}(\alpha)}} \text{Res}(f, z_j).$$

Beweis: Die Punkte aus G können auf α , im Äußeren oder im Inneren von α liegen, d.h.

$$D = \text{Ext}(\alpha) \cup \text{Bild}(\alpha) \cup \text{Int}(\alpha).$$

Nach Voraussetzung gilt aber $z_j \in \text{Ext}(\alpha) \cup \text{Int}(\alpha)$, sodass wir nur zwei Fälle unterscheiden müssen:

- Ist $z_j \in \text{Ext}(\alpha)$, so ist $\chi(\alpha, z_j) = 0$, also $\chi(\alpha, z_j) \text{Res}(f, z_j) = 0$.
- Ist $z_j \in \text{Int}(\alpha)$, so heißt dies zunächst $\chi(\alpha, z_j) \neq 0$. Da wir gefordert haben, dass die inneren Punkte von α aber genau einmal umlaufen werden, bedeutet dies $\chi(\alpha, z_j) = 1$, sodass $\chi(\alpha, z_j) \text{Res}(f, z_j) = \text{Res}(f, z_j)$ gilt.

Der Residuensatz liefert daher

$$\int_{\alpha} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^r \chi(\alpha, z_j) \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{1 \leq j \leq r \\ z_j \in \text{Int}(\alpha)}} \text{Res}(f, z_j),$$

wie behauptet. ■

Beispiel: Was ist

$$\int_{|z-(1+i)|=2} \frac{dz}{z^2-1}?$$

Die Funktion $\frac{1}{z^2-1}$ hat Polstellen in 1 und -1 . Die Kurve $|z-(1+i)|=2$ berandet den Kreis um $1+i$ mit Radius 2. Der Punkt 1 liegt im Innern, der Punkt -1 im Äußern. Wir brauchen daher nur das Residuum von f in 1. Es ist

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \left(\frac{1}{2} + \dots\right),$$

woraus dann

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2-1}, 1\right) = \frac{1}{2}$$

folgt. Der Residuensatz liefert nun

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$$

Bemerkung: Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $z_0 \in G$ und α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $G \setminus \{z_0\}$. Wir betrachten die Funktion $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$, die in $G \setminus \{z_0\}$ holomorph ist. Das Residuum in z_0 ist $f(z_0)$. Daher folgt mit dem Residuensatz

$$\int_{\alpha} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i \cdot \chi(\alpha, z_0) \cdot \text{Res}(g, z_0) = 2\pi i \cdot \chi(\alpha, z_0) \cdot f(z_0),$$

also

$$\chi(\alpha, z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z-z_0} dz.$$

Dies verallgemeinert die Cauchy-Integralformel für Kreisscheiben.

Wie berechnet man Residuen? Natürlich kann man sich die Laurentreihenentwicklung anschauen. Es gibt aber manchmal auch andere Möglichkeiten. Der folgende Satz stellt einige Hilfen bereit:

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$ und $f, g : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit einer hebbaren Singularität oder einem Pol in z_0 .

- (1) Ist $\text{ord}_{z_0}(f) \geq 0$, so ist $\text{Res}(f, z_0) = 0$.

(2) Ist $\text{ord}_{z_0}(f) = -1$, so gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

(3) Ist $\text{ord}_{z_0}(f) = -k$ mit $k \in \mathbb{N}$, so hat $\tilde{f}(z) = (z - z_0)^k \cdot f(z)$ in z_0 eine hebbare Singularität, kann also als in G holomorphe Funktion betrachtet werden. Dann gilt

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{\tilde{f}^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

(4) Ist $\text{ord}_{z_0}(f) \geq 0$ und $\text{ord}_{z_0}(g) = 1$, so gilt

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(5) Ist f nicht identisch 0 auf G , so gilt

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = \text{ord}_{z_0}(f).$$

(6) Ist f nicht identisch 0 auf G und $\text{ord}_{z_0}(g) \geq 0$, so gilt

$$\text{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, z_0\right) = g(z_0) \cdot \text{ord}_{z_0}(f).$$

Beweis:

(1) Hier ist

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n,$$

woraus sofort $\text{Res}(f, z_0) = 0$ folgt.

(2) Es ist

$$f(z) = \sum_{n \geq -1} a_n (z - z_0)^n,$$

und damit

$$(z - z_0)f(z) = \sum_{n \geq -1} a_n (z - z_0)^{n+1} = \sum_{n \geq 0} a_{n-1} (z - z_0)^n.$$

$(z - z_0)f(z)$ hat in z_0 eine hebbare Singularität mit Wert a_{-1} , sodass folgt

$$\text{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

(3) Es ist

$$f(z) = \sum_{n \geq -k} a_n (z - z_0)^n = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \sum_{n \geq 0} a_{n-k} (z - z_0)^n,$$

also

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n-k} (z - z_0)^n.$$

Es folgt

$$\frac{\tilde{f}^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} = a_{k-1-k} = a_{-1} = \text{Res}(f, z_0),$$

wie behauptet.

(4) Ist $\text{ord}_{z_0}(f) \geq 1$, so ist $f(z_0) = 0$ und $\text{ord}_{z_0}(\frac{f}{g}) \geq 0$, die Behauptung folgt dann aus (1). Ist $\text{ord}_{z_0}(f) = 0$, so ist $\text{ord}_{z_0}(\frac{f}{g}) = -1$ und mit (2) folgt wegen $g(z_0) = 0$

$$\text{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)},$$

wie behauptet.

- (5) Wir schreiben $f(z) = (z - z_0)^k \cdot \tilde{f}(z)$ mit $\text{ord}_{z_0}(\tilde{f}) = 0$ und $k = \text{ord}_{z_0}(f)$. Dann gilt

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} \cdot \tilde{f}(z) + (z - z_0)^k \cdot \tilde{f}'(z),$$

also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)},$$

woraus wegen $\tilde{f}(z_0) \neq 0$ und $\tilde{f}'(z_0) \in \mathbb{C}$ sofort

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k = \text{ord}_{z_0}(f)$$

folgt.

- (6) Wir verwenden die Darstellung aus dem Beweis von (5), also

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}.$$

Da $\frac{f'}{f}$ höchstens einen Pol 1. Ordnung hat, folgt mit (1) oder (2)

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(g \cdot \frac{f'}{f}, z_0\right) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(g(z) k + g(z) \frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)} (z - z_0) \right) = \\ &= g(z_0) k = g(z_0) \cdot \text{ord}_{z_0}(f), \end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Einen wichtigen Fall erwähnen wir noch gesondert:

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f auf G meromorph. Dann ist auch $\frac{f'}{f}$ meromorph auf G . Genau in den Null- und Polstellen z_0 von f hat $\frac{f'}{f}$ einen Pol, und zwar von 1. Ordnung mit Residuum $\text{ord}_{z_0}(f)$.

4. Null- und Polstellen zählen — Der Satz von Rouché

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f eine meromorphe Funktion auf G . Seien $z_1, \dots, z_r \in G$ paarweise verschiedene Punkte, sodass die Nullstellen und Polstellen von f im $\{z_1, \dots, z_r\}$ liegen. $\frac{f'}{f}$ hat dann höchstens in $z_1, \dots, z_r$ Polstellen, ist also holomorph in $G \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$. Es gilt

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = \text{ord}(f, z_j).$$

Ist α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in $G \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$, so liefert der Residuensatz

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^r \chi(\alpha, z_j) \text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) = \sum_{j=1}^r \chi(\alpha, z_j) \text{ord}(f, z_j).$$

Man spricht hier auch vom **Null- und Polstellen zählenden Integral**.

Ist α eine Kurve, die jeden inneren Punkt von α genau einmal umläuft, so erhält man folgenden Satz:

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f eine in G meromorphe Funktion, die nicht identisch 0 ist. Sei α eine stückweise glatte, geschlossene Kurve in G , die jeden inneren Punkt von α genau einmal umläuft, und auf der weder eine Nullstelle noch eine Polstelle von f liegt. Sind dann $z_1, \dots, z_r$ die im Innern von α gelegenen Null- und Polstellen von f , so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^r \text{ord}(f, z_j).$$

Alternative Formulierung: Ist N bzw. P die mit Vielfachheit gezählte Anzahl der Nullstellen bzw. Polstellen von f im Innern von α , so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P.$$

Bemerkung: Für den Beweis müsste man eigentlich noch überlegen, dass man G so einschränken kann, dass f nur endlich viele Null- und Polstellen in G hat.

Die folgenden Überlegungen verwenden das Nullstellen zählende Integral und stellen eine Verbindung zu Umlaufzahlen her.

Überlegungen: (Bilder von Kreisen und Umlaufzahlen) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(a)} \subseteq G$. Uns interessiert das Bild $f(K_r(a))$. Dafür fragen wir, ob für ein gegebenes $p \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$p \in f(K_r(a))$$

gilt. Genauer können wir fragen, wie oft p von Punkten aus $K_r(a)$ als Wert angenommen wird. Dafür schauen wir uns die Funktion

$$f_p : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f_p(z) = f(z) - p$$

an. Es ist $p \in f(K_r(a))$ genau dann, wenn $f_p(z)$ eine Nullstelle in $K_r(a)$ hat.

Der Kreis $K_r(a)$ wird berandet von der Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \alpha(t) = a + re^{it},$$

die ganz in G liegt. Es ist

$$\text{Int}(\alpha) = K_r(a).$$

Die Frage ist nun, wieviele Nullstellen f_p im Innern von α hat. Dies ist genau die Anzahl der $z \in K_r(a)$ mit $f_p(z) = p$. Liegt p nicht auf der Kurve α , d.h. $p \notin \text{Bild}(\alpha)$, dann hat f_p keine Nullstelle auf der Kurve und wir können das Nullstellen-zählende Integral verwenden: Die (mit Vielfachheit gezählte) Anzahl der Punkte aus $K_r(a)$, die den Wert p annehmen, ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'_p(z)}{f_p(z)} dz.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \chi(f \circ \alpha, p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \alpha} \frac{dz}{z - p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{(f \circ \alpha)'(t) dt}{(f \circ \alpha)(t) - p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{t=0}^{2\pi} \frac{f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt}{f(\alpha(t)) - p} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z) - p} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'_p(z)}{f_p(z)} dz. \end{aligned}$$

Wir erhalten also die gesuchte Anzahl als Umlaufzahl der Kurve $f \circ \alpha$ um p . Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen:

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $a \in G$ und $r > 0$ mit $\overline{K_r(a)} \subseteq G$. Die Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \alpha(t) = a + re^{it}$$

berandet dann den Kreis $K_r(a)$. Sei $p \in \mathbb{C}$ gegeben mit $p \notin f(\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\})$. Dann ist die (mit Vielfachheit gezählte) Anzahl der $z \in K_r(a)$ mit $f(z) = p$ genau die Umlaufzahl $\chi(f \circ \alpha, p)$.

Beispiel: Wir betrachten $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = 6z^6 - 2z^2 + z + 1$. Wir interessieren uns für $f(K_1(0))$, genauer, wie oft ein $p \in \mathbb{C}$ von Punkten aus $K_1(0)$ angenommen wird. Wir wollen also sehen, welche der Nullstellen von

$$f_p(z) = f(z) - p = 6z^6 - 2z^2 + z + (1 - p)$$

im Kreis $K_1(0)$ liegen. Der Einheitskreis wird berandet von der Kurve

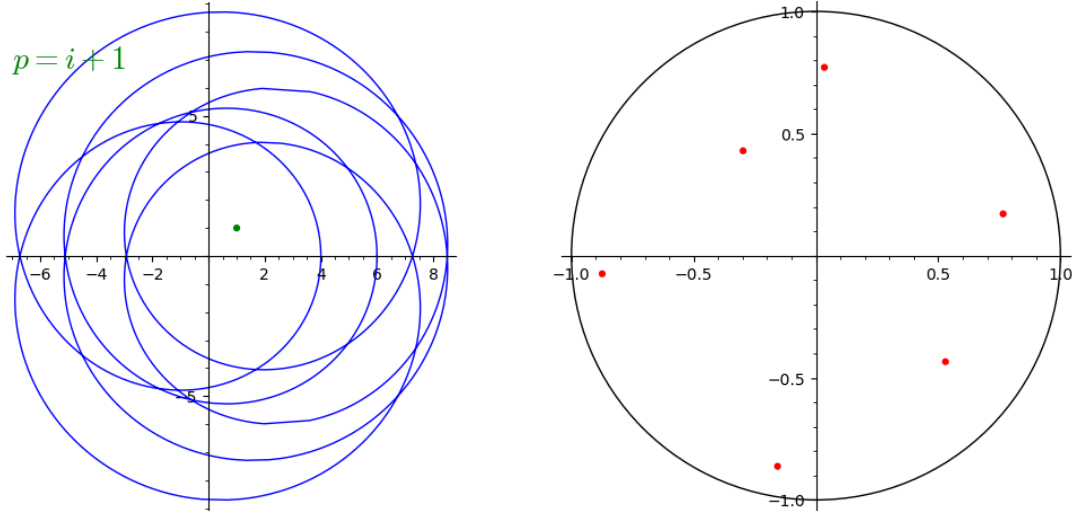
$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \alpha(t) = e^{it}.$$

Dann ist

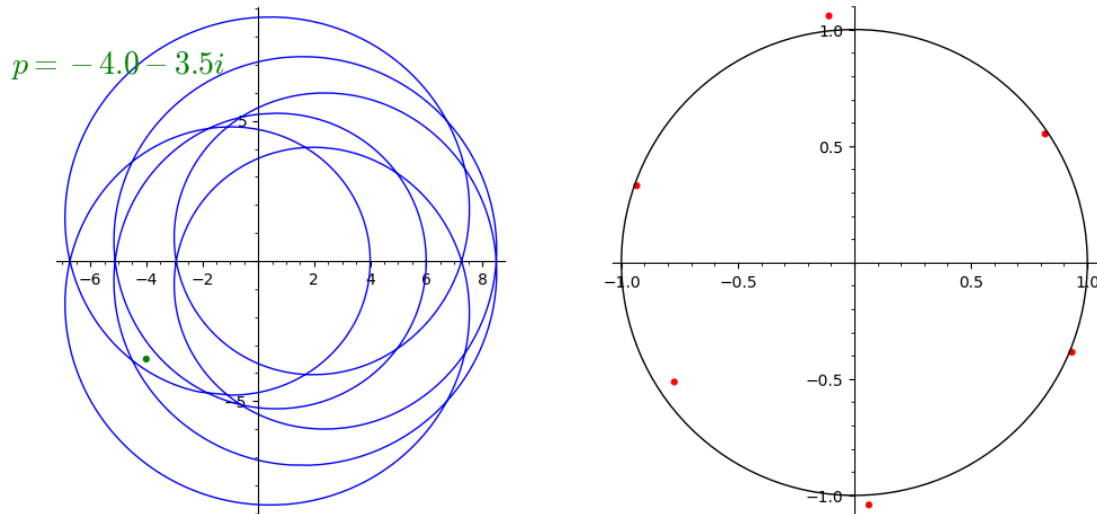
$$\begin{aligned} (f \circ \alpha)(t) &= f(e^{it}) = 6e^{6it} - 2e^{2it} + e^{it} + 1 = \\ &= 6(\cos(6t) + i\sin(6t)) - 2(\cos(2t) + i\sin(2t)) + (\cos(t) + i\sin(t)) + 1 = \\ &= (6\cos(6t) - 2\cos(2t) + \cos(t) + 1) + i(6\sin(6t) - 2\sin(2t) + \sin(t)) \end{aligned}$$

In den folgenden Bildern ist links die Kurve $f \circ \alpha$ und der betrachtete Punkt p . Rechts sind die Punkte aus $f^{-1}(p)$, also die Nullstellen des Polynoms $f_p(z) = f(z) - p$. Die Umlaufzahl $\chi(f \circ \alpha, p)$ sollte mit der Anzahl der im Einheitskreis liegenden roten Punkte übereinstimmen.

Im Fall $p = 1 + i$ ist die Umlaufzahl $\chi(f \circ \alpha, p) = 6$, im Einheitskreis liegen tatsächlich 6 Punkte von $f^{-1}(p)$: $-0.87 - 0.074i$, $-0.30 + 0.43i$, $-0.16 - 0.86i$, $0.034 + 0.77i$, $0.53 - 0.43i$, $0.77 + 0.17i$.



Für $p = -4 - 3.5i$ ist die Umlaufzahl $\chi(f \circ \alpha, p) = 3$, im Einheitskreis liegen 3 Punkte von $f^{-1}(p)$: $-0.93 + 0.33i$, $-0.77 - 0.51i$, $0.82 + 0.55i$.



Das folgende Beispiel soll zeigen, dass Phänomene auftreten können, die man im Bild nicht sieht.

Beispiel: Sei $f(z) = 6z^6 - 2z^2 + 1$. Wir fragen, wie oft ein $p \in \mathbb{C}$ von Punkten aus $K_1(0)$ angenommen wird. Wir wollen also sehen, welche der Nullstellen von

$$f_p(z) = f(z) - p = 6z^6 - 2z^2 + (1 - p)$$

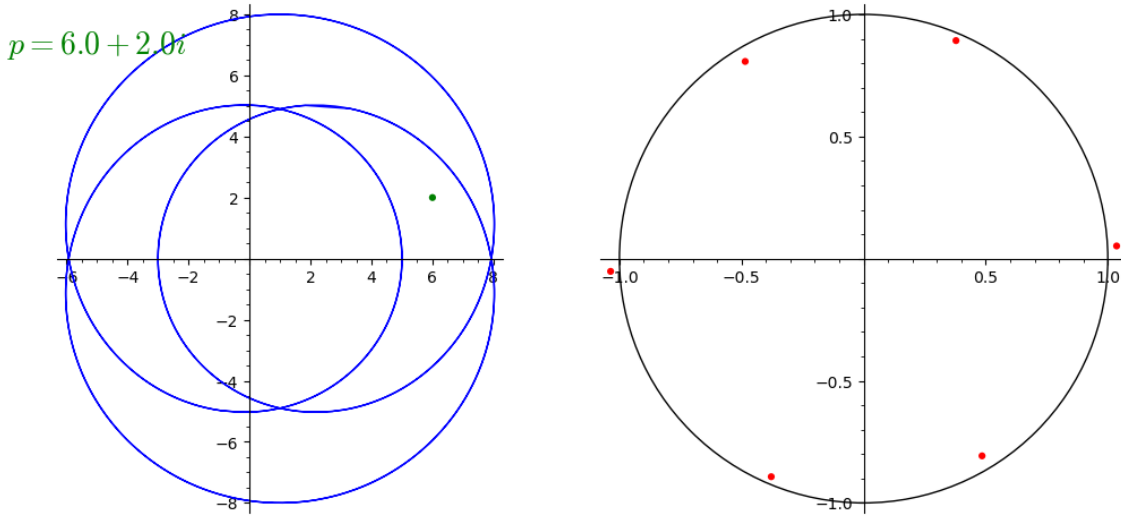
im Kreis $K_1(0)$ liegen. Der Einheitskreis wird berandet von der Kurve

$$\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \alpha(t) = e^{it}.$$

Es ist

$$\begin{aligned}(f \circ \alpha)(t) &= f(e^{it}) = 6e^{6it} - 2e^{2it} + 1 = 6(\cos(6t) + i\sin(6t)) - 2(\cos(2t) + i\sin(2t)) + 1 = \\ &= (6\cos(6t) - 2\cos(2t) + 1) + i(6\sin(6t) - 2\sin(2t))\end{aligned}$$

Wir betrachten $p = 6 + 2i$. Der Wert wird von 4 Punkten aus $K_1(0)$ angenommen, nämlich: $-0.48 + 0.81i, -0.38 - 0.89i, 0.38 + 0.89i, 0.48 - 0.81i$. Andererseits scheint aber die Umlaufzahl 2 zu sein:



Hier stimmt etwas nicht! 4 Punkte von $f^{-1}(6 + 2i)$ liegen im Kreis $K_1(0)$, aber für die Umlaufzahl gilt offensichtlich $\chi(f \circ \alpha, 6 + 2i) = 2$. Wo ist der Fehler? $f(z)$ ist eine gerade Funktion, d.h. $f(-z) = f(z)$. Daher ist $f(e^{it}) = f(e^{i(t+\pi)})$. Für $t \in [\pi, 2\pi]$ wird also die gleiche Kurve nochmals durchlaufen. Das sieht man natürlich nicht im Bild. Man muss also die „sichtbare“ Umlaufzahl mit 2 multiplizieren. Dann ist $\chi(f \circ \alpha, 6 + 2i) = 4$, wie es sein soll.

Wir verwenden das Nullstellen zählende Integral zum zum Beweis des Satzes von Rouché:

SATZ (Rouché). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und α eine stückweise glatte, geschlossene, ganz in G verlaufende Kurve, sodass jeder Punkt im Innern der Kurve genau einmal von α umlaufen wird. Sind $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, sodass gilt

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in \text{Bild}(\alpha),$$

so haben f und $f + g$ gleich viele Nullstellen im Innern der Kurve, wenn man mit Vielfachheiten zählt. (f und $f + g$ haben keine Nullstelle auf der Kurve.)

Beweis: Wir geben zwei Beweise für diesen Satz an.

- 1. *Beweis:* Sei für $t \in [0, 1]$ die Funktion $h_t : G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$h_t(z) = f(z) + tg(z).$$

Für $z \in \text{Bild}(\alpha)$ gilt (mit der Voraussetzung $|g(z)| < |f(z)|$)

$$|h_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

Also hat $h_t(z)$ keine Nullstelle auf $\text{Bild}(\alpha)$. Sei $N(t)$ die mit Vielfachheiten gezählte Anzahl der Nullstellen von $h_t(z)$ im Innern von α . Der letzte Satz liefert eine Formel für $N(t)$:

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{h'_t(z)}{h_t(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)} dz.$$

Da offensichtlich $N(t)$ eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach $\mathbb{Z}$ ist, ist $N(t)$ konstant. Dies zeigt, dass $h_0 = f$ und $h_1 = f + g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen im Innern von α besitzen.

- 2. *Beweis:* Wir betrachten die (meromorphe) Funktion

$$F(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)}$$

und dazu die Kurve $F \circ \alpha$. Es gilt

$$|F(\alpha(t)) - 1| = \left| \frac{g(\alpha(t))}{f(\alpha(t))} \right| < 1.$$

Also liegt die Kurve $F \circ \alpha$ ganz im offenen Kreis $K_1(1)$. Die Umlaufzahl um 0 ist daher 0:

$$0 = \chi(F \circ \alpha, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{F'(\alpha(t))\alpha'(t)}{F(\alpha(t))} dt.$$

Daher folgt

$$\int_\alpha \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_a^b \frac{F'(\alpha(t))\alpha'(t)}{F(\alpha(t))} dt.$$

Wegen

$$\frac{F'}{F} = \frac{(f+g)'}{f+g} - \frac{f'}{f}$$

folgt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{(f+g)'(z)}{(f+g)(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Nach dem Satz über das Null- und Polstellen-zählende Integral haben f und $f+g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen im Innern der Kurve α . ■

Bemerkung: Eine typische Anwendung ist folgende: Man hat eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und möchte zählen, wieviele Nullstellen es mit $|z| < r$ gibt. Man versucht zu zerlegen

$$F(z) = f(z) + g(z),$$

sodass gilt

$$|g(z)| < |f(z)| \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = r.$$

Ist dies der Fall, so haben $F(z)$ und $f(z)$ gleichviele Nullstellen mit $|z| < r$ (und keine mit $|z| = r$). Ist $f(z)$ so gebaut, dass man die Anzahl der Nullstellen bestimmen kann, so folgt eine entsprechende Aussage für $F(z)$.

Beispiel: Wir betrachten das Polynom $F(z) = z^3 + 2z + 2$. Sei $f(z) = z^3$ und $g(z) = 2z + 2$. Dann ist $F(z) = f(z) + g(z)$. Für $|z| = 2$ gilt:

$$|g(z)| = |2z + 2| \leq 2|z| + 2 = 6 < 8 = |z|^3 = |f(z)|.$$

Da $f(z) = z^3$ (mit Vielfachheit gezählt) genau drei Nullstellen in $K_2(0)$ hat, gilt dies auch für $F(z) = f(z) + g(z)$, d.h. alle Nullstellen von $F(z) = z^3 + 2z + 2$ liegen im Kreis $K_2(0)$. Tatsächlich findet man mit Sage (`f.roots(ring=CC)`) die Nullstellen

$-0.770916997059248, 0.385458498529624 - 1.56388451052696i, 0.385458498529624 + 1.56388451052696i$.

mit den Absolutbeträgen

$$0.770916997059248, 1.61068712553210, 1.61068712553210.$$

Beispiel¹: Wir wollen sehen, wieviele Nullstellen $F(z) = z^4 - 5z + 1$ in den Gebieten

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}, \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$$

besitzt. Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe des Satzes von Rouché.

¹Staatsexamen Herbst 2003, Thema Nr. 2, Aufgabe 1

- (1) Wir wählen $f(z) = -5z$, $g(z) = z^4 + 1$. Für $|z| = 1$ gilt

$$|g(z)| \leq |z|^4 + 1 = 2 < 5 = |f(z)|.$$

Daher haben $f(z)$ und $F(z) = f(z) + g(z)$ nach dem Satz von Rouché die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\{|z| < 1\}$ und keine Nullstelle mit $|z| = 1$. Da $f(z)$ genau eine Nullstelle besitzt, nämlich $z = 0$, hat also auch $F(z)$ genau eine Nullstelle im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

- (2) Wir wählen nun $f(z) = z^4$, $g(z) = -5z + 1$. Für $|z| = 2$ gilt

$$|g(z)| \leq 5|z| + 1 = 5 \cdot 2 + 1 = 11 < 16 = |z|^4 = |f(z)|.$$

Da $f(z)$ genau vier Nullstellen in $K_2(0)$ hat, nämlich eine vierfache Nullstelle in $z = 0$, gilt dies nach dem Satz von Rouché auch für $F(z) = f(z) + g(z)$. Außerdem hat $F(z)$ keine Nullstelle mit $|z| = 2$. Da $F(z)$ also keine Nullstelle mit $|z| = 1$ und $|z| = 2$ besitzt, hat $F(z)$ nach (1) genau drei Nullstellen im Kreisring $\{1 < |z| < 2\}$.

- (3) $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$. Aus (1) und (2) folgt sofort, dass $F(z)$ keine Nullstelle mit $|z| > 2$ besitzt.

Mit Sage findet man die Nullstellen

$$0.200322066207957, \quad 1.63730577541758,$$

$$-0.918813920812767 - 1.48481264383494i, \quad -0.918813920812767 + 1.48481264383494i$$

mit den Absolutbeträgen

$$0.200322066207957, \quad 1.63730577541758, \quad 1.74610641381659, \quad 1.74610641381659$$

Beispiel²: Wir betrachten $f(z) = 6z^6 - 2z^2 + 1$. Es ist $f(0) = 1$. Da $f(z)$ nicht konstant ist, ist f eine offene Abbildung, also gibt es ein $r > 0$ mit $K_r(1) \subseteq f(K_1(0))$. Wir werden mit dem Satz von Rouché zeigen, dass

$$K_4(1) \subseteq f(K_1(0))$$

gilt.

Sei $b \in K_4(1)$ beliebig, d.h. $|b - 1| < 4$. Wir wollen sehen, dass ein a mit $|a| < 1$ existiert mit $f(a) = b$. Dazu betrachten wir die Funktion

$$F_b(z) = f(z) - b = 6z^6 - 2z^2 + (1 - b).$$

Wir wollen zeigen, dass sie eine Nullstelle mit $|z| < 1$ hat. Wir zerlegen

$$F_b(z) = 6z^6 + (-2z^2 + 1 - b).$$

Für alle z mit $|z| = 1$ gilt:

$$|-2z^2 + 1 - b| \leq 2|z|^2 + |b - 1| = 2 + |b - 1| < 2 + 4 = 6 = |6z^6|.$$

Nach dem Satz von Rouché haben $F_b(z)$ und $6z^6$ gleichviele Nullstellen mit $|z| < 1$. Da $6z^6$ eine Nullstelle hat, gilt dies auch für $F_b(z)$, d.h. es gibt ein a mit $|a| < 1$ und $F_b(a) = 0$, also $f(a) = b$. Dies wollten wir zeigen.

Wir schätzen noch weiter ab: Für $z \in K_1(0)$ gilt

$$|f(z) - 1| = |6z^6 - 2z^2| \leq 6|z|^6 + 2|z|^2 < 6 + 2 = 8, \quad \text{also} \quad f(z) \in K_8(1).$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$K_4(1) \subseteq f(K_1(0)) \subseteq K_8(1).$$

(Die 8 auf der rechten Seite kann nicht verbessert werden, weil beispielsweise $f(e^{\frac{2\pi i}{8}}) = 1 - 8i$ gilt.)

Wir beweisen mit dem Satz von Rouché nochmals den Fundamentalsatz der Algebra:

SATZ. Ist $F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$ ein Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten aus $\mathbb{C}$, so hat F (mit Vielfachheit gezählt) genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

²Nach: Staatsexamen Analysis Frühjahr 2015, Thema Nr. 1, Aufgabe 1

Beweis: Wir wählen $f(z) = z^n$ und $g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n$, sodass $F(z) = f(z) + g(z)$ gilt. (Wir können $A > 0$ voraussetzen, da der Fall $F(z) = z^n$ trivial ist.) Für $A = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|)$ und $|z| > 1$ gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \left| \sum_{j=1}^n a_j z^{n-j} \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_j| |z|^{n-j} \leq A \cdot \sum_{j=1}^n |z|^{n-j} = A \cdot \sum_{j=0}^{n-1} |z|^j = A \cdot \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} < \\ &< A \cdot \frac{|z|^n}{|z| - 1} = \frac{A}{|z| - 1} \cdot |f(z)|. \end{aligned}$$

Ist nun $R \geq A + 1$, so folgt für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R$

$$|g(z)| < \frac{A}{|z| - 1} \cdot |f(z)| = \frac{A}{R - 1} \cdot |f(z)| \leq |f(z)|.$$

Nach dem Satz von Rouché haben $F(z) = f(z) + g(z)$ und $f(z) = z^n$ keine Nullstelle mit $|z| = R$ und gleich viele Nullstellen mit $|z| < R$. Da $f(z)$ (mit Vielfachheit gezählt) genau n Nullstellen hat, nämlich eine n -fache Nullstelle in $z = 0$, hat auch $F(z)$ genau n Nullstellen im Kreis $K_R(0)$. Da R beliebig groß gewählt werden kann, folgt die Behauptung. ■

Der nachfolgende Satz ist noch eine schöne Anwendung des Satzes von Rouché. Dem Satz schicken wir eine Bemerkung voraus.

Bemerkung: Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f(z) = z^n.$$

Für $w \in \mathbb{C}$ gilt dann

$$|f^{-1}(w)| = |\{z \in \mathbb{C} : z^n = w\}| = \begin{cases} 1 & \text{für } w = 0, \\ n & \text{für } w \neq 0. \end{cases}$$

Der folgende Satz sagt, dass sich jede holomorphe Funktion lokal ähnlich verhält.

SATZ. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nichtkonstant holomorph und $z_0 \in G$. Es gibt eine offene Umgebung U_0 von z_0 mit $U_0 \subseteq G$ und ein $s > 0$, sodass gilt

$$f(U_0) = K_s(f(z_0)) \quad \text{mit} \quad K_s(f(z_0)) = \{w \in \mathbb{C} : |w - f(z_0)| < s\}$$

und mit $n = \text{ord}(f - f(z_0), z_0)$

$$|\{z \in U_0 : f(z) = f(z_0) + \lambda\}| = \begin{cases} 1 & \text{für } z = z_0, \\ n & \text{für } z \in U_0 \setminus \{z_0\} \end{cases} \quad \text{für alle } \lambda \text{ mit } |\lambda| < s.$$

Beweis:

- (1) Wegen $n = \text{ord}(f - f(z_0), z_0)$ hat $f(z) - f(z_0)$ eine Nullstelle der Ordnung n in z_0 , also hat $\frac{f(z) - f(z_0)}{(z - z_0)^n}$ in z_0 eine hebbare Singularität, es gibt also eine holomorphe Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z) \quad \text{und} \quad g(z_0) \neq 0.$$

- (2) Für spätere Zwecke brauchen wir die Ableitung

$$\left((z - z_0)^n g(z) \right)' = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z) = (z - z_0)^{n-1} (ng(z) + (z - z_0)g'(z)).$$

Es ist

$$(ng(z) + (z - z_0)g'(z))(z_0) \neq 0.$$

Wir können daher ein $r > 0$ finden mit $\overline{K_r(z_0)} \subseteq G$, sodass die Funktionen

$$(z - z_0)^n g(z) \quad \text{und} \quad \left((z - z_0)^n g(z) \right)'(z)$$

in $\overline{K_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$ keine Nullstelle haben.

(3) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ „klein“. Wir suchen nach Lösungen von

$$f(z) = f(z_0) + \lambda$$

in der Nähe von z_0 , also nach Nullstellen von

$$h_\lambda(z) = f(z) - f(z_0) - \lambda = (z - z_0)^n g(z) - \lambda$$

in der Nähe von z_0 .

(4) Wir wollen Rouché auf $(z - z_0)^n g(z)$ und λ anwenden und betrachten daher

$$s = \inf\{|(z - z_0)^n g(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

Es ist $s > 0$. Ist nun $|\lambda| < s$, so gilt auf dem Kreisrand $|z - z_0| = r$

$$|\lambda| < s \leq |(z - z_0)^n g(z)|,$$

also haben nach Rouché die Funktionen $h_\lambda(z)$ und $(z - z_0)^n g(z)$ gleichviele Nullstelle im Kreis $K_r(z_0)$, also n Stück. Im Fall $\lambda \neq 0$ haben $h_\lambda(z)$ und $h'_\lambda(z)$ keine gemeinsame Nullstelle in $K_r(z_0)$, also sind die n Nullstellen von $h_\lambda(z)$ einfach, und daher paarweise verschieden. Mengemäßig gilt also:

$$0 < |\lambda| < s \implies |\{z \in K_r(z_0) : f(z) = f(z_0) + \lambda\}| = n.$$

Dies zeigt auch

$$K_s(f(z_0)) \subseteq f(K_r(z_0)).$$

Setzen wir

$$U_0 = K_r(z_0) \cap f^{-1}(K_s(f(z_0))),$$

so gilt also $f(U_0) = K_s(f(z_0))$, woraus dann die Behauptung folgt. ■

FOLGERUNG. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ nichtkonstant holomorph und $z_0 \in G$.

- (1) Ist $f'(z_0) \neq 0$, so gibt es eine Umgebung $U_0 \subseteq G$ von z_0 , sodass die Einschränkung $f|_{U_0}$ injektiv ist.
- (2) Ist $f'(z_0) = 0$, so ist f in keiner Umgebung von z_0 injektiv. Genauer: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $z_1, z_2 \in K_\varepsilon(z_0) \cap G$ mit $z_1 \neq z_2$ und $f(z_1) = f(z_2)$.

Beweis: Ist $n = \text{ord}(f - f(z_0), z_0)$, so können wir zerlegen

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z) \quad \text{mit } g(z_0) \neq 0,$$

wo $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. Aus

$$f'(z) = \begin{cases} g(z) + (z - z_0)g'(z) & \text{für } n = 1, \\ n(z - z_0)^{n-1}g(z) + (z - z_0)^n g'(z) & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$$

sieht man

$$f'(z_0) = \begin{cases} g(z_0) \neq 0 & \text{für } n = 1, \\ 0 & \text{für } n \geq 2. \end{cases}$$

Der Rest folgt aus dem vorangegangenen Satz. ■

FOLGERUNG. Ist $\subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine injektive holomorphe Funktion, so gilt $f'(z) \neq 0$ Für alle $z \in G$.

Bemerkung: Die Umkehrung der letzten Folgerung gilt nicht, wie man am Beispiel der exp-Funktion sehen kann: Die Ableitung ist exp selbst, hat also keine Nullstellen, aber es gilt

$$e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2\pi i \cdot k \text{ für ein } k \in \mathbb{Z},$$

die exp-Funktion ist also nicht injektiv auf ganz $\mathbb{C}$.

Folgen holomorpher Funktionen

1. Konvergenz von Funktionenfolgen (Wiederholung)

Bereits in der Analysis I stellt man fest, dass punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ oft nicht ausreicht, damit sich „schöne“ Eigenschaften der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion übertragen.

Beispiel: Definiert man für $n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}},$$

so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } |x| = 1, \\ 1 & \text{für } |x| > 1. \end{cases}$$

Während die Funktionen f_n stetig sind, ist die Grenzfunktion in $x = \pm 1$ nicht mehr stetig.

Daher führt man den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein:

DEFINITION. Sei M eine (beliebige nichtleere) Menge und $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass gilt

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in M.$$

Das Cauchy-Kriterium lautet nun folgendermaßen:

LEMMA (Cauchy-Kriterium). Sei M eine nichtleere Menge, $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{C}$.
- (2) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ für alle } n, m \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in M.$$

Für unsere Anwendungen sind lokale Varianten der gleichmäßigen Konvergenz wichtig:

DEFINITION. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine (nichtleere) Teilmenge von $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- (1) Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert lokal gleichmäßig** gegen f , wenn es zu jedem Punkt $a \in M$ eine Umgebung U_a gibt, sodass die eingeschränkte Funktionenfolge $(f_n|_{U_a \cap M})_{n \geq 0}$ gleichmäßig gegen $f|_{U_a \cap M}$ konvergiert.
- (2) Die Folge $(f_n)_{n \geq 0}$ **konvergiert kompakt** gegen f , wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq M$ die eingeschränkte Funktionenfolge $(f_n|_K)_{n \geq 0}$ gleichmäßig gegen $f|_K$ konvergiert.

Bei uns sind die Funktionen in der Regel auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert. Das folgende Lemma zeigt, dass wir in diesem Fall nicht zwischen lokal gleichmäßiger und kompakter Konvergenz unterscheiden müssen.

LEMMA. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere Teilmenge, $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von Funktionen $f_n : M \rightarrow \mathbb{C}$ und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann gilt:

- (1) Konvergiert $(f_n)_{n \geq 0}$ lokal gleichmäßig gegen f , so konvergiert $(f_n)_{n \geq 0}$ auch kompakt gegen f .
- (2) Ist M offen und konvergiert $(f_n)_{n \geq 0}$ kompakt gegen f , so konvergiert $(f_n)_{n \geq 0}$ auch lokal gleichmäßig gegen f .

Beweis:

- (1) Sei $K \subseteq D$ eine kompakte (nichtleere) Teilmenge. Für jedes $z \in K$ gibt es eine offene Umgebung U_z von z , sodass (nach Voraussetzung) die Einschränkung $(f_n|_{U_z \cap M})_{n \geq 0}$ gleichmäßig gegen $f|_{U_z \cap M}$ konvergiert. Die offenen Mengen U_z , $z \in K$ überdecken K , also gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $z_1, \dots, z_m \in K$ mit $K \subseteq U_{z_1} \cup U_{z_2} \cup \dots \cup U_{z_m}$. Die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n|_{U_{z_j} \cap D})_{n \geq 0}$ für $j = 1, \dots, m$ liefert dann sofort die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n|_K)_{n \geq 0}$.
- (2) Ist nun $M \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z \in M$, so gibt es ein $r > 0$ mit $K_{2r}(z) \subseteq M$. Dann ist aber $\overline{K}_r(z)$ eine kompakte Umgebung von z , auf der die Funktionenfolge nach Voraussetzung gleichmäßig gegen f konvergiert. Es folgt die Behauptung. ■

LEMMA. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergieren. Dann gilt:

- (1) Die Grenzfunktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.
- (2) Für jede stückweise glatte, ganz in U verlaufende Kurve α gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha} f_n(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz.$$

Beweis:

- (1) Sei $z_0 \in U$ und $K_r(z_0)$ eine Umgebung von z_0 , in der die Folge f_n gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Dann gibt es ein N_ε mit

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_\varepsilon \text{ und } z \in K_r(z_0).$$

Da $f_{N_\varepsilon}(z)$ in z_0 stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$z \in K_\delta(z_0) \implies |f_{N_\varepsilon}(z) - f_{N_\varepsilon}(z_0)| < \varepsilon.$$

Es folgt für alle $z \in K_\delta(z_0)$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_{N_\varepsilon}(z) + f_{N_\varepsilon}(z) - f_{N_\varepsilon}(z_0) + f_{N_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| \leq \\ &\leq |f(z) - f_{N_\varepsilon}(z)| + |f_{N_\varepsilon}(z) - f_{N_\varepsilon}(z_0)| + |f_{N_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| < \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von f .

- (2) Da f stetig ist, ist $\int_{\alpha} f(z) dz$ definiert. Da $\text{Bild}(\alpha) \subseteq U$ eine kompakte Teilmenge von U ist, konvergiert f_n auf $\text{Bild}(\alpha)$ gleichmäßig gegen f . Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein N_ε mit der Eigenschaft

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ für } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in \text{Bild}(\alpha).$$

Mit der Standardabschätzung für Kurvenintegrale folgt für $n \geq N_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} f_n(z) dz - \int_{\alpha} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha} (f(z) - f_n(z)) dz \right| \leq \\ &\leq \sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \text{Bild}(\alpha)\} \cdot \ell(\alpha) \leq \\ &\leq \varepsilon \cdot \ell(\alpha). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

SATZ (Weierstraß). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergieren. Dann gilt:

- (1) f ist holomorph.
- (2) Die Folge der Ableitungen $(f'_n)_{n \geq 0}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Ableitung f' .

Beweis:

- (1) Seien $a_1, a_2, a_3 \in U$ mit $\Delta(a_1, a_2, a_3) \subseteq U$. Das Lemma von Goursat (oder der Cauchy-Integralsatz für Sterngebiete) liefert dann

$$\int_{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} f_n(z) dz = 0 \text{ für alle } n.$$

Mit dem vorangegangenen Lemma folgt

$$\int_{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\langle a_1, a_2, a_3 \rangle} f_n(z) dz = 0.$$

Da f stetig ist (nach dem letzten Lemma), folgt aus dem Satz von Morera, dass f holomorph ist.

- (2) Sei $z_0 \in U$ und $r > 0$, sodass $\overline{K}_r(z_0) \subseteq U$ gilt. Dann haben wir mit den Cauchy-Integralformeln für die 1. Ableitung für alle $a \in K_r(z_0)$

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \text{ und } f'_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz.$$

Für $a \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ und $|z - z_0| = r$ gilt

$$|z - a| = |(z - z_0) + (z_0 - a)| \geq |z - z_0| - |z_0 - a| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

und damit

$$\left| \frac{1}{(z-a)^2} \right| \leq \frac{1}{\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{4}{r^2}.$$

Daher gilt für $a \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ mit der Standardabschätzung

$$\begin{aligned} |f'(a) - f'_n(a)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f_n(z)}{(z-a)^2} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \partial K_r(z_0)\} \cdot \frac{4}{r^2} \cdot 2\pi r = \\ &= \sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \partial K_r(z_0)\} \cdot \frac{4}{r}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da f_n lokal gleichmäßig gegen f konvergiert, konvergiert f_n auf der kompakten Menge $\partial K_r(z_0)$ gleichmäßig gegen f , also gibt es ein N_ε mit

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in \partial K_r(z_0).$$

Es folgt

$$\sup\{|f(z) - f_n(z)| : z \in \partial K_r(z_0)\} \leq \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_\varepsilon$$

und damit

$$|f'(a) - f'_n(a)| \leq \frac{4}{r} \cdot \varepsilon \text{ für alle } n \geq N_\varepsilon \text{ und alle } a \in K_{\frac{r}{2}}(z_0).$$

Dies zeigt, dass f'_n lokal gleichmäßig gegen f' konvergiert. ■

Bemerkung: Im Reellen ist die obige Aussage nicht richtig. Definiert man für $n \geq 1$ die Funktion $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig gegen die 0-Funktion, aber die Folge der Ableitungen f'_n mit $f'_n(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(nx)$ konvergiert in keinem Punkt.

2. Der Satz von Hurwitz und Folgen injektiver holomorpher Funktionen

Für den Beweis des folgenden Satzes verwenden wir das Nullstellen-zählende Integral. Freitag/Busam benennen den Satz nach Hurwitz.

SATZ (Hurwitz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, die keine Nullstelle in G besitzen. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiere lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. (Nach dem Satz von Weierstraß ist dann auch f holomorph in G .) Dann ist entweder f identisch 0 oder f besitzt auch keine Nullstelle in G .*

Beweis: Ist $f(z) = 0$ für alle $z \in G$, so ist nichts zu zeigen. Wir betrachten den Fall, dass f nicht identisch 0 ist. Sei $a \in G$. Wir müssen zeigen, dass $f(a) \neq 0$ gilt. Wir können ein $r > 0$ so wählen, dass gilt:

- $K_{2r}(a) \subseteq G$.
- $(f_n)_{n \geq 0}$ konvergiert in $K_{2r}(a)$ gleichmäßig gegen f .
- $(f'_n)_{n \geq 0}$ konvergiert in $K_{2r}(a)$ gleichmäßig gegen f' . (Dies folgt aus dem Satz von Weierstraß.)
- f hat in $K_{2r}(a)$ höchstens a als Nullstelle.
- $(\frac{f'_n}{f_n})_{n \geq 0}$ konvergiert auf $|z - a| = r$ gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$.

Die letzte Aussage folgt aus den vorangegangenen mit Hilfe der Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right| &= \frac{|f'_n(z)f(z) - f'(z)f_n(z)|}{|f_n(z)||f(z)|} = \frac{|(f'_n(z) - f'(z))f(z) - f'(z)(f_n(z) - f(z))|}{|f_n(z)||f(z)|} \leq \\ &\leq \frac{|f'_n(z) - f'(z)||f(z)| + |f'_n(z) - f'(z)||f_n(z) - f(z)|}{|f_n(z)||f(z)|}. \end{aligned}$$

Da $K_{2r}(a)$ einfach zusammenhängend ist, können wir den Satz über das Nullstellen-zählende Integral auf den Kreis $|z - a| = r$ anwenden. Weder f_n noch f haben eine Nullstelle mit $|z - a| = r$. Da f_n keine Nullstelle in G hat, f höchstens eine Nullstelle in $K_{2r}(a)$ hat, nämlich in a , gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ord}(f, a).$$

Da $(\frac{f'_n}{f_n})_{n \geq 0}$ auf $|z - a| = r$ gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$ konvergiert, dürfen wir Limesbildung und Integration vertauschen. Es folgt

$$0 = \lim_{n \geq \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'_n(z)}{f_n(z)} \right) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{ord}(f, a).$$

Also gilt $f(a) \neq 0$, was wir zeigen wollten. ■

Beispiele:

- (1) Wir betrachten $f_n(z) = \frac{1}{n}e^z$ auf $\mathbb{C}$. $f_n(z)$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, die Funktionenfolge konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f(z) = 0$.
- (2) Auf $G = K_1(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$ betrachten wir $f_n(z) = z^2 + \frac{1}{n}$. $f_n(z)$ hat keine Nullstelle in $K_1(1)$. (Die Nullstellen sind $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}i$.) $(f_n)_{n \geq 1}$ konvergiert auf $K_1(1)$ gegen $f(z) = z^2$, eine Funktion, die auch keine Nullstelle in $K_1(1)$ hat.
- (3) Im Reellen gilt die Aussage des Satzes von Hurwitz nicht. Betrachtet man $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}$ auf $\mathbb{R}$, so konvergiert $(f_n)_{n \geq 1}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen $f(x) = x^2$. Die Funktionen $f_n(x)$ haben keine Nullstellen in $\mathbb{R}$, die Funktion $f(x)$ hat aber die Nullstelle 0.

FOLGERUNG. *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n)_{n \geq 0}$ eine Folge injektiver holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergieren. Dann ist f konstant oder injektiv.*

Beweis: Ist f konstant, so sind wir fertig. Wir können also den Fall betrachten, dass f nicht konstant ist. Sei $a \in G$. Wir betrachten $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$ und $g(z) = f(z) - f(a)$ auf $G \setminus \{a\}$. Da $f_n(z)$ injektiv ist, gilt $f_n(z) \neq f_n(a)$ für alle $z \in G \setminus \{a\}$, also $g_n(z) \neq 0$ für alle $z \in G \setminus \{a\}$. Wir wenden den Satz von Hurwitz auf $(g_n)_{n \geq 0}$ und $G \setminus \{a\}$ an. Da $(g_n)_{n \geq 1}$ lokal gleichmäßig gegen $g(z)$ konvergiert und $g(z)$ nicht konstant ist, hat $g(z)$ keine Nullstelle in $G \setminus \{a\}$, d.h. $f(z) \neq f(a)$ für alle $z \in G \setminus \{a\}$. Da $a \in G$ beliebig gewählt werden konnte, beweist dies die Injektivität von f auf G . ■

3. Der Satz von Montel

Der **Satz von Bolzano-Weierstraß** besagt, dass jede beschränkte Folge reeller (oder komplexer) Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt. Eine analoge Aussage liefert der **Satz von Montel** für Folgen holomorpher Funktionen. (Man findet verschiedene Varianten des Satzes. Wir folgen hier Freitag/Busam.)

Satz (Montel). Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $C > 0$ und $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f_n(z)| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U$. Dann existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Bemerkung: Im Reellen stimmt der Satz nicht, so hat die Folge $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \sin(nx)$ nicht einmal punktweise konvergente Teilfolgen (Remmert/Schumacher, Funktionentheorie 2, S.149).

Dem Beweis des Satzes von Montel schicken wir zwei Lemmas voraus.

Lemma. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K \subseteq U$ kompakt und $C > 0$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(U, K, C) > 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine (beliebige) holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in U$, so gilt die Implikation

$$z_1, z_2 \in K \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Beweis:

- (1) Da U offen ist, gibt es für jeden Punkt $a \in K$ eine Zahl $r_a > 0$ mit

$$\overline{K_{3r_a}(a)} \subseteq U.$$

Wegen

$$K \subseteq \bigcup_{a \in K} K_{r_a}(a)$$

und der Kompaktheit von K gibt es endlich viele Punkte $a_1, \dots, a_n$ mit

$$K \subseteq K_{r_{a_1}}(a_1) \cup \dots \cup K_{r_{a_n}}(a_n).$$

Dabei gilt

$$\overline{K_{3r_{a_j}}(a_j)} \subseteq U \text{ für } j = 1, \dots, n.$$

- (2) Zu $\varepsilon > 0$ sei

$$\delta = \min \left(r_{a_1}, \dots, r_{a_n}, \frac{2r_{a_1}}{3C} \cdot \varepsilon, \dots, \frac{2r_{a_n}}{3C} \cdot \varepsilon \right).$$

Wir werden zeigen, dass mit diesem δ die Aussagen des Lemmas gelten.

- (3) Sei also nun $z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$. Dann gibt es einen Index j mit

$$z_1 \in K_{r_{a_j}}(a_j).$$

Es folgt

$$|z_2 - a_j| = |z_2 - z_1 + z_1 - a_j| \leq |z_1 - z_2| + |z_1 - a_j| < \delta + r_{a_j} \leq r_{a_j} + r_{a_j} = 2r_{a_j}.$$

Wir haben also jetzt

$$z_1 \in K_{r_{a_j}}(a_j) \quad \text{und} \quad z_2 \in K_{2r_{a_j}}(a_j).$$

Wir wollen die Cauchy-Integralformel auf dem Kreisrand $|z - a_j| = 3a_j$ anwenden. Wir schätzen zunächst $|z - z_1|$ und $|z - z_2|$ ab. Mit $|z - a_j| = 3a_j$ gilt

$$\begin{aligned} |z - z_1| &= |z - a_j + a_j - z_1| \geq |z - a_j| - |z_1 - a_j| = 3r_{a_j} - |z_1 - a_j| > 3r_{a_j} - r_{a_j} = 2r_{a_j}, \\ |z - z_2| &= |z - a_j + a_j - z_2| \geq |z - a_j| - |z_2 - a_j| \geq 3r_{a_j} - 2r_{a_j} = r_{a_j}, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{|z - z_1|} < \frac{1}{2r_{a_j}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{|z - z_2|} < \frac{1}{r_{a_j}}.$$

Ist nun $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ eine (beliebige) holomorphe Funktion mit $|f(z)| \leq C$ für $z \in U$, so folgt (für z mit $|z - a_j| = 3r_{a_j}$)

$$\left| \frac{f(z)}{z - z_1} - \frac{f(z)}{z - z_2} \right| = \left| \frac{f(z)(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} \right| \leq \frac{C \cdot |z_1 - z_2|}{2r_{a_j}^2}.$$

Mit der Cauchy-Integralformel und der Standardabschätzung erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - a_j| = 3r_{a_j}} \frac{f(z)}{z - z_1} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - a_j| = 3r_{a_j}} \frac{f(z)}{z - z_2} dz \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z - a_j| = 3r_{a_j}} \frac{f(z)(z_1 - z_2)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C \cdot |z_1 - z_2|}{2r_{a_j}^2} \cdot 2\pi \cdot 3r_{a_j} = \frac{3C}{2r_{a_j}} \cdot |z_1 - z_2| < \\ &< \frac{3C}{2r_{a_j}} \cdot \delta \leq \frac{3C}{2r_{a_j}} \cdot \frac{2r_{a_j}}{3C} \cdot \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. ■

Wir benützen das vorangegangene Lemma zum Beweis des folgenden Lemmas:

LEMMA. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, sodass $|f_n(z)| \leq C$ für alle $z \in U$ und alle n gilt. Es gebe eine Teilmenge $S \subseteq U$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für alle $a \in S$ konvergiert (die Zahlenfolge) $(f_n(a))_{n \geq 1}$.
- S liegt dicht in U .

Dann konvergiert die Funktionenfolge (f_n) in ganz U und zwar lokal gleichmäßig.

Beweis:

- Sei $K \subseteq U$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass (f_n) auf K gleichmäßig konvergiert. Zu $\varepsilon > 0$ werden wir ein N_ε angeben, sodass gilt:

$$m, n \geq N_\varepsilon \implies |f_m(z) - f_n(z)| < 3\varepsilon \text{ für alle } z \in K.$$

Dies beweist dann die kompakte, also auch die lokal gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge.

- Nach Voraussetzung gilt $|f_n(z)| \leq C$ für alle $z \in U$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Mit dem vorangegangenen Lemma finden wir zu ε eine Zahl $\delta = \delta(U, K, C)$ mit

$$z_1, z_2 \in K \text{ mit } |z_1 - z_2| < \delta \implies |f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon \quad (\text{für alle } n).$$

- Da S dicht in U liegt, gilt

$$K \subseteq \bigcup_{a \in S} K_\delta(a).$$

Wegen der Kompaktheit von K gibt es endlich viele $a_1, \dots, a_r \in S$ mit

$$K \subseteq K_\delta(a_1) \cup \dots \cup K_\delta(a_r).$$

Da die (endlich vielen) Folgen $(f_n(a_1))_{n \geq 1}, \dots, (f_n(a_r))_{n \geq 1}$ konvergieren, gibt es ein N_ε mit

$$m, n \geq N_\varepsilon \implies |f_m(a_j) - f_n(a_j)| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \dots, r.$$

- Sei nun $z \in K$ beliebig. Dann gibt es einen Index j mit $|z - a_j| < \delta$. Dann folgt für $m, n \geq N_\varepsilon$

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(a_j)| + |f_m(a_j) - f_n(a_j)| + |f_n(a_j) - f_n(z)| < 3\varepsilon.$$

Dies zeigt, dass (f_n) auf K gleichmäßig konvergiert. Dies beweist die lokal gleichmäßige Konvergenz. ■

Mit Hilfe des vorangegangenen Lemmas können wir nun den Satz von Montel beweisen:

Beweis des Satzes von Montel:

- Sei also $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $C > 0$ und (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f_n(z)| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U$.
- Wir wählen eine abzählbare dichte Teilmenge von $S \subseteq U$, beispielsweise

$$S = \{x + iy \in U : x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Wir zählen S auf:

$$S = \{s_1, s_2, s_3, \dots\}.$$

- Wir betrachten die Zahlenfolge $(f_n(s_1))$. Da sie durch C betragsmäßig beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(f_{1n}(s_1))_{n \geq 1}$.
- Wir betrachten nun die Folge $(f_{1n}(z))_{n \geq 1}$ in s_2 , also $(f_{1n}(s_2))_{n \geq 1}$. Dies ist eine beschränkte Folge komplexer Zahlen, besitzt also nach Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge $(f_{2n}(s_2))_{n \geq 1}$. Da (f_{2n}) eine Teilfolge von (f_{1n}) ist, konvergiert die Folge $(f_{2n}(z))_{n \geq 1}$ für $z = s_1$ und $z = s_2$.
- So machen wir weiter. Im m -ten Schritt erhalten wir eine Teilfolge $(f_{mn}(z))_{n \geq 1}$, die in $s_1, s_2, \dots, s_m$ konvergiert.
- Wir betrachten nun die „Diagonalfolge“ $(f_{nn}(z))_{n \geq 1}$. Sie konvergiert in $s_1, s_2, s_3, \dots$, also in allen Punkten von S . Nach dem vorangegangenen Lemma konvergiert die Folge $(f_{nn}(z))_{n \geq 1}$ auf ganz U , und zwar lokal gleichmäßig. ■

Die Riemannsche Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$

1. Einführung

Wir führen einen neuen Punkt ∞ ein und definieren

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Man findet auch die Schreibweisen $\overline{\mathbb{C}}$ und $\mathbb{C}_\infty$.

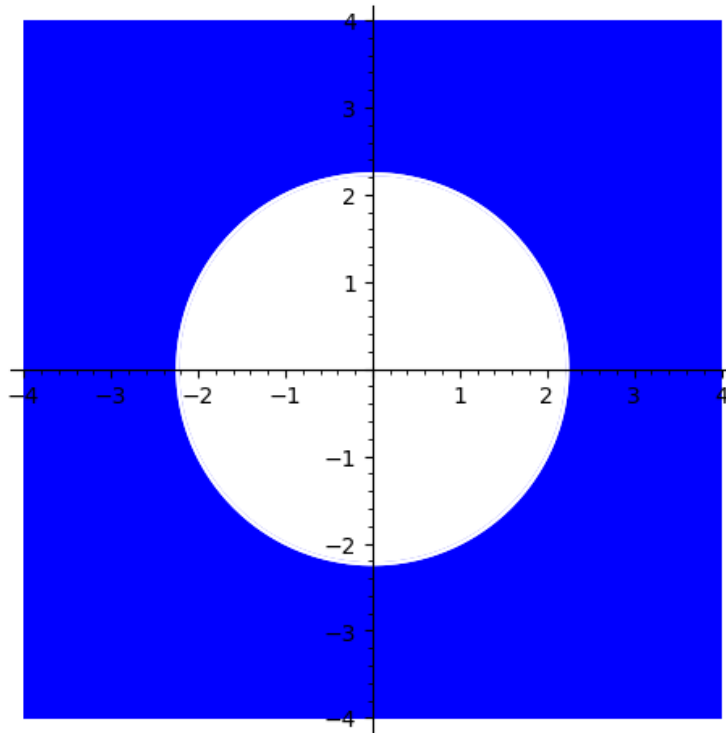
Durch nachfolgende Definition erhält man eine Topologie auf $\widehat{\mathbb{C}}$:

DEFINITION. Eine Teilmenge $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ heißt **offen**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $U \cap \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C}$.
- (2) Ist $\infty \in U$, so gibt es ein $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq U$.

Bemerkungen:

- (1) Typische offene Umgebungen von ∞ sind die Mengen $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}$.



- (2) Mit obigen Definitionen erhält die Schreibweise $z_n \rightarrow \infty$ eine klare Bedeutung: Zu jedem $r > 0$ existiert ein $n_r \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass gilt

$$|z_n| > r \text{ für alle } n \geq n_r.$$

LEMMA. $\widehat{\mathbb{C}}$ ist kompakt.

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von offenen Mengen, die $\widehat{\mathbb{C}}$ überdecken. Dann gibt es ein U_i , das ∞ enthält. Wir nennen es U_∞ . Es gibt dann ein $r > 0$ mit $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq U_\infty$. Nun ist aber $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ kompakt in $\mathbb{C}$. Da diese Menge auch von $(U_i)_{i \in I}$ überdeckt wird, existiert eine endliche Teilüberdeckung, d.h. $i_1, \dots, i_m \in I$ mit

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \subseteq U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m}.$$

Dann folgt aber

$$\widehat{\mathbb{C}} = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_m} \cup U_\infty,$$

was die Kompaktheit von $\widehat{\mathbb{C}}$ beweist. ■

$\widehat{\mathbb{C}}$ wird daher auch als Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Bemerkung: Ist $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ eine offene Umgebung von ∞ , so gibt es ein $r > 0$ mit

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \subseteq U.$$

Um das Verhalten einer Funktion in ∞ zu untersuchen, nutzen wir aus, dass für $r > 0$ die Abbildung

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{r}\} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto \frac{1}{z}$$

bijektiv (und sogar biholomorph) ist. Ist eine Funktion f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$ definiert, so ist

$$t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right) \text{ für } |t| < \frac{1}{r}$$

definiert.

DEFINITION. Sei $U \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ eine offene Umgebung von ∞ und $f : U \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann ist

$$U_0 = \{t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{1}{t} \in U\} \cup \{0\}$$

eine offene Umgebung von 0 und

$$f_0 : U_0 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$$

holomorph. (Wir substituieren also $t = \frac{1}{z}$.) Ist f definiert in ∞ , so setzen wir $f_0(0) = f(\infty)$.

- (1) f ist **holomorph** in ∞ , wenn $f(\infty)$ definiert und f_0 holomorph in $t = 0$ ist.
- (2) f hat in ∞ eine **hebbare Singularität**, wenn sich f zu einer in ∞ holomorphen Funktion fortsetzen lässt.
- (3) f hat in ∞ einen **Pol**, wenn f_0 in 0 einen Pol hat. (Äquivalent dazu ist $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.)
- (4) Ist f in ∞ holomorph oder hat f in ∞ einen Pol, so definieren wir $\text{ord}(f, \infty) = \text{ord}(f_0, 0)$.
- (5) f hat in ∞ eine **wesentliche Singularität**, wenn f_0 in $t = 0$ eine wesentliche Singularität hat.
- (6) Ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^n$ die Laurentreihenentwicklung von f_0 in 0, so ist $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{-n} z^n$ die Laurentreihenentwicklung von f in ∞ .

Beispiele:

- (1) Wir betrachten

$$f : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{3, \infty\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f(z) = 2 + \frac{1}{z-3}.$$

Natürlich ist f holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{3\}$. Was passiert in ∞ ? Dazu betrachten wir die zugehörige Funktion f_0 mit

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = 2 + \frac{1}{\frac{1}{t}-3} = 2 + \frac{t}{1-3t}.$$

Offensichtlich lässt sich f_0 zu einer in $t = 0$ holomorphen Funktion fortsetzen mit $f_0(0) = 2$. Definieren wir also $f(\infty) = 2$, so ist f auch holomorph in ∞ , und damit auf ganz $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{1\}$.

- (2) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^2 + 1$ ist holomorph. f ist auf $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ definiert. Was passiert in ∞ ?
Wir betrachten

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2} + 1.$$

f_0 hat in 0 einen Pol 2. Ordnung, also hat auch f in ∞ einen Pol 2. Ordnung.

- (3) $f(z) = \sin(z)$ ist eine ganze Funktion. Was passiert in ∞ ? Mit $t = \frac{1}{z}$ betrachten wir

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sin\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{1}{t^k}.$$

f_0 hat in 0 eine wesentliche Singularität, weswegen auch f in ∞ eine wesentliche Singularität hat.

SATZ. Sei f eine ganze Funktion, also eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann hat f in ∞ eine isolierte Singularität.

- (1) Hat f in ∞ eine hebbare Singularität, so ist f konstant.
- (2) Hat f in ∞ einen Pol der Ordnung m , so ist f ein Polynom vom Grad m .

Beweis: Sei

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung von f in $z = 0$. Dann ist

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{t^n} = a_0 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{t^n}$$

die Laurentreihenentwicklung von f_0 in $t = 0$.

- (1) Hat f in ∞ eine hebbare Singularität, so hat f_0 in $t = 0$ eine hebbare Singularität, also gilt $a_n = 0$ für $n \geq 1$, und damit $f(z) = a_0$, d.h. f ist konstant.
- (2) Hat f in ∞ einen Pol der Ordnung m , so hat f_0 in $t = 0$ einen Pol der Ordnung m , es ist also

$$f_0(t) = a_0 + \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{t^n} \text{ mit } a_m \neq 0.$$

Es folgt

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^m a_n z^n \text{ mit } a_m \neq 0.$$

Also ist f ein Polynom vom Grad m . ■

SATZ. Jede holomorphe Funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis: Sei $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist.

- 1. *Beweis:* Da $f|_{\mathbb{C}}$ eine ganze Funktion ist, die in ∞ eine hebbare Singularität hat, folgt dies sofort aus dem letzten Satz.
- 2. *Beweis:* Angenommen, $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, aber nicht konstant. Da $|f|$ stetig auf der kompakten Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ ist, nimmt $|f|$ sein Maximum in einem Punkt $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ an. Nach dem Maximumprinzip ist $z_0 \notin \mathbb{C}$, also $z_0 = \infty$. Dann hat aber die zugehörige Funktion $f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ in 0 ein Maximum, was auch nicht sein kann. Also muss f konstant sein. ■

Wir beweisen jetzt nochmals den Satz von Liouville:

SATZ (Liouville). Jede beschränkte, holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist konstant.

Beweis: Wir betrachten f als holomorphe Funktion $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist ∞ eine isolierte Singularität. Da f beschränkt ist, hat f nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz in ∞ eine hebbare Singularität, kann also als holomorphe Funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ betrachtet werden. Nach dem letzten Satz ist dann f konstant, wie behauptet. ■

2. Meromorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$

Bemerkungen:

- (1) Eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ meromorphe Funktion f „besteht“ aus einer diskreten Teilmenge $S_f \subseteq G$, sodass $f : G \setminus S_f \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und f in den Punkten von S_f Polstellen hat. Die Definition überträgt sich sofort auf Gebiete in $\widehat{\mathbb{C}}$.
- (2) Eine Polstelle z_0 einer meromorphen Funktion f lässt sich auch durch die Bedingung $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ charakterisieren, was wir auch in der Form $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ schreiben können. Definieren wir $f(z_0) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, so ist f also in z_0 stetig.
- (3) Nach der letzten Bemerkung können wir eine auf einem Gebiet $G \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion f auch als eine stetige Funktion $f : G \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definieren, sodass für eine diskrete Teilmenge $S_f \subseteq G$ die Einschränkung $f|(G \setminus S_f)$ holomorph ist.
- (4) Da $\widehat{\mathbb{C}}$ kompakt ist, kann eine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion nur endlich viele Polstellen haben.

SATZ. Jede meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine rationale Funktion, d.h. von der Gestalt $\frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynom $P(z)$ und $Q(z)$ (und $Q(z) \neq 0$).

Beweis: Seien $z_1, \dots, z_r$ die in $\mathbb{C}$ gelegenen Polstellen von $f(z)$, wobei $z_1, \dots, z_r$ paarweise verschieden sein sollen mit $\text{ord}(f, z_j) = -n_j$ (mit $n_j \in \mathbb{N}$) und $r \geq 0$. Die Laurentreihenentwicklung von f in z_j hat die Gestalt

$$\sum_{n \geq -n_j} a_{j,n} (z - z_j)^n = \frac{a_{j,-n_j}}{(z - z_j)^{n_j}} + \dots,$$

also hat $(z - z_j)^{n_j} f(z)$ in $z = z_j$ eine hebbare Singularität, kann also als eine in $z = z_j$ holomorphe Funktion betrachtet werden. Daher ist

$$f(z) \cdot (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_r)^{n_r}$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ mit einem möglichen Pol in ∞ . Nach einem vorangegangenen Satz ist dies ein Polynom $P(z)$:

$$f(z) \cdot (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_r)^{n_r} = P(z).$$

Setzen wir $Q(z) = (z - z_1)^{n_1} \dots (z - z_r)^{n_r}$, so folgt die Behauptung. ■

LEMMA. Sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$, also $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen $P(z), Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ mit $\text{grad}(P(z)) = m \geq 0$ und $\text{grad}(Q(z)) = n \geq 0$, $\text{ggT}(P(z), Q(z)) = 1$. Sei

$$P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j \text{ mit } a_m \neq 0 \quad \text{und} \quad Q(z) = \sum_{j=0}^n b_j z^j \text{ mit } b_n \neq 0.$$

Dann ist

$$\text{ord}(f, \infty) = n - m$$

und es gilt:

- Für $n > m$ hat f eine Nullstelle der Ordnung $n - m$ in ∞ .
- Für $n = m$ ist f holomorph in ∞ mit $f(\infty) = \frac{a_m}{b_n}$.
- Für $n < m$ hat f eine Polstelle der Ordnung $m - n$ in ∞ .

Beweis: Um zu sehen, was in ∞ passiert, betrachten wir $f_0(t) = f(\frac{1}{t})$ in $t = 0$:

$$f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{t}\right)}{Q\left(\frac{1}{t}\right)} = \frac{\sum_{j=0}^m a_j \left(\frac{1}{t}\right)^j}{\sum_{j=0}^n b_j \left(\frac{1}{t}\right)^j} = \frac{\frac{1}{t^m} \cdot \sum_{j=0}^m a_j t^{m-j}}{\frac{1}{t^n} \cdot \sum_{j=0}^n b_j t^{j-n}} = t^{n-m} \cdot \frac{a_m + a_{m-1}t + \dots}{b_n + b_{n-1}t + \dots}.$$

Mit

$$g(t) = \frac{a_m + a_{m-1}t + \dots}{b_n + b_{n-1}t + \dots}$$

gilt also

$$f_0(t) = t^{n-m} \cdot g(t) \text{ mit } g(0) = \frac{a_m}{b_n}.$$

Es folgt

$$\text{ord}(f, \infty) = \text{ord}(f_0, 0) = n - m.$$

Dies ergibt:

- Im Fall $n > m$ hat f in ∞ eine Nullstelle der Ordnung $n - m$.
- Im Fall $n = m$ gilt $f(\infty) = \frac{a_m}{b_n}$.
- Im Fall $n < m$ hat f in ∞ eine Polstelle der Ordnung $m - n$.

Damit sind die Aussagen bewiesen. ■

SATZ. Ist f eine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion, so hat f nur endlich viele Null- und Polstellen und es gilt

$$\sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \text{ord}(f, z) = 0.$$

Mit Vielfachheiten gezählt hat also f genauso viele Null- wie Polstellen.

Beweis: Wir schreiben $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z)$ und $Q(z)$. Sei $\text{grad}(P(z)) = m$ und $\text{grad}(Q(z)) = n$. Wir faktorisieren

$$P(z) = a_m(z - a_1)^{m_1} \dots (z - a_r)^{m_r} \text{ und } Q(z) = b_n(z - b_1)^{n_1} \dots (z - b_s)^{n_s}$$

mit paarweise verschiedenen $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s$ und

$$m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad m_1 + \dots + m_r = m \quad \text{und} \quad n_1 + \dots + n_s = n.$$

Es gilt:

- Ist $z = a_j$, so gilt $\text{ord}(f, a_j) = m_j$ (f hat in a_j eine Nullstelle der Ordnung m_j).
- Ist $z = b_k$, so gilt $\text{ord}(f, b_k) = -n_k$ (f hat in b_k einen Pol der Ordnung n_k).
- Ist $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s\}$, so ist $\text{ord}(f, z) = 0$.
- Für $z = \infty$ gilt nach dem letzten Lemma $\text{ord}(f, \infty) = n - m$.

Man sieht, dass es nur endlich viele Pol- und Nullstellen gibt. Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \text{ord}(f, z) &= \sum_{j=1}^r \text{ord}(f, a_j) + \sum_{k=1}^s \text{ord}(f, b_k) + \text{ord}(f, \infty) = \\ &= \sum_{j=1}^r m_j + \sum_{k=1}^s (-n_k) + (n - m) = \sum_{j=1}^r m_j - m + n - \sum_{k=1}^s n_k = 0. \end{aligned}$$

Dies wollten wir zeigen. ■

LEMMA. Sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z), Q(z)$. Dann hat f mit Vielfachheit gezählt genau

$$\max(\text{grad}(P(z)), \text{grad}(Q(z)))$$

Polstellen.

Beweis: Wir verwenden die Bezeichnungen des vorangegangenen Beweises und fragen, wieviele Polstellen f hat. Natürlich sind in $b_1, \dots, b_s$ Polstellen, mit Vielfachheit gezählt

$$\sum_{k=1}^s n_k = n.$$

Nun betrachten wir ∞ :

- Ist $n \geq m$, so hat f keinen Pol in ∞ . Mit Vielfachheit gezählt gibt es also n Polstellen.
- Ist $n < m$, so hat f in ∞ einen Pol der Ordnung $m - n$. Insgesamt gibt es - mit Vielfachheit gezählt - dann

$$n + (m - n) = m$$

Polstellen.

Dies kann man so zusammenfassen: Mit Vielfachheit gezählt gibt es genau $\max(m, n)$ Polstellen. ■

DEFINITION. Ist $f(z)$ eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$, so kann man schreiben $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z), Q(z)$. Der **Grad** von f wird definiert als

$$\text{grad}(f) = \max(\text{grad}(P(z)), \text{grad}(Q(z))).$$

Das vorangegangene Lemma kann man dann auch so formulieren: Eine nichtkonstante meromorphe Funktion f auf $\widehat{\mathbb{C}}$ hat mit Vielfachheit gezählt genau $\text{grad}(f)$ Polstellen.

Sprechweisen: Sei f eine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ meromorphe Funktion und $z_0, w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Gilt $f(z_0) = w_0$, so sagen wir, f nimmt in z_0 den Wert w_0 an.

- Ist $w_0 \in \mathbb{C}$ so sagen wir, f nimmt in z_0 den Wert w_0 mit Vielfachheit $\text{ord}(f(z) - w_0, z_0)$ an. (Im Fall $z_0 = \infty$ ist $\text{ord}(f(z) - w_0, \infty) = \text{ord}(f(\frac{1}{t}) - w_0, 0)$.)
- Ist $w_0 = \infty$, so hat f in z_0 einen Pol. Wir sagen, f nimmt in z_0 den Wert w_0 mit Vielfachheit $-\text{ord}(f, z_0)$ an. (Im Fall $z_0 = \infty$ ist $-\text{ord}(f, \infty) = -\text{ord}(f(\frac{1}{t}), 0)$.)
- Die Vielfachheit, mit der die Funktion $f(z)$ den Wert $f(z_0)$ in $z = z_0$ annimmt, schreiben wir auch als $e(f(z), z_0)$. Dann ist also

$$e(f(z), z_0) = \begin{cases} \text{ord}(f(z) - f(z_0), z_0) & \text{für } f(z_0) \in \mathbb{C}, \\ -\text{ord}(f(z), z_0) & \text{für } f(z_0) = \infty. \end{cases}$$

Es ist $e(f(z), z_0) \in \mathbb{N}$.

SATZ. Ist f eine auf $\widehat{\mathbb{C}}$ nichtkonstante meromorphe Funktion, so nimmt f jeden Wert $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit Vielfachheit gezählt genau $\text{grad}(f)$ mal an, also

$$\sum_{z_0 \in f^{-1}(w_0)} e(f(z), z_0) = \text{grad}(f) \text{ für alle } w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}.$$

Insbesondere gilt:

$$1 \leq |f^{-1}(w_0)| \leq \text{grad}(f) \text{ für alle } w_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$$

und

$$1 \leq e(f(z), z_0) \leq \text{grad}(f) \text{ für alle } z_0 \in \mathbb{C}.$$

Beweis: Für $w_0 = \infty$ haben wir die Aussage bereits bewiesen. Sei nun $w_0 \in \mathbb{C}$. Dann haben $f(z)$ und $f(z) - w_0$ die gleichen Polstellen. Da $f(z) - w_0$ nach einem früheren Satz gleichviele Null- wie Polstellen hat, also

$$\sum_{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}} \text{ord}(f(z) - w_0, z_0) = 0,$$

folgt

$$\begin{aligned}
 \sum_{z_0 \in f^{-1}(w_0)} \operatorname{ord}(f(z) - w_0, z_0) &= \sum_{\substack{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \\ \operatorname{ord}(f(z) - w_0) > 0}} \operatorname{ord}(f(z) - w_0, z_0) = \\
 &= - \sum_{\substack{z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \\ \operatorname{ord}(f(z) - w_0) < 0}} \operatorname{ord}(f(z) - w_0, z_0) = \\
 &= - \sum_{z_0 \in f^{-1}(\infty)} \operatorname{ord}(f(z) - w_0, z_0) = \\
 &= \sum_{z_0 \in f^{-1}(\infty)} (-\operatorname{ord}(f(z), z_0)) = \max(\operatorname{grad}(P(z)), \operatorname{grad}(Q(z))) = \\
 &= \operatorname{grad}(f),
 \end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Beispiel: Wir betrachten $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2-2}$ als Funktion $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Es ist $f(\infty) = 1$. In $\pm\sqrt{2}$ hat f Pole 1. Ordnung, also

$$f^{-1}(\infty) = \{\pm\sqrt{2}\}.$$

Für $w \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = w \iff \frac{z^2-1}{z^2-2} = w \iff z^2-1 = wz^2-2w \iff (1-w)z^2 = 1-2w.$$

Wir unterscheiden ein paar Fälle:

- Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{1, \frac{1}{2}\}$ gilt

$$f(z) = w \iff z^2 = \frac{1-2w}{1-w}.$$

Wegen $\frac{1-2w}{1-w} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gleichungen 2 Lösungen:

$$f^{-1}(w) = \{\pm\sqrt{\frac{1-2w}{1-w}}\} \quad \text{und} \quad |f^{-1}(w)| = 2.$$

- Für $w = 1$ gilt:

$$f(z) = 1 \iff 0z^2 = -1,$$

was keine Lösung besitzt. Da aber $f(\infty) = 1$ gilt, folgt

$$f^{-1}(1) = \{\infty\} \quad \text{und} \quad |f^{-1}(1)| = 1.$$

Mit welcher Vielfachheit wird der Wert 1 in ∞ angenommen? Es ist

$$\operatorname{ord}(f(z) - 1, \infty) = \operatorname{ord}(f_0(t) - 1, 0).$$

Nun ist

$$f_0(t) = \frac{\frac{1}{t^2} - 1}{\frac{1}{t^2} - 2} = \frac{1-t^2}{1-2t^2} \quad \text{und} \quad f_0(t) - 1 = \frac{(1-t^2) - (1-2t^2)}{1-2t^2} = \frac{t^2}{1-2t^2}.$$

Also gilt

$$\operatorname{ord}(f_0(t) - 1, 0) = 2, \quad \text{und damit} \quad e(f(z), \infty) = \operatorname{ord}(f(z) - 1, \infty) = 2.$$

- Für $w = \frac{1}{2}$ gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2}z^2 = 0 \iff z = 0.$$

Daher ist

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \{0\}.$$

Mit welcher Vielfachheit wird der Wert $\frac{1}{2}$ in $z = 0$ angenommen? Es ist

$$f(z) - \frac{1}{2} = \frac{z^2-1}{z^2-2} - \frac{1}{2} = \frac{2(z^2-1) - (z^2-2)}{2(z^2-2)} = \frac{z^2}{2(z^2-2)},$$

also

$$e(f(z), 0) = \text{ord}\left(f(z) - \frac{1}{2}, 0\right) = 2.$$

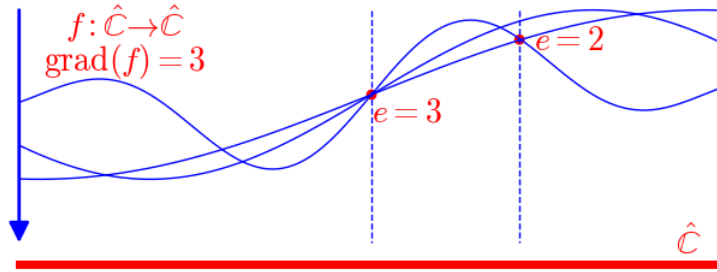
Wir haben also für $w \in \hat{\mathbb{C}}$

$$|f^{-1}(w)| = \begin{cases} 2 & \text{für } w \notin \{0, \frac{1}{2}\}, \\ 1 & \text{für } w \in \{0, \frac{1}{2}\}. \end{cases}$$

Für 2 Stellen gilt also $|f^{-1}(w)| < \text{grad}(f)$, für den Rest gilt $|f^{-1}(w)| = \text{grad}(f)$. Dieses Verhalten wird in der folgenden Formel noch genauer beschrieben.

3. Verzweigung - Die Riemann-Hurwitz-Formel für $\hat{\mathbb{C}}$

DEFINITION. Sei $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine nichtkonstante rationale Funktion. Ein Punkt $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ heißt **Verzweigungspunkt**, wenn $f(z)$ in z_0 den Wert $f(z_0)$ mit Vielfachheit > 1 annimmt, d.h. wenn gilt $e(f(z), z_0) > 1$. ($e(f(z), z_0)$ wird auch **Verzweigungsindex** von $f(z)$ in z_0 genannt.)



LEMMA. Sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine nichtkonstante rationale Funktion auf $\hat{\mathbb{C}}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z), Q(z)$. Dann gilt $P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) \neq 0$ und

$$e(f(z), a) = \begin{cases} 1 + \text{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) & \text{für } a \in \mathbb{C}, \\ 2 \text{grad}(f) - 1 - \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) & \text{für } a = \infty. \end{cases}$$

Im Fall $\text{grad}(P(z)) \neq \text{grad}(Q(z))$ gilt

$$e(f(z), \infty) = |\text{grad}(P(z)) - \text{grad}(Q(z))| \quad \text{für } \text{grad}(P(z)) \neq \text{grad}(Q(z)).$$

Beweis:

- (1) Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) \in \mathbb{C}$. Dann nimmt f den Wert $f(a)$ in a mit Vielfachheit $\text{ord}(f(z) - f(a), a)$ an. Sei $v = \text{ord}(f(z) - f(a), a)$. Es ist $v \in \mathbb{N}$. Dann können wir um $z = a$ schreiben

$$f(z) - f(a) = (z - a)^v \cdot g(z) \quad \text{mit } g(a) \neq 0,$$

wo $g(z)$ eine in $z = a$ holomorphe Funktion ist. Es ist

$$f'(z) = v(z - a)^{v-1} \cdot g(z) + (z - a)^v g'(z),$$

also (wegen $v \geq 1$)

$$\text{ord}(f(z) - f(a), a) = v = 1 + (v - 1) = 1 + \text{ord}(f'(z), a).$$

Nun ist

$$f'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2}.$$

Da f in $z = a$ definiert ist, ist $Q(a) \neq 0$, und es folgt

$$\text{ord}(f(z) - f(a), a) = 1 + \text{ord}(f'(z), a) = 1 + \text{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a).$$

- (2) Ist $a \in \mathbb{C}$ mit $f(a) = \infty$ und ist $v = e(f(z), a)$, so hat $f(z)$ in a einen Pol der Ordnung v . Wir können also schreiben $Q(z) = (z - a)^v \cdot R(z)$ mit $R(a) \neq 0$ und $P(a) \neq 0$. Es ist

$$\begin{aligned} P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) &= P'(z)(z - a)^v R(z) - P(z) \cdot (v(z - a)^{v-1} R(z) + (z - a)^v R'(z)) = \\ &= (z - a)^{v-1} \cdot v P(z) R(z) + (z - a)^v (P'(z) R(z) - P(z) R'(z)), \end{aligned}$$

also

$$\text{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) = v - 1,$$

und damit

$$e(f(z), \infty) = v = 1 + \text{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)).$$

- (3) Zur Vorbereitung für die nächsten Schritte setzen wir

$$P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j \quad \text{und} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k.$$

Es ist

$$P(z) = a_m z^m + \dots, \quad P'(z) = m a_m z^{m-1} + \dots, \quad Q(z) = b_n z^n + \dots, \quad Q'(z) = n b_n z^{n-1} + \dots,$$

also

$$\begin{aligned} P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) &= (m a_m z^{m-1} + \dots)(b_n z^n + \dots) - (a_m z^m + \dots)(n b_n z^{n-1} + \dots) = \\ &= (m - n) a_m b_n z^{m+n-1} + \dots \end{aligned}$$

Im Fall $m \neq n$ erhält man

$$\text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = m + n - 1.$$

- (4) Was passiert für $a = \infty$ im Fall $m > n$? Dann ist $\text{grad}(f) = m$ und $f(z)$ hat in ∞ einen Pol der Ordnung $m - n$. Die Vielfachheit von f in ∞ ist $m - n$, also

$$e(f(z), \infty) = m - n.$$

Mit $\text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = m + n - 1$ folgt

$$e(f(z), \infty) + \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = 2m - 1 = 2\text{grad}(f) - 1,$$

also

$$e(f(z), \infty) = 2\text{grad}(f) - 1 - \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)).$$

- (5) Was passiert für $a = \infty$ im Fall $n > m$? Dann hat $f(z)$ in ∞ eine Nullstelle der Ordnung $n - m$, also

$$e(f(z), \infty) = n - m.$$

Mit $\text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = m + n - 1$ und $\text{grad}(f) = n$ folgt

$$e(f(z), \infty) + \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = 2n - 1 = 2\text{grad}(f) - 1,$$

also

$$e(f(z), \infty) = 2\text{grad}(f) - 1 - \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)).$$

- (6) Was passiert in $a = \infty$ im Fall $m = n$. Dann ist $f(\infty) = \frac{a_m}{b_m}$. Nach Definition nimmt $f(z)$ den Wert $f(\infty)$ in ∞ mit Vielfachheit

$$e(f(z), \infty) = \text{ord}\left(f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{a_m}{b_m}, 0\right)$$

an. Es ist

$$P\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{a_m + a_{m-1}t + \dots + a_0 t^m}{t^m}, \quad Q\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{b_m + b_{m-1}t + \dots + b_0 t^m}{t^m},$$

also

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{a_m}{b_m} &= \frac{a_m + a_{m-1}t + \cdots + a_0t^m}{b_m + b_{m-1}t + \cdots + b_0t^m} - \frac{a_m}{b_m} = \\ &= \frac{b_m(a_m + a_{m-1}t + \cdots + a_0t^m) - a_m(b_m + b_{m-1}t + \cdots + b_0t^m)}{b_m + b_{m-1}t + \cdots + b_0t^m} = \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m (b_m a_{m-j} - a_m b_{m-j}) t^j}{b_m + b_{m-1}t + \cdots + b_0t^m}. \end{aligned}$$

Ist $e = \text{ord}\left(f\left(\frac{1}{t}\right) - \frac{a_m}{b_m}\right)$, so gilt also

$$b_m a_{m-j} = a_m b_{m-j} \text{ für } j = 0, \dots, e-1 \quad \text{und} \quad b_m a_{m-e} \neq a_m b_{m-e}.$$

Anders geschrieben:

$$b_m a_j = a_m b_j \text{ für } j = m-e+1, \dots, m \quad \text{und} \quad b_m a_{m-e} \neq a_m b_{m-e}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{j=0}^m b_j z^j = \sum_{j=0}^{m-e} b_j z^j + \sum_{j=m-e+1}^m b_j z^j = \sum_{j=0}^{m-e} b_j z^j + \frac{b_m}{a_m} \sum_{j=m-e+1}^m a_j z^j = \\ &= \sum_{j=0}^{m-e} b_j z^j + \frac{b_m}{a_m} \left(P(z) - \sum_{j=0}^{m-e} a_j z^j \right) = \frac{b_m}{a_m} P(z) + \sum_{j=0}^{m-e} \left(b_j - \frac{b_m}{a_m} a_j \right). \end{aligned}$$

Definieren wir

$$R(z) = \sum_{j=0}^{m-e} \left(b_j - \frac{b_m}{a_m} a_j \right),$$

so gilt $\text{grad}(R(z)) = m-e$ wegen $b_m a_{m-e} \neq a_m b_{m-e}$. Wir haben damit

$$Q(z) = \frac{b_m}{a_m} P(z) + R(z).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) &= P'(z) \left(\frac{b_m}{a_m} P(z) + R(z) \right) - P(z) \left(\frac{b_m}{a_m} P'(z) + R'(z) \right) = \\ &= P'(z)R(z) - P(z)R'(z). \end{aligned}$$

Da die Polynome $P(z)$ und $R(z)$ unterschiedlichen Grad haben, sieht man wie oben $\text{grad}(P'(z)R(z) - P(z)Q'(z)) = m + (m-e) - 1$, und damit

$$\begin{aligned} \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) &= \text{grad}(P'(z)R(z) - P(z)R'(z)) = \\ &= m + (m-e) - 1 = 2m - e - 1 = 2\text{grad}(f) - e - 1. \end{aligned}$$

Also gilt

$$e(f(z), \infty) = e = 2\text{grad}(f) - 1 - \text{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)).$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Beispiele: Wir bestimmen bei den schon betrachteten Beispielen die Verzweigungspunkte. Dazu schreiben wir $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z)$, $Q(z)$ und nutzen die Formel

$$e(f, a) = 1 + \text{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) \text{ für } a \in \mathbb{C}.$$

- (1) $f(z) = 2 + \frac{1}{z-3} = \frac{2z-5}{z-3}$ hat keine Verzweigungspunkte, da $f(z)$ Grad 1 hat und immer $1 \leq e(f, a) \leq \text{grad}(f)$ gilt.
- (2) $f(z) = z^2 + 1$. Wir schreiben $P(z) = z^2 + 1$, $Q(z) = 1$ und bilden

$$P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) = 2z.$$

Daher ist 0 ein Verzweigungspunkt mit $e(f, 0) = 2$. Wegen $\text{grad}(P) \neq \text{grad}(Q)$ erhalten wir $e(f, \infty) = 2$. Die Verzweigungspunkte sind also 0 und ∞ .

- (3) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2-2}$. Wir setzen $P(z) = z^2 - 1$ und $Q(z) = z^2 - 2$. Es ist

$$P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) = -2z.$$

Also ist 0 Verzweigungspunkt mit $e(f, 0) = 2$. Dies sieht man auch an der Darstellung

$$f(z) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(z^2 - 2)} \cdot z^2.$$

Es ist $f(\infty) = 1$ und

$$f(z) - 1 = \frac{1}{z^2 - 2}.$$

Hieran sieht man, dass ∞ ein Verzweigungspunkt ist mit $e(f, \infty) = 2$.

- (4) $f(z) = \frac{z^2+2z+3}{3z^2+2z+1}$. Wir setzen $P(z) = z^2 + 2z + 3$, $Q(z) = 3z^2 + 2z + 1$ und bilden

$$P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z) = -4(z^2 + 4z + 1) = -4(z - (-2 + \sqrt{3}))(z - (-2 - \sqrt{3})).$$

Die Verzweigungspunkte sind also $-2 \pm \sqrt{3}$, jeweils mit Verzweigungsindex 2. Wegen $f(\infty) = \frac{1}{3}$ und

$$f(z) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{z+2}{3z^2+2z+1}$$

gilt $e(f, \infty) = 1$. (Es ist $f^{-1}(\frac{1}{3}) = \{-2, \infty\}$).

SATZ (Riemann-Hurwitz-Formel für $\widehat{\mathbb{C}}$). Sei f eine nichtkonstante meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$.

- (1) f besitzt nur endlich viele Verzweigungspunkte, d.h. Punkte a mit $e(f(z), a) \geq 2$. Es gilt

$$\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} (e(f(z), a) - 1) = 2 \operatorname{grad}(f) - 2.$$

- (2) Für $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt $|f^{-1}(w)| = \operatorname{grad}(f)$ genau dann, wenn $f^{-1}(w)$ keinen Verzweigungspunkt enthält. Enthält $f^{-1}(w)$ einen Verzweigungspunkt, so gilt $|f^{-1}(w)| < \operatorname{grad}(f)$.

- (3) Es gilt

$$\sum_{w \in \widehat{\mathbb{C}}} (\operatorname{grad}(f) - |f^{-1}(w)|) = 2 \operatorname{grad}(f) - 2.$$

Beweis:

- (1) Nach dem vorangegangenen Lemma gilt

$$e(f(z), a) = \begin{cases} 1 + \operatorname{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) & \text{für } a \in \mathbb{C}, \\ 2 \operatorname{grad}(f) - 1 - \operatorname{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) & \text{für } a = \infty, \end{cases}$$

also

$$e(f(z), a) - 1 = \begin{cases} \operatorname{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) & \text{für } a \in \mathbb{C}, \\ 2 \operatorname{grad}(f) - 2 - \operatorname{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) & \text{für } a = \infty. \end{cases}$$

Da $P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)$ nur endlich viele Nullstellen hat, gibt es nur endlich viele Verzweigungspunkte und es gilt

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) = \operatorname{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} (e(f(z), a) - 1) &= \sum_{a \in \mathbb{C}} (e(f(z), a) - 1) + (e(f(z), \infty) - 1) = \\ &= \sum_{a \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z), a) + \\ &\quad + 2 \operatorname{grad}(f) - 2 - \operatorname{grad}(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)) = \\ &= 2 \operatorname{grad}(f) - 2. \end{aligned}$$

(2) Für $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt

$$\sum_{a \in f^{-1}(w)} e(f(z), a) = \text{grad}(f).$$

Gibt es ein $a \in f^{-1}(w)$ mit $e(f(z), a) \geq 2$, so ist

$$\text{grad}(f) = \sum_{a \in f^{-1}(w)} e(f(z), a) > \sum_{a \in f^{-1}(w)} 1 = |f^{-1}(w)|.$$

Liegt kein Verzweigungspunkt in $f^{-1}(w)$, so folgt entsprechend $\text{grad}(f) = |f^{-1}(w)|$.

(3) Für $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt

$$\text{grad}(f) - |f^{-1}(w)| = \sum_{a \in f^{-1}(w)} (e(f(z), a) - 1),$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{w \in \widehat{\mathbb{C}}} (\text{grad}(f) - |f^{-1}(w)|) &= \sum_{w \in \widehat{\mathbb{C}}} \left(\sum_{a \in f^{-1}(w)} (e(f(z), a) - 1) \right) = \\ &= \sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} (e(f(z), a) - 1) = 2\text{grad}(f) - 2. \end{aligned}$$

Dies wollten wir zeigen. ■

Bemerkung: Im Fall $\text{grad}(f) = 3$ liefert die Riemann-Hurwitz-Formel

$$\sum_{a \in \widehat{\mathbb{C}}} (e(f(z), a) - 1) = 4,$$

sodass es folgende Möglichkeiten für die Verzweigungspunkte gibt ($1 \leq e(f(z), a) \leq 3$):

- 4 Verzweigungspunkte mit $e = 2$.
- 2 Verzweigungspunkte mit $e = 2$ und 1 Verzweigungspunkt mit $e = 3$.
- 2 Verzweigungspunkte mit $e = 3$.

Als Anwendung der Riemann-Hurwitz-Formel zeigen wir, dass die Fermat-Gleichung $x^n + y^n = z^n$ für $n \geq 3$ keine nichttriviale Lösung mit komplexen Polynomen hat.

SATZ. Seien $a(z), b(z), c(z)$ paarweise teilerfremde Polynome aus $\mathbb{C}[z]$ mit $\max(\text{grad}(a), \text{grad}(b), \text{grad}(c)) \geq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$a(z)^n + b(z)^n = c(z)^n.$$

Dann folgt $n \leq 2$.

Beweis: Nach eventueller Vertauschung von a, b, c und Multiplikation mit $e^{\frac{\pi i}{n}}$ (Es ist $e^{\frac{\pi i}{n}} a(z))^n = -a(z)^n$.) können wir o.E.

$$\text{grad}(a) = \text{grad}(c) \quad \text{und} \quad \text{grad}(b) \leq \text{grad}(c)$$

annehmen. Durch

$$f(z) = \frac{c(z)^n}{a(z)^n}$$

wird eine nichtkonstant meromorphe Abbildung $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert mit $\text{grad}(f) = n \text{grad}(c)$. Wegen $\text{grad}(a) = \text{grad}(c)$ ist $f(\infty) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es ist

$$f^{-1}(0) = c^{-1}(0), \quad \text{also} \quad |f^{-1}(0)| \leq \text{grad}(c),$$

und damit

$$\text{grad}(f) - |f^{-1}(0)| \geq n \text{grad}(c) - \text{grad}(c) = (n-1) \text{grad}(c).$$

Es ist

$$f^{-1}(\infty) = a^{-1}(0), \quad \text{also} \quad |f^{-1}(\infty)| \leq \text{grad}(a) = \text{grad}(c),$$

und damit

$$\text{grad}(f) - |f^{-1}(\infty)| \geq n \text{grad}(c) - \text{grad}(c) = (n-1) \text{grad}(c).$$

Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z) = \frac{c(z)^n}{a(z)^n} = \frac{a(z)^n + b(z)^n}{a(z)^n} = 1 + \frac{b(z)^n}{a(z)^n}, \quad \text{also} \quad f(z) - 1 = \frac{b(z)^n}{a(z)^n}.$$

Es folgt

$$f^{-1}(1) \cap \mathbb{C} = b^{-1}(0), \quad \text{also} \quad |f^{-1}(1)| \leq 1 + |b^{-1}(0)| \leq 1 + \text{grad}(c),$$

und damit

$$\text{grad}(f) - |f^{-1}(1)| \geq n\text{grad}(c) - 1 - \text{grad}(c) = (n-1)\text{grad}(c) - 1.$$

Die Riemann-Hurwitz-Formel besagt

$$\sum_{w \in \hat{\mathbb{C}}} (\text{grad}(f) - |f^{-1}(w)|) = 2\text{grad}(f) - 2.$$

Insbesondere gilt dann

$$\sum_{w \in \{0, \infty, 1\}} (\text{grad}(f) - |f^{-1}(w)|) \leq 2\text{grad}(f) - 2.$$

Wir setzen die obigen Abschätzungen ein und erhalten:

$$(n-1)\text{grad}(c) + (n-1)\text{grad}(c) + ((n-1)\text{grad}(c) - 1) \leq 2n\text{grad}(c) - 2.$$

Es folgt

$$3(n-1)\text{grad}(c) - 1 \leq 2n\text{grad}(c) - 2, \quad \text{also} \quad n\text{grad}(c) \leq 3\text{grad}(c) - 1,$$

und damit

$$n \leq 3 - \frac{1}{\text{grad}(c)}.$$

Dies liefert aber sofort $n < 3$, und damit $n \geq 2$, wie behauptet. ■

4. Die Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

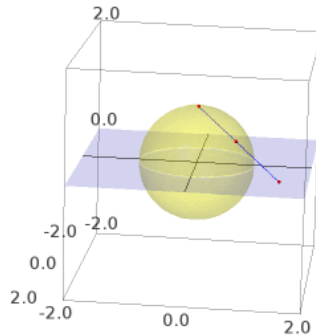
Wir wählen in $\mathbb{R}^3$ die Koordinaten x_1, x_2, x_3 und identifizieren $\mathbb{C}$ mit der (x_1, x_2) -Ebene durch die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad z = x + iy \mapsto (x, y, 0).$$

Wir betrachten die 2-Sphäre

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \text{ mit dem „Nordpol“ } N = (0, 0, 1).$$

Die Geraden durch $N = (0, 0, 1)$ liefern (durch den Schnitt mit $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{C}$) eine Bijektion zwischen den Punkten von $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und den Punkten von $\mathbb{C}$ (stereographische Projektion).



Wir beschreiben die Zuordnung genauer:

- (1) Sei $P = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, also $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ und $x_3 < 1$. Die Gerade durch P und N lässt sich durch

$$(1-t)(0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3) = (tx_1, tx_2, 1-t+tx_3) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

parametrisieren. Der Schnitt mit der (x_1, x_2) -Ebene ergibt sich aus der Gleichung $1-t+tx_3 = 0$, was $t = \frac{1}{1-x_3}$ und damit den Schnittpunkt

$$\left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}, 0\right)$$

ergibt. Wir definieren daher (stereographische Projektion)

$$\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + x_2 i}{1 - x_3}.$$

- (2) Sei $(x, y, 0)$ ein Punkt der (x_1, x_2) -Ebene. Die Gerade durch $(x, y, 0)$ und $(0, 0, 1)$ wird durch

$$(1-t)(0, 0, 1) + t(x, y, 0) = (tx, ty, 1-t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

parametrisiert. Die Schnittpunkte der Geraden mit der Kugel erhält man aus der Gleichung

$$1 = (tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2 = 1 + t \left(t(x^2 + y^2 + 1) - 2 \right).$$

$t = 0$ liefert den „Nordpol“, den anderen Schnittpunkt erhält man für $t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$:

$$\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 1}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

Wir definieren also

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \quad x + yi \mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right).$$

Dies lässt sich auch in der Form

$$\psi(z) = \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

schreiben.

- (3) Offensichtlich sind die Abbildungen ϕ und ψ stetig und invers zueinander. Setzen wir die Abbildungen ϕ und ψ durch

$$\phi(N) = \infty \quad \text{und} \quad \psi(\infty) = N,$$

so erhalten wir stetige Bijektionen

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{und} \quad \psi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

die invers zueinander sind. Man nennt $\widehat{\mathbb{C}}$ daher auch **Riemannsche Zahlenkugel**.

DEFINITION. Sei $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ und $N = (0, 0, 1)$. Durch

$$\phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1 + x_2 i}{1 - x_3}$$

und

$$\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \quad x + yi \mapsto \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right)$$

bzw.

$$z \mapsto \left(\frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{2\operatorname{Im}(z)}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

werden zueinander inverse stetige Abbildungen definiert, die durch

$$\phi(N) = \infty \quad \text{und} \quad \psi(\infty) = N$$

zu stetigen Bijektionen

$$\phi : \mathbb{S}^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \quad \text{und} \quad \psi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}^2$$

fortgesetzt werden. ϕ heißt **stereographische Projektion**, $\mathbb{S}^2$ dann **Riemannsche Zahlenkugel**.

Verwendet man in $\mathbb{R}^3$ den üblichen, über die Norm $\|\cdot\|$ definierten Abstand, also $\|(x_1, x_2, x_3) - (y_1, y_2, y_3)\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$, so kann man auch den Abstand $\|\psi(z_1) - \psi(z_2)\|$ betrachten. Man erhält folgende Formeln:

LEMMA. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|\psi(z_1) - \psi(z_2)\| = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}}$$

und für $z \in \mathbb{C}$

$$\|\psi(z) - \psi(\infty)\| = \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}.$$

Beweis: Wir schreiben $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z = x + iy$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \|\psi(z_1) - \psi(z_2)\|^2 &= \|\psi(x_1 + iy_1) - \psi(x_2 + iy_2)\|^2 = \\ &= \left\| \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{2x_2}{x_2^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{2y_2}{x_2^2 + y_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + y_1^2 - 1}{x_1^2 + y_1^2 + 1} - \frac{x_2^2 + y_2^2 - 1}{x_2^2 + y_2^2 + 1} \right) \right\|^2 \stackrel{\text{SAGE}}{=} \\ &= \frac{4(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2)}{(x_1^2 + y_1^2 + 1)(x_2^2 + y_2^2 + 1)} = \frac{4((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)}{(x_1^2 + y_1^2 + 1)(x_2^2 + y_2^2 + 1)} = \\ &= \frac{4|z_1 - z_2|^2}{(|z_1|^2 + 1)(|z_2|^2 + 1)}, \\ \|\psi(x + iy) - \psi(\infty)\|^2 &= \left\| \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} - 0, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} - 0, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} - 1 \right) \right\|^2 = \\ &= \left\| \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{-2}{x^2 + y^2 + 1} \right) \right\|^2 \stackrel{\text{SAGE}}{=} \frac{4}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{4}{|z|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung. ■

Schneidet man im $\mathbb{R}^3$ eine Kugel mit einer Ebene, so ist der Schnitt leer, ein Punkt oder ein Kreis auf der Kugel. Im folgenden Lemma wird betrachtet, was im Fall der Riemannschen Zahlenkugel aus den Kreisen unter der stereographischen Projektion passiert.

LEMMA. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\}.$$

Dann gilt

$$\psi^{-1}(E) = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\} & \text{für } c = d, \\ \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{a}{d-c}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{d-c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(d-c)^2} \right\} & \text{für } c \neq d. \end{cases}$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \psi(x, y) \in E &\iff a \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} + b \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} + c \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = d \iff \\ &\iff 2ax + 2by + c(x^2 + y^2 - 1) = d(x^2 + y^2 + 1) \iff \\ &\iff 2ax + 2by + (c - d)(x^2 + y^2) = d + c \end{aligned}$$

Im Fall $d = c$ können wir so fortfahren:

$$\psi(x, y) \in E \iff 2ax + 2by = 2c \iff ax + by = c.$$

Im Fall $d \neq c$ gilt:

$$\begin{aligned} \psi(x, y) \in E &\iff 2ax + 2by + (c - d)(x^2 + y^2) = d + c \iff \\ &\iff \frac{2a}{c - d}x + \frac{2b}{c - d}y + x^2 + y^2 = \frac{c + d}{c - d} \iff \\ &\iff \left(x + \frac{a}{c - d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c - d}\right)^2 = \frac{c + d}{c - d} + \frac{a^2 + b^2}{(c - d)^2} \iff \\ &\iff \left(x + \frac{a}{c - d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c - d}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{(c - d)^2} \end{aligned}$$

Möbius-Transformationen

1. Einführung

Eine **Möbius-Transformation** (oder **fractional linear map** oder **fractional linear transformation**) ist eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ vom Grad 1, hat also die Gestalt

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

mit teilerfremden Polynomen $az + b$ und $cz + d$ mit $\max(\text{grad}(az + b), \text{grad}(cz + d)) = 1$.

SATZ. *Eigenschaften von Möbius-Transformationen:*

- (1) Für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gilt:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ist Möbius-Transformation} \iff ad - bc \neq 0.$$

- (2) Eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist eine bijektive Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{und} \quad f(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{im Fall} \quad c \neq 0$$

und

$$f(\infty) = \infty \quad \text{im Fall} \quad c = 0.$$

- (3) Für eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ist die Umkehrabbildung ebenfalls eine Möbius-Transformation, die durch

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$$

gegeben ist.

- (4) Sind $f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ und $f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ zwei Möbius-Transformationen, so ist auch $f_1 \circ f_2$ eine Möbius-Transformation:

$$(f_1 \circ f_2)(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Beweis:

- (1) $\implies$ Ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbius-Transformation, so sind die Polynome $az + b$ und $cz + d$ teilerfremd, also gilt insbesondere $(c, d) \neq 0$. Wäre $ad - bc = 0$, so wären wegen $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc = 0$ die Vektoren (a, b) und (c, d) linear abhängig, es gäbe ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $(a, b) = \lambda(c, d)$, also $a = \lambda c$, $b = \lambda d$, und damit $az + b = \lambda(cz + d)$, die Polynome $az + b$ und $cz + d$ wären nicht teilerfremd. Dies geht nicht, also folgt $ad - bc \neq 0$.

$\Leftarrow$ Aus $ad - bc \neq 0$ folgt natürlich $(c, d) \neq (0, 0)$, also ist $cz + d$ ein von 0 verschiedenes Polynom, die Funktion $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ also definiert. Mit der Beziehung

$$-c(az + b) + a(cz + d) = ad - bc \neq 0$$

sieht man, dass $az + b$ und $cz + d$ teilerfremd sind. Daher ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ nach Definition eine Möbius-Transformation.

- (2) Als rationale Funktion vom Grad 1 ist eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine bijektive Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$.

(a) **Fall** $c \neq 0$: Dann ist

$$f(z) = \frac{az+b}{c(z - (-\frac{d}{c}))},$$

in $z = -\frac{d}{c}$ hat f einen Pol 1. Ordnung und es gilt

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} f(z) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \frac{a}{c}.$$

Das können wir auch in der Form

$$f(-\frac{d}{c}) = \infty \quad \text{und} \quad f(\infty) = \frac{a}{c}$$

schreiben.

- (b) **Fall** $c = 0$: Dann ist $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty,$$

was wir auch in der Form

$$f(\infty) = \infty$$

schreiben.

- (3) Da eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine bijektive Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ist, existiert f^{-1} . Mit den Umformungen

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{az+b}{cz+d} &\iff (cz+d)f(z) = az+b &\iff df(z) - b = az - czf(z) &\iff \\ &\iff z \cdot (-cf(z) + a) = df(z) - b &\iff z = \frac{d \cdot f(z) - b}{-c \cdot f(z) + a} \end{aligned}$$

sieht man, dass die Umkehrabbildung auch wieder eine Möbius-Transformation ist, und zwar

$$f^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

- (4) Sind $f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ und $f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ zwei Möbius-Transformationen, so ist

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2)(z) &= \frac{a_1 f_2(z) + b_1}{c_1 f_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2z+b_2) + b_1(c_2z+d_2)}{c_1(a_2z+b_2) + d_1(c_2z+d_2)} = \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}, \end{aligned}$$

$f_1 \circ f_2$ ist also wieder eine Möbius-Transformation. ■

Bemerkung: (Diese Bemerkung hätte man auch schon im Abschnitt über die Riemannsche Zahlenkugel machen können.) Für $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ gilt

$$f\left(\frac{z}{n}\right) = \frac{a\frac{z}{n} + b}{c\frac{z}{n} + d} = \frac{az + bn}{cz + dn}.$$

Für $n = 1$ erhält man einfach $f(z)$. Stellt man sich ∞ als $\frac{1}{0}$ vor, also $z = 1$, $n = 0$, so erhält man

$$f(\infty) = f\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{c \cdot 1 + d \cdot 0} = \frac{a}{c}.$$

Mathematisch exakter kann man dies machen, wenn man die projektive Gerade

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{(z : n) : z, n \in \mathbb{C}, (z, n) \neq (0, 0)\}$$

einführt.

Der vorangegangene Satz deutet schon an, dass die Möbius-Transformationen eine Gruppe bilden, die eng mit der Matrizengruppe $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ verwandt ist.

SATZ. Sei $\mathcal{M}$ die Menge der Möbius-Transformationen, also

$$\mathcal{M} = \left\{ f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \text{ mit } f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ und } ad-bc \neq 0 \right\}.$$

- (1) Mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung bildet $\mathcal{M}$ eine Gruppe.
 (2) Die Abbildung

$$\mu : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \right)$$

ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern

$$\mathrm{Kern}(\mu) = \{ \lambda \cdot \mathbf{1}_2 : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}.$$

(Mit dem Homomorphiesatz aus der Gruppentheorie kann man auch schreiben $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{M}$.)

- (3) Für $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $g(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$

$$f(z) = g(z) \iff \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Beweis:

- (1) Die meisten Gruppeneigenschaften folgen aus dem vorangegangenen Satz. Das neutrale Element ist die Identität $z \mapsto z$, die wegen $\frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$ auch eine Möbius-Transformation ist.
 (2) Wegen

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}$$

folgt die Homomorphieeigenschaft mit den Formeln aus dem letzten Satz. Die Surjektivität ist klar. Wir berechnen den Kern:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(\mu) &\iff \frac{az+b}{cz+d} = z \iff az+b = cz^2 + dz \iff \\ &\iff cz^2 + (d-a)z - b = 0 \iff b = 0, \quad c = 0, \quad d = a, \end{aligned}$$

also

$$\mathrm{Kern}(\mu) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \right\} = \{ \lambda \cdot \mathbf{1}_2 : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}.$$

- (3) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(z) = g(z) &\iff \mu \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) = \mu \left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) \iff \\ &\iff \mu \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) = \mu \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \iff \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathrm{Kern}(\mu) \iff \\ &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathbf{1}_2 \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \iff \\ &\iff \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^{-1} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Wir erinnern zunächst an folgende Sprechweise: Ein **Fixpunkt** einer Abbildung $f : M \rightarrow M$ ist ein Element $z \in M$ mit $f(z) = z$.

Bemerkung: Wir stellen hier ein paar einfache Möbius-Transformationen vor:

- Für $a \in \mathbb{C}$ ist

$$T_a(z) = z + a$$

die **Translation um** a . Im Fall $a = 0$ ist es die Identität. Es ist $T_a(\infty) = \infty$. Im Fall $a \neq 0$ hat T_a genau einen Fixpunkt, nämlich ∞ .

- Für $a \neq 0$ sei

$$M_a(z) = az$$

die **Multiplikation mit a** . Es ist $M_a(\infty) = \infty$. Es gibt genau 2 Fixpunkte, nämlich 0 und ∞ . Schreibt man

$$a = re^{i\varphi} \text{ mit } r > 0 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

so ist

$$M_a = M_r \circ M_{e^{i\varphi}}.$$

M_r ist die **Streckung um den Faktor r mit Zentrum 0**, $M_{e^{i\varphi}}$ die **Drehung um den Winkel φ mit Zentrum 0**.

- Die Abbildung

$$J(z) = \frac{1}{z}$$

wird auch **Inversion** genannt. Es ist

$$J(0) = \infty, \quad J(\infty) = 0, \quad J(\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$$

$$J(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus \{0\}.$$

Das folgende Lemma besagt, dass sich jede Möbius-Transformation als Produkt von obigen einfachen Möbius-Transformationen schreiben lässt.

LEMMA. Sei $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbius-Transformation. O.E. ist $c = 0$ oder $c = 1$. Dann ist

$$f = \begin{cases} T_{\frac{b}{d}} \circ M_{\frac{a}{d}} & \text{im Fall } c = 0, \\ T_a \circ M_{b-ad} \circ J \circ T_d & \text{im Fall } c = 1. \end{cases}$$

Beweis: Im Fall $c = 0$ ist

$$f(z) = \frac{az+b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = (T_{\frac{b}{d}} \circ M_{\frac{a}{d}})(z).$$

Im Fall $c \neq 0$ können wir o.E. $c = 1$ annehmen und dann schreiben

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{z+d} = \frac{a(z+d) - ad + b}{z+d} = a + \frac{b-ad}{z+d} = (T_a \circ M_{b-ad} \circ J \circ T_d)(z)$$

SATZ. Sind z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$ und w_1, w_2, w_3 drei verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$, so gibt es genau eine Möbius-Transformation f mit

$$f(z_1) = w_1, \quad f(z_2) = w_2, \quad f(z_3) = w_3.$$

Insbesondere ist eine Möbius-Transformation mit 3 Fixpunkten die Identität.

Beweis: Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ gilt.

(1) Für $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d} &\iff cw_j z_j + dw_j = az_j + b &\iff az_j + b - cw_j z_j - dw_j = 0 &\iff \\ &\iff \begin{pmatrix} z_j & 1 & -w_j z_j & -w_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

und damit

$$w_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d} \text{ für } j = 1, 2, 3 \iff \begin{pmatrix} z_1 & 1 & -w_1 z_1 & -w_1 \\ z_2 & 1 & -w_2 z_2 & -w_2 \\ z_3 & 1 & -w_3 z_3 & -w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

Da die 3×4 -Matrix höchstens Rang 3 hat, gibt es natürlich nichttriviale Lösungen. Wegen $w_1 \neq w_2$ ist $f(z)$ nicht konstant, also muss auch $ad - bc \neq 0$ gelten.

- (1') Was passiert, wenn z_j oder w_j der Punkt ∞ ist? Im Fall $z_j = \infty$, $w_j \in \mathbb{C}$ erhalten wir die Bedingung

$$w_j = \frac{a}{c}, \quad \text{also} \quad a - w_j c = 0, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Im Fall $z_j \in \mathbb{C}$, $w_j = \infty$ erhalten wir die Bedingung

$$cz_j + d = 0, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & z_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Für $z_j = \infty$, $w_j = \infty$ erhalten wir die Bedingung $c = 0$, also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Wir erhalten also wieder eine lineare Bedingung an a, b, c, d .

- (2) Im Fall $w_j = z_j$ für $j = 1, 2, 3$ erhalten wir

$$z_j = \frac{az_j + b}{cz_j + d} \text{ für } j = 1, 2, 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & 1 & -z_1^2 & -z_1 \\ z_2 & 1 & -z_2^2 & -z_2 \\ z_3 & 1 & -z_3^2 & -z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Es ist

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & -z_1^2 \\ z_2 & 1 & -z_2^2 \\ z_3 & 1 & -z_3^2 \end{vmatrix} = -(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3).$$

Sind z_1, z_2, z_3 paarweise verschieden, so ist der Rang der Matrix also 3, das Gleichungssystem hat eine 1-dimensionale Lösung, die zur Identität führt.

- (2') Im Fall $w_1 = z_1$ erhalten wir die Bedingung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ z_2 & 1 & -z_2^2 & -z_2 \\ z_3 & 1 & -z_3^2 & -z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0.$$

Wegen

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & -z_2^2 \\ z_3 & 1 & -z_3^2 \end{vmatrix} = z_2 - z_3$$

ist der Rang der Matrix 3, das Gleichungssystem hat eine 1-dimensionale Lösung, die wieder zur Identität führt.

- (3) Sind jetzt f, g Möbius-Transformationen mit

$$f(z_j) = g(z_j) = w_j \text{ für } j = 1, 2, 3,$$

so ist $g^{-1} \circ f$ eine Möbius-Transformation mit den 3 Fixpunkten z_1, z_2, z_3 . Nach (2) folgt $g^{-1} \circ f = \text{id}$, also $f = g$. Damit ist alles bewiesen. ■

Bemerkungen:

- (1) Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 jeweils 3 verschiedene Punkte in $\widehat{\mathbb{C}}$, so kann man wie im Beweis ein Gleichungssystem aufstellen und damit die Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $f(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$ bestimmen. Die folgende SAGE-Funktion funktioniert so. (Dabei ist auch der Punkt ∞ zugelassen.)

```

k.<i>=NumberField(x^2+1)
R.<z>=k[]

# Bestimmung einer Moebius-Transformation f(z) mit
# f(z1)=w1, f(z2)=w2, f(z3)=w3 zu vorgegebenen Punktetripeln (z1,z2,z3)
# und (w1,w2,w3). Der Punkt oo kann als oo eingegeben werden.
def MT(z1,z2,z3,w1,w2,w3):
    zz,ww,A=[z1,z2,z3],[w1,w2,w3],[]
    for j in range(3):
        if zz[j]==oo or ww[j]==oo:
            if zz[j]==oo and ww[j]==oo:
                A.append([0,0,1,0])
            elif zz[j]==oo:
                A.append([1,0,-ww[j],0])
            else:
                A.append([0,0,zz[j],1])
        else:
            A.append([zz[j],1,-ww[j]*zz[j],-ww[j]])
    A=Matrix(k,A)
    a,b,c,d=A.right_kernel().basis_matrix()[0]
    return (a*z+b)/(c*z+d)

```

- (2) Man kann natürlich auch das Gleichungssystem $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$ durch einfache Manipulationen lösen.

Beispiele:

- (1) Wir suchen eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit

$$f(1) = i, \quad f(0) = 2 + i, \quad f(-1) = 3.$$

Wir erhalten die Bedingungen

$$\frac{a+b}{c+d} = i, \quad \frac{b}{d} = 2 + i, \quad \frac{-a+b}{-c+d} = 3,$$

also

$$a + b = ic + id, \quad b = (2 + i)d, \quad -a + b = -3c + 3d.$$

Wir setzen $b = (2 + i)d$ in die anderen Gleichungen ein:

$$a + (2 + i)d = ic + id, \quad -a + (2 + i)d = -3c + 3d,$$

also

$$a = ic - 2d, \quad -a = -3c + (1 - i)d.$$

Addition liefert

$$0 = (ic - 2d) + (-3c + (1 - i)d) = (-3 + i)c + (-1 - i)d,$$

also

$$c = \frac{(1 + i)d}{-3 + i} = \frac{-1 - 2i}{5}d.$$

Es folgt

$$a = ic - 2d = i \frac{-1 - 2i}{5}d - 2d = \frac{-8 - i}{5}d.$$

Insgesamt ergibt sich

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{-8-i}{5}dz + (2+i)d}{\frac{-1-2i}{5}dz + d} = \frac{(-8-i)z + (10+5i)}{(-1-2i)z + 5}.$$

(Man überprüft, dass tatsächlich $f(1) = i$, $f(0) = 2 + i$, $f(-1) = 3$ gilt.)

- (2) Wir suchen eine Möbius-Transformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit

$$f(1) = \infty, \quad f(\infty) = 2, \quad f(0) = 3.$$

$f(1) = \infty$ liefert die Bedingung $c + d = 0$. Aus $f(\infty) = 2$ folgt $\frac{a}{c} = 2$. Aus $f(0) = 3$ ergibt sich $\frac{b}{d} = 3$. Wir können die 3 Bedingungen auch schreiben als

$$c = -d, \quad a = 2c = -2d, \quad b = 3d$$

und erhalten

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{-2dz + 3d}{-dz + d} = \frac{-2z + 3}{-z + 1} = \frac{2z - 3}{z - 1}.$$

Man sieht sofort, dass die geforderten Bedingungen erfüllt sind.

2. Das Doppelverhältnis

Bemerkung: Seien z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte in $\mathbb{C}$. Wir „basteln“ uns eine Funktion mit $f(z_1) = 1$, $f(z_2) = 0$, $f(z_3) = \infty$. Die Funktion

$$z \mapsto \frac{z - z_2}{z - z_3}$$

erfüllt die beiden letzten Bedingungen. Multiplizieren wir nun mit $\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$, so erhalten wir eine Möbius-Transformation

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2},$$

die die Bedingungen

$$f(z_1) = 1, \quad f(z_2) = 0, \quad f(z_3) = \infty$$

erfüllt. Die oben betrachtete Funktion hat auch einen Namen:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$$

heißt das **Doppelverhältnis** der Zahlen z, z_1, z_2, z_3 .

DEFINITION. Für vier verschiedene Zahlen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ definieren wir das **Doppelverhältnis (cross ratio)** durch

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

mit den „Sonderfällen“

$$DV(\infty, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}, \quad DV(z_1, \infty, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$$

und

$$DV(z_1, z_2, \infty, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}, \quad DV(z_1, z_2, z_3, \infty) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}.$$

Bemerkungen:

- (1) Leider kommen in der Literatur verschiedene Definitionen für das Doppelverhältnis vor.
 - Wie oben wird das Doppelverhältnis in den Funktionentheorie-Büchern von Burg/Haf/Wille/Meister (S.171), Conway (S.48) und Lang (S.238) definiert. (Als Differenzen treten hier die Zahlen $z_1 - z_3, z_1 - z_4, z_2 - z_3, z_2 - z_4$ auf.)
 - Bei Bullach/Funk (S.375), Fischer/Lieb (S.235) und Fritzsche (S.195) gibt es folgende Definition: $\widetilde{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}$. Es gilt $\widetilde{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(z_1, z_3, z_2, z_4)$.
- (2) Ist σ eine Permutation der Zahlen 1, 2, 3, 4, so gilt

$$DV(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ für } \sigma \in \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}.$$

Eine fundamentale Eigenschaft des Doppelverhältnisses findet sich in folgendem Satz:

SATZ. Ist $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbius-Transformation, sind z_1, z_2, z_3, z_4 vier verschiedene Punkte in $\hat{\mathbb{C}}$, so gilt

$$DV(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Beweis: Sei

$$w_i = \frac{az_i + b}{cz_i + d}.$$

Mit SAGE finden wir

$$\begin{aligned} w_1 - w_3 &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)}, \\ w_1 - w_4 &= \frac{(ad - bc)(z_1 - z_4)}{(cz_1 + d)(cz_4 + d)}, \\ w_2 - w_3 &= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}, \\ w_2 - w_4 &= \frac{(ad - bc)(z_2 - z_4)}{(cz_2 + d)(cz_4 + d)}, \end{aligned}$$

und damit

$$\text{DV}(w_1, w_2, w_3, w_4) = \text{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Dies war zu zeigen. ■

Bemerkung: Man kann die Formel des letzten Satzes auch zur Konstruktion von Möbius-Transformationen benutzen. Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 gegeben und sucht man $f(z)$ mit $f(z_1) = w_1$, $f(z_2) = w_2$, $f(z_3) = w_3$, so muss gelten

$$\text{DV}(f(z), w_1, w_2, w_3) = \text{DV}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3).$$

Löst man $\text{DV}(f(z), w_1, w_2, w_3) = \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ nach $f(z)$ auf, so erhält man eine Darstellung für $f(z)$.

Beispiel: Wir suchen eine Möbius-Transformation mit

$$f(1) = i, \quad f(0) = 2 + i, \quad f(-1) = 3.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \text{DV}(z, 1, 0, -1) &= \frac{2z}{z+1}, \\ \text{DV}(f(z), i, 2+i, 3) &= \frac{(f(z) - 2 - i)(i - 3)}{(f(z) - 3)(-2)} = \frac{(-3 + i)f(z) + (7 + i)}{-2f(z) + 6}. \end{aligned}$$

Nun setzen wir die beiden Ausdrücke gleich:

$$\begin{aligned} \text{DV}(f(z), i, 2+i, 3) &= \text{DV}(z, 1, 0, -1) \iff \\ \iff \frac{(-3 + i)f(z) + (7 + i)}{-2f(z) + 6} &= \frac{2z}{z+1} \iff \\ \iff (-3 + i)(z+1)f(z) + (7 + i)(z+1) &= -4zf(z) + 12z \iff \\ \iff f(z) \cdot ((-3 + i)z + (-3 + i) + 4z) &= 12z - (7 + i)z - (7 + i) \iff \\ \iff f(z) \cdot ((1 + i)z + (-3 + i)) &= (5 - i)z + (-7 - i) \iff \\ \iff f(z) &= \frac{(5 - i)z + (-7 - i)}{(1 + i)z + (-3 + i)} \end{aligned}$$

Man überzeugt sich durch Einsetzen, dass $f(z)$ die gewünschten Bedingungen erfüllt. Zuvor hatten wir bereits die Darstellung

$$f(z) = \frac{(-8 - i)z + (10 + 5i)}{(-1 - 2i)z + 5}$$

hergeleitet. Wegen

$$\begin{pmatrix} -8 - i & 10 + 5i \\ -1 - 2i & 5 \end{pmatrix} = \frac{-3 - i}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 - i & -7 - i \\ 1 + i & -3 + i \end{pmatrix}$$

sind die Darstellungen tatsächlich gleichwertig.

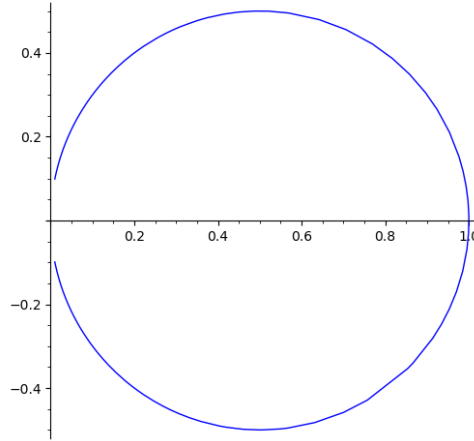
3. Verallgemeinerte Geraden

Was ist das Bild einer Geraden in $\mathbb{C}$ unter einer Möbius-Transformation? Wir beginnen mit einem Beispiel:

Beispiel: $G = \{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$ ist eine Gerade in $\mathbb{C}$. Sei $f(z) = \frac{1}{z}$. Was ist $f(G)$?

$$f(G) = \left\{ \frac{1}{1+it} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{1-it}{1+t^2} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Bild zeigt $\left\{ \frac{1}{1+t^2} - i \frac{t}{1+t^2} : t \in [-10, 10] \right\}$:



Es ist

$$\left| \frac{1}{1+it} - \frac{1}{2} \right|^2 = \left| \frac{2 - (1+it)}{2(1+it)} \right|^2 = \left| \frac{1-it}{2(1+it)} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Dies schaut nach dem Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}$ und Radius $\frac{1}{2}$ aus. Allerdings ist $0 \notin f(G)$, obwohl 0 auf dem Kreis liegt. Es ist naheliegend, zu vermuten, dass

$$f(G) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \right\} \setminus \{0\}$$

gilt.

Bemerkung: Es zeigt sich, dass Geraden und Kreise unter Möbius-Transformationen eng verwandt sind, dass es aber sinnvoll ist, zu Geraden noch den Punkt ∞ hinzuzunehmen.

- Ein **Kreis** in $\mathbb{C}$ ist eine Teilmenge der Gestalt

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - m| = r\} \quad \text{mit } m \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad r > 0.$$

Dabei ist m der Mittelpunkt und r der Radius.

- Eine **Gerade** ist eine Teilmenge der Gestalt

$$a + \mathbb{R}v = \{a + tv : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Es gilt

$$a + \mathbb{R}v = \tilde{a} + \mathbb{R}\tilde{v} \iff \tilde{a} = a + \lambda v, \tilde{v} = \mu v \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Eine **verallgemeinerte Gerade** ist eine Gerade zusammen mit dem Punkt ∞ , also

$$(a + v\mathbb{R}) \cup \{\infty\}.$$

- Ein **verallgemeinerter Kreis** ist ein Kreis oder eine verallgemeinerte Gerade.

Die Aussagen des folgenden Lemmas sind im Wesentlichen aus der Elementargeometrie bekannt.

LEMMA. Durch 3 verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ wird ein verallgemeinerter Kreis in $\hat{\mathbb{C}}$ bestimmt:

- Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $z_3 \in z_1 + \mathbb{R}(z_2 - z_1)$, so bestimmen z_1, z_2, z_3 die Gerade $z_1 + \mathbb{R}(z_2 - z_1)$, zu der man noch den Punkt ∞ hinzunimmt.

- Ist o.E. $z_3 = \infty$, so bestimmen z_1, z_2, z_3 die Gerade $z_1 + \mathbb{R}(z_2 - z_1)$ zusammen mit dem Punkt ∞ .
- Sind $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ mit $z_3 \notin z_1 + \mathbb{R}(z_2 - z_1)$, so bestimmen z_1, z_2, z_3 einen Kreis.

Im folgenden Lemma wird das Urbild der verallgemeinerten Geraden $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ unter einer Möbius-Transformation berechnet:

LEMMA. Sei $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbius-Transformation, also $ad - bc \neq 0$.

- Ist $f(\infty) = \infty$, so ist $a \neq 0$, $c = 0$ und

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = -\frac{b}{a} + \frac{d}{a} \cdot \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f^{-1}(\infty) = \infty.$$

- Ist $f(\infty) \in \mathbb{R}$, also $c \neq 0$ und $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$, so ist

$$f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \left(-\frac{b\bar{d}}{a\bar{d} - \bar{b}c} + \frac{1}{a\bar{d} - \bar{b}c} \mathbb{R} \right) \cup \{\infty\}.$$

- Ist $f(\infty) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also $c \neq 0$ und $\frac{a}{c} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so ist $a\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$ und

$$f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{\bar{a}d - b\bar{c}}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right| = \left| \frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c} \right| \right\}.$$

Dies ist ein Kreis.

Beweis:

- (1) Wir betrachten zunächst den Fall $c = 0$. Dann ist $ad \neq 0$ und

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

Es ist $f(\infty) = \infty$. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \in \mathbb{R} \iff \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = t \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff z = \frac{t - \frac{b}{d}}{\frac{a}{d}} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff z = -\frac{b}{a} + \frac{d}{a} \cdot t \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \iff \\ &\iff z \in -\frac{b}{a} + \frac{d}{a} \cdot \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$f^{-1}(\mathbb{R}) = -\frac{b}{a} + \frac{d}{a} \cdot \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f^{-1}(\infty) = \infty.$$

- (2) Nun setzen wir $c \neq 0$ voraus. Es ist

$$f(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty.$$

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathbb{R} &\iff f(z) = \overline{f(z)} \iff \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}} \iff \\ &\iff (az+b)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d}) = (\bar{a}\bar{z} + \bar{b})(cz+d) \iff \\ &\iff (a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + (a\bar{d} - \bar{b}c)z + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0. \end{aligned}$$

An der vorletzten Zeile sieht man, dass für $z = -\frac{d}{c}$ die letzte Gleichung auch erfüllt ist. Also gilt für $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff (a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + (a\bar{d} - \bar{b}c)z + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0.$$

Wir machen jetzt eine Fallunterscheidung.

(a) **Fall** $a\bar{c} - \bar{a}c \neq 0$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
 f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} &\iff (a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + (a\bar{d} - \bar{b}c)z + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \iff \\
 &\iff z\bar{z} + \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}z + \frac{b\bar{c} - \bar{a}d}{a\bar{c} - \bar{a}c}\bar{z} + \frac{b\bar{d} - \bar{b}d}{a\bar{c} - \bar{a}c} = 0 \iff \\
 &\iff \left(z + \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right) \left(\bar{z} + \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right) + \frac{b\bar{d} - \bar{b}d}{a\bar{c} - \bar{a}c} = \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \cdot \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c} \\
 &\iff \left|z + \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|^2 = \frac{(a\bar{d} - \bar{b}c)(\overline{a\bar{d} - \bar{b}c}) - (a\bar{c} - \bar{a}c)(b\bar{d} - \bar{b}d)}{|a\bar{c} - \bar{a}c|^2} \\
 &\iff \left|z + \frac{a\bar{d} - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|^2 = \frac{(ad - bc)(\overline{a\bar{d} - \bar{b}c})}{|a\bar{c} - \bar{a}c|^2} \iff \\
 &\iff \left|z - \frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|^2 = \left|\frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|^2 \iff \\
 &\iff \left|z - \frac{\bar{a}d - \bar{b}c}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right| = \left|\frac{ad - bc}{a\bar{c} - \bar{a}c}\right|.
 \end{aligned}$$

(b) **Fall** $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$: Für $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(z) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} &\iff (a\bar{c} - \bar{a}c)z\bar{z} + (a\bar{d} - \bar{b}c)z + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \iff \\
 &\iff (a\bar{d} - \bar{b}c)z + (b\bar{c} - \bar{a}d)\bar{z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \iff \\
 &\iff (a\bar{d} - \bar{b}c)z - \overline{(a\bar{d} - \bar{b}c)z} + (b\bar{d} - \bar{b}d) = 0 \iff \\
 &\iff 2i \cdot \operatorname{Im}((a\bar{d} - \bar{b}c)z) + 2i \cdot \operatorname{Im}(b\bar{d}) = 0 \iff \\
 &\iff \operatorname{Im}((a\bar{d} - \bar{b}c)z + b\bar{d}) = 0 \iff \\
 &\iff (a\bar{d} - \bar{b}c)z + b\bar{d} = t \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \iff \\
 &\iff z = \frac{t - b\bar{d}}{a\bar{d} - \bar{b}c} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \iff \\
 &\iff z \in -\frac{b\bar{d}}{a\bar{d} - \bar{b}c} + \frac{1}{a\bar{d} - \bar{b}c} \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Es folgt:

$$f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \cap \mathbb{C} = -\frac{b\bar{d}}{a\bar{d} - \bar{b}c} + \frac{1}{a\bar{d} - \bar{b}c} \mathbb{R}.$$

Aus $a\bar{c} - \bar{a}c = 0$ folgt $\frac{a}{c} = \frac{\bar{a}}{\bar{c}}$, also $\frac{a}{c} \in \mathbb{R}$. Wegen $f(\infty) = \frac{a}{c}$ ist also $\infty \in f^{-1}(\mathbb{R})$. Damit folgt

$$f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \left(-\frac{b\bar{d}}{a\bar{d} - \bar{b}c} + \frac{1}{a\bar{d} - \bar{b}c} \mathbb{R}\right) \cup \{\infty\}.$$

Dies war zu zeigen. ■

FOLGERUNG. Es gilt:

- (1) Ist K ein verallgemeinerter Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$, so gibt es eine Möbius-Transformation f mit $K = f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$.
- (1') Wählt man 3 verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 auf einem verallgemeinerten Kreis K , ist $f(z)$ die Möbius-Transformation mit $f(z_1) = 1$, $f(z_2) = 0$, $f(z_3) = \infty$, so gilt $K = f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$.
- (2) Ist K ein verallgemeinerter Kreis und $f(z)$ eine Möbius-Transformation, so ist $f(K)$ ein verallgemeinerter Kreis.
- (3) Sind K_1, K_2 zwei verallgemeinerte Kreise, so gibt es eine Möbius-Transformation mit $f(K_1) = K_2$.

Beweis:

- (1') Nach dem vorangegangenen Lemma ist $f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ ein verallgemeinerter Kreis, der die Punkte z_1, z_2, z_3 enthält. Da ein verallgemeinerter Kreis durch 3 Punkte bestimmt ist, folgt $K = f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$.
- (1) Dies folgt aus (1').
- (2) Mit (1) schreiben wir $K = g^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Dann ist

$$f(K) = (f \circ g^{-1})(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = (g \circ f^{-1})^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}).$$

Die Behauptung folgt dann aus dem letzten Lemma.

- (3) Nach (1) finden wir Möbius-Transformationen f_1, f_2 mit $K_1 = f_1^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$, $K_2 = f_2^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Es folgt $f_1(K_1) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} = f_2(K_2)$, also

$$K_2 = f_2^{-1}(f_1(K_1)) = (f_2^{-1} \circ f_1)(K_1).$$

Mit $f = f_2^{-1} \circ f_1$ folgt die Behauptung. ■

Beispiel: Wir hatten zuvor gefragt, was das Bild der Geraden $G = \{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$ unter der Abbildung $f(z) = \frac{1}{z}$ ist. Wir wählen drei Punkte auf G , beispielsweise $1 - i, 1, 1 + i$ und bestimmen die Bildpunkte:

$$f(1 - i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad f(1) = \frac{1}{2}, \quad f(1 + i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Wir sehen:

$$\left|f(1 - i) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \left|f(1) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}, \quad \left|f(1 + i) - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2},$$

also liegen die Bildpunkte auf dem Kreis $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. Nun wissen wir, dass $f(G \cup \{\infty\})$ ein verallgemeinerter Kreis ist. Da ein verallgemeinerter Kreis durch 3 Punkte bestimmt ist, folgt

$$f(G \setminus \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}.$$

Wegen $f(\infty) = 0$ gilt dann

$$f(G) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\} \setminus \{0\}.$$

Das hatten wir zuvor vermutet.

LEMMA. 4 verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ liegen genau dann auf einem verallgemeinerten Kreis, wenn gilt

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}.$$

Beweis: z_2, z_3, z_4 bestimmen einen verallgemeinerten Kreis K . Wir wählen eine Möbius-Transformation $f(z)$ mit $f(z_2) = 1$, $f(z_3) = 0$, $f(z_4) = \infty$. Dann ist $K = f^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$. Es ist $f(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir berechnen Doppelverhältnisse:

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = DV(f(z_1), 1, 0, \infty) = \frac{(f(z_1) - 0)(1 - \infty)}{(f(z_1) - \infty)(1 - 0)} = f(z_1).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1, z_2, z_3, z_4 \text{ liegen auf einem Kreis} &\iff z_1 \in K \iff f(z_1) \in f(K) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \iff \\ &\iff DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Da das Doppelverhältnis von 4 verschiedenen Punkten nicht ∞ wird, folgt die Behauptung. ■

Ist K ein verallgemeinerter Kreis und sind z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte von K , so können wir das folgende Doppelverhältnis als Möbius-Transformation betrachten:

$$DV(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Dann ist

$$DV(z_1, z_1, z_2, z_3) = 1 \quad \text{und} \quad DV(z_2, z_1, z_2, z_3) = 0 \quad \text{und} \quad DV(z_3, z_1, z_2, z_3) = \infty.$$

Wir können das vorangegangene Lemma dann wie folgt erweitern:

FOLGERUNG. Ist K ein verallgemeinerter Kreis und sind z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte von K , so gilt

$$K = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

und

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus K = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}.$$

$\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ zerfällt in 2 Zusammenhangskomponenten, nämlich

$$\{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)) > 0\} \quad \text{und} \quad \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)) < 0\}.$$

Beweis: Die erste Aussage wurde bereits gezeigt. Da die Möbius-Transformation $z \mapsto \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)$ ein Homöomorphismus ist, liefern die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, nämlich

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\} \quad \text{und} \quad \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) < 0\}$$

die Zusammenhangskomponenten von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$. ■

Wir definieren nun:

DEFINITION. Ist K ein verallgemeinerter Kreis und sind z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte von K , so definieren wir die **rechte Seite von K bezüglich (z_1, z_2, z_3)** als

$$\text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3)) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)) > 0\}$$

und die **linke Seite von K bezüglich (z_1, z_2, z_3)** als

$$\text{lS}(K, (z_1, z_2, z_3)) = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} : \text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)) < 0\}.$$

(Die linke und die rechte Seite von K sind also die zwei Zusammenhangskomponenten von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$.)

Bemerkung: Ein Tripel (z_1, z_2, z_3) gibt eine „Orientierung“ an, wie man den verallgemeinerten Kreis K durchläuft: Von z_1 nach z_2 nach z_3 . Bei einem Kreis sind zwei Punkte zu wenig um eine Durchlaufrichtung festzulegen.

DEFINITION. Sei K ein verallgemeinerter Kreis und $(z_1, z_2, z_3), (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$ zwei Tripel verschiedener Kreispunkte. Wir sagen, (z_1, z_2, z_3) ist äquivalent zu $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$, wenn gilt

$$\text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3)) = \text{rS}(K, (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)),$$

und damit natürlich auch

$$\text{lS}(K, (z_1, z_2, z_3)) = \text{lS}(K, (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)),$$

Eine Äquivalenzklasse nennen wir eine **Orientierung** von K .

LEMMA. Sei K ein verallgemeinerter Kreis und z_1, z_2, z_3 drei verschiedene Punkte von K . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3)) &= \text{rS}(K, (z_2, z_3, z_1)) = \text{rS}(K, (z_3, z_1, z_2)) = \\ &= \text{lS}(K, (z_2, z_1, z_3)) = \text{lS}(K, (z_3, z_2, z_1)) = \text{lS}(K, (z_1, z_3, z_2)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{lS}(K, (z_1, z_2, z_3)) &= \text{lS}(K, (z_2, z_3, z_1)) = \text{lS}(K, (z_3, z_1, z_2)) = \\ &= \text{rS}(K, (z_2, z_1, z_3)) = \text{rS}(K, (z_3, z_2, z_1)) = \text{rS}(K, (z_1, z_3, z_2)) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $f(z) = x + yi$. Dann rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3) &= f(z) = x + yi, \\
\text{DV}(z, z_2, z_3, z_1) &= \frac{1}{1 - f(z)} = \frac{1}{(1 - x) - yi} = \frac{(1 - x) + yi}{(1 - x)^2 + y^2}, \\
\text{DV}(z, z_3, z_1, z_2) &= 1 - \frac{1}{f(z)} = 1 - \frac{1}{x + yi} = 1 - \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{-x + yi}{x^2 + y^2}, \\
\text{DV}(z, z_2, z_1, z_3) &= 1 - f(z) = 1 - (x + yi) = (1 - x) - yi, \\
\text{DV}(z, z_3, z_2, z_1) &= \frac{f(z)}{f(z) - 1} = \frac{x + yi}{(x - 1) + yi} = \frac{(x + yi)((x - 1) - yi)}{(x - 1)^2 + y^2} = \frac{(x^2 + y^2 - x) - yi}{(x - 1)^2 + y^2}, \\
\text{DV}(z, z_1, z_3, z_2) &= \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_2, z_3)) &= y, \\
\text{Im}(\text{DV}(z, z_2, z_3, z_1)) &= \frac{y}{(1 - x)^2 + y^2}, \\
\text{Im}(\text{DV}(z, z_3, z_1, z_2)) &= 1 - \frac{1}{f(z)} = 1 - \frac{1}{x + yi} = 1 - \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \\
\text{Im}(\text{DV}(z, z_2, z_1, z_3)) &= -y, \\
\text{Im}(\text{DV}(z, z_3, z_2, z_1)) &= -\frac{y}{(x - 1)^2 + y^2}, \\
\text{Im}(\text{DV}(z, z_1, z_3, z_2)) &= -\frac{y}{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Nach der Definition von linken und rechten Seite eines verallgemeinerten Kreises folgt daraus die Behauptung. ■

LEMMA. Sei K ein verallgemeinerter Kreis, seien z_1, z_2, z_3 stetige Funktionen $z_i : [0, 1] \rightarrow K$ mit

$$z_1(t) \neq z_2(t), \quad z_1(t) \neq z_3(t), \quad z_2(t) \neq z_3(t) \quad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Dann ist

$$\text{rS}(K, (z_1(t), z_2(t), z_3(t)))$$

unabhängig von $t \in [0, 1]$.

Beweis: Sei $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ fest gewählt. Wir betrachten die Funktion

$$\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \lambda(t) = \text{DV}(z, z_1(t), z_2(t), z_3(t)) = \frac{(z - z_2(t))(z_1(t) - z_3(t))}{(z - z_3(t))(z_1(t) - z_2(t))}.$$

Da keine der 4 Punkte $z, z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ zusammenfallen und z nicht auf K liegt, ist $\lambda(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Da λ stetig ist, kann $\text{Im}(\lambda(t))$ nicht das Vorzeichen wechseln. Damit folgt die Behauptung. ■

Wir schauen uns zuerst (gewöhnliche) Kreise an.

SATZ. Sei K ein Kreis, also von der Form $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - m| = r\}$ mit $m \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Wir wählen $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Dann ist $\zeta^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Es gilt:

- (1) Durchläuft man den Kreis im mathematisch positiven Sinn, so kann dies durch das Tripel $(m + r, m + \zeta r, m + \zeta^2 r)$ beschrieben werden. Der Punkt ∞ liegt auf der rechten Seite, der Mittelpunkt m auf der linken Seite.
- (2) Durchläuft man den Kreis im mathematisch negativen Sinn, so kann dies durch das Tripel $(m + r, m + \zeta^2 r, m + \zeta r)$ beschrieben werden. Der Punkt ∞ liegt auf der linken Seite des Kreises.

Beweis:

(1) Wir betrachten

$$\begin{aligned} \text{DV}(\infty, m+r, m+\zeta r, m+\zeta^2 r) &= \frac{(\infty - (m+\zeta r))((m+r) - (m+\zeta^2 r))}{(\infty - (m+\zeta^2 r))((m+r) - (m+\zeta r))} = \\ &= \frac{(m+r) - (m+\zeta^2 r)}{(m+r) - (m+\zeta r)} = \frac{1-\zeta^2}{1-\zeta} = 1+\zeta, \\ \text{DV}(m, m+r, m+\zeta r, m+\zeta^2 r) &= \frac{(m - (m+\zeta r))((m+r) - (m+\zeta^2 r))}{(m - (m+\zeta^2 r))((m+r) - (m+\zeta r))} = \\ &= \frac{-\zeta \cdot (1-\zeta^2)}{-\zeta^2 \cdot (1-\zeta)} = \frac{1+\zeta}{\zeta} = 1+\zeta^2. \end{aligned}$$

Mit

$$1+\zeta = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{und} \quad 1+\zeta^2 = 1 + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

folgt die Behauptung.

(2) Dies folgt sofort aus (1), da statt (z_1, z_2, z_3) nun (z_1, z_3, z_2) betrachtet wird. ■

Was passiert mit Geraden?

- Eine Gerade G wird festgelegt durch zwei verschiedene Punkte $a, b \in \mathbb{C}$. (Die zugehörige verallgemeinerte Gerade enthält dann ∞ .) Wir stellen uns vor, wir gehen von a nach b . Wir können die Gerade in der Form

$$G = \{a + t(b-a) : t \in \mathbb{R}\}$$

parametrisieren. $v = b - a$ ist dann ein Richtungsvektor. Dreht man den Vektor v um 90 Grad nach rechts, so erhält man den Vektor

$$e^{-\frac{\pi}{2}i}v = -iv.$$

Der Punkt $a - iv = a - i(b-a)$ sollte bei unserer Vorstellung von Orientierung also rechts der Geraden liegen.

- Wir betrachten zunächst den Fall, dass die drei vorgegebenen Punkte a, b, ∞ sind. Wo liegt $a - iv$ bezüglich der Orientierung?

$$\text{DV}(a - iv, a, a+v, \infty) = \frac{((a - iv) - (a+v))(a - \infty)}{((a - iv) - \infty)(a - (a+v))} = \frac{(-i-1)v}{-v} = 1+i.$$

Der Punkt $a - iv$ liegt also auf der rechten Seite der Geraden, wie erhofft.

- Ist ∞ einer der drei Punkte z_1, z_2, z_3 , so können wir (z_1, z_2, z_3) zyklisch so verschieben, bis wir zum Fall (a, b, ∞) kommen, den wir schon behandelt haben. Nochmals konkreter:

$$(\infty, a, b) \longrightarrow (a, b, \infty).$$

$$(a, \infty, b) \longrightarrow (b, a, \infty).$$

- Wir betrachten jetzt den Fall $(z_1, z_2, z_3) = (a, b, c)$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$. Wir schreiben mit obiger Notation $c = a + tv$.

$$\begin{aligned} \text{DV}(a - iv, a, b, c) &= \text{DV}(a - iv, a, a+v, a+tv) = \\ &= \frac{((a - iv) - (a+v))(a - (a+tv))}{((a - iv) - (a+tv))(a - (a+v))} = \\ &= \frac{(-i-1)v \cdot (-tv)}{(-i-t)v \cdot (-v)} = \frac{(1+i)t}{t+i} = \frac{(1+i)(t-i)t}{t^2+1} = \\ &= \frac{(t-i+it+1)t}{t^2+1} = \frac{((1+t) + (t-1)i)t}{t^2+1} = \\ &= \frac{t^2+t}{t^2+1} + \frac{t(t-1)}{t^2+1}i \end{aligned}$$

Ist $t < 0$ oder $t > 1$, so liegt $a - iv$ rechts der Geraden. Ist $0 < t < 1$, so müssen wir die Orientierung umkehren.

Kann man das als Satz formulieren?

Für die Anwendung ist nun wichtig, dass die Orientierung unter Möbius-Transformationen erhalten bleibt:

SATZ. Sei f eine Möbius-Transformation und K ein verallgemeinerter Kreis und einer Orientierung, die durch ein Tripel (z_1, z_2, z_3) gegeben ist. Dann ist $f(K)$ ein verallgemeinerter Kreis mit einer Orientierung $(f(z_1), f(z_2), f(z_3))$, wobei gilt

$$f(\text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3))) = \text{rS}(f(K), (f(z_1), f(z_2), f(z_3)))$$

und

$$f(\text{IS}(K, (z_1, z_2, z_3))) = \text{IS}(f(K), (f(z_1), f(z_2), f(z_3))).$$

Beweis: Die Behauptung folgt einfach aus der Formel

$$\text{DV}(f(z), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = \text{DV}(z, z_1, z_2, z_3).$$

Etwas ausführlicher: Für $z \in \hat{\mathbb{C}}$ gilt:

$$\begin{aligned} z \in f(\text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3))) &\iff f^{-1}(z) \in \text{rS}(K, (z_1, z_2, z_3)) \iff \\ &\iff \text{Im}(\text{DV}(f^{-1}(z), z_1, z_2, z_3)) > 0 \iff \\ &\iff \text{Im}(\text{DV}(z, f(z_1), f(z_2), f(z_3))) > 0 \iff \\ &\iff z \in \text{rS}(f(K), (f(z_1), f(z_2), f(z_3))). \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. ■

Beispiele:

- (1) Die Gerade $G = \{1 + it : t \in \mathbb{R}\}$ wurde unter $f(z) = \frac{1}{z}$ auf den Kreis $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$ abgebildet (mit $f(\infty) = 0$). Dabei hatten wir benutzt:

$$f(1 - i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad f(1) = 1, \quad f(1 + i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Die Orientierung $(1 - i, 1, 1 + i)$ auf der Geraden

$$\text{rS}(G \cup \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 1\}.$$

Die zugehörige Orientierung $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)$ lässt den Kreis im mathematisch negativen Sinn durchlaufen, also ist

$$\text{rS}(K, (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i)) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\},$$

das Innere des Kreises.

- (2) Wir suchen eine Möbius-Transformation, die die rechte Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ auf das innere des Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet. Wir wählen die Punkte $0, i, \infty$ auf der Geraden $G = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$ und $1, -i, -1$ auf dem Einheitskreis K . Dann ist

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\} = \text{rS}(G, (0, i, \infty)) \quad \text{und} \quad \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} = \text{rS}(K, (1, -i, -1)).$$

Wir finden unter den Bedingungen

$$f(0) = 1, \quad f(i) = -i, \quad f(\infty) = -1$$

die Möbius-Transformation

$$f(z) = \frac{-z + 1}{z + 1}.$$

(Natürlich ist die gefundene Möbius-Transformation abhängig von den gewählten Punkten.)

- (3) Wir suchen eine Möbius-Transformation, die die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ auf das innere des Einheitskreises $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet. Auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wählen wir die drei Punkte $0, 1, \infty$, so $\mathbb{H}$ die linke Seite der Geraden wird. Auf dem Einheitskreis wählen wir die Punkte $-1, -i, 1$, sodass $\mathbb{E}$ auf der linken Seite liegt. (Hier haben wir etwas probiert, damit die Möbius-Transformation einfach aussieht). Mit dem Ansatz

$$f(0) = -1, \quad f(1) = -i, \quad f(\infty) = 1$$

finden wir

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

Nachtrag/Frage: Gegeben sei ein Kreis mit Mittelpunkt a und Radius r , außerdem drei verschiedene Kreispunkte z_1, z_2, z_3 . Wir können schreiben

$$z_1 = a + re^{i\varphi_1}, \quad z_2 = a + re^{i\varphi_2}, \quad z_3 = a + re^{i\varphi_3}.$$

Wir betrachten

$$f(z) = \operatorname{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} z_1 - z_3 &= (a + re^{i\varphi_1}) - (a + re^{i\varphi_3}) = r(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_3}) = re^{i\varphi_1}(1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)}), \\ z_1 - z_2 &= \dots = re^{i\varphi_1}(1 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}), \\ \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} &= \frac{1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)}}{1 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}}, \\ f(\infty) &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)}}{1 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}} = \frac{(1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)})(1 - e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)})}{(1 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)})(1 - e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)})} = \\ &= \frac{1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)} - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)}}{2 - e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} - e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)}} = \\ &= \frac{1 - e^{i(\varphi_3 - \varphi_1)} - e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} + e^{i(\varphi_3 - \varphi_2)}}{2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))}. \end{aligned}$$

Frage: Kann man in Abhängigkeit von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ einfach charakterisieren, wann ∞ auf der rechten Seite des Kreises (bezüglich (z_1, z_2, z_3)) liegt, d.h. wann $\operatorname{Im}(f(\infty)) > 0$ gilt?

Biholomorphe Abbildungen

1. Biholomorphe Abbildungen

DEFINITION. Seien $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei Gebiete in $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ heißt **biholomorph**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) $f : G_1 \rightarrow G_2$ ist bijektiv, insbesondere existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : G_2 \rightarrow G_1$.
- (2) f und f^{-1} sind holomorph.

Existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$, so nennt man G_1 und G_2 **biholomorph äquivalent** (oder **konform äquivalent**). Ist G ein Gebiet und $f : G \rightarrow G$ biholomorph, so nennt man f einen **Automorphismus** von G . Die Menge der Automorphismen von G wird **Automorphismengruppe** von G genannt: $\text{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \text{ biholomorph}\}$.

Beispiel: Die Möbius-Transformation $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ bildet $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ auf $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ab. (Die Umkehrabbildung $f^{-1}(z) = \frac{iz+1}{-z+1}$ ist natürlich auch holomorph.) Also sind $\mathbb{H}$ und $\mathbb{E}$ biholomorph äquivalent. Dieses Beispiel lässt sich leicht verallgemeinern:

SATZ. Ist f eine Möbius-Transformation und $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $f^{-1}(\infty) \notin G$, so ist $f(G)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $G \xrightarrow{f} f(G)$ eine biholomorphe Abbildung.

Beweis: Wegen $f^{-1}(\infty) \notin G$ gilt $f(G) \subseteq \mathbb{C}$. Da die Umkehrabbildung f^{-1} eine Möbius-Transformation ist, ist auch $f(G) \xrightarrow{f^{-1}} G$ holomorph. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkungen:

- (1) Sind G_1, G_2, G_3 Gebiete in $\mathbb{C}$, sind $f : G_1 \rightarrow G_2$ und $g : G_2 \rightarrow G_3$ biholomorphe Abbildungen, so ist natürlich auch $g \circ f : G_1 \rightarrow G_3$ biholomorph.
- (2) Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(G)$ eines Gebiets G wird zu einer Gruppe, wenn man als Verknüpfung die Hintereinanderausführung von Abbildungen nimmt. Das neutrale Element ist die Identität id_G .

LEMMA. Sei $f : G_1 \rightarrow G_2$ eine biholomorphe Abbildung zwischen Gebieten G_1 und G_2 . Dann gilt:

- (1) Die Zuordnung

$$\phi : \text{Aut}(G_1) \rightarrow \text{Aut}(G_2) \text{ mit } \phi(g) = f \circ g \circ f^{-1}$$

ist ein Gruppenisomorphismus. (Insbesondere sind $\text{Aut}(G_1)$ und $\text{Aut}(G_2)$ isomorphe Gruppen.)

- (2) Es gilt

$$\begin{aligned} \{\tilde{f} : G_1 \rightarrow G_2 \text{ biholomorph}\} &= \{f \circ g : g \in \text{Aut}(G_1)\} = \\ &= \{h \circ f : h \in \text{Aut}(G_2)\}. \end{aligned}$$

Kennt man also $\text{Aut}(G_1)$ oder $\text{Aut}(G_2)$, so kann man alle biholomorphen Abbildung $G_1 \rightarrow G_2$ angeben.

Beweis: Übung. ■

Der folgende Satz liefert ein einfaches Kriterium, wann eine Abbildung $G_1 \rightarrow G_2$ schon biholomorph ist.

SATZ. Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv, dann ist $f(G)$ auch ein Gebiet und $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ holomorph. Insbesondere ist $G \xrightarrow{f} f(G)$ eine biholomorphe Abbildung.

Beweis:

- (1) Erinnerung: Als Folgerung aus dem Satz von Rouché hatten wir gezeigt, dass für eine injektive holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ immer $f'(z) \neq 0$ gilt.
- (2) Da G ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant ist - f ist injektiv -, ist nach dem Satz von der Gebietstreue auch $H = f(G)$ ein Gebiet. Dann ist $f : G \rightarrow H$ bijektiv, $g = f^{-1}$ also definiert mit $g : H \rightarrow G$. Ist $U \subseteq G$ offen, so ist nach dem Offenheitssatz $f(U) = g^{-1}(U)$ offen. Dies zeigt, dass g stetig ist.
- (3) Ist g holomorph? Sei $y_0 \in H$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in H , die gegen y_0 konvergiert, wobei aber $y_n \neq y_0$ für $n \geq 1$ gilt. Wir betrachten

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0}.$$

Sei $x_0 = g(y_0)$ und $x_n = g(y_n)$. Die Stetigkeit von g impliziert $x_n \rightarrow x_0$ in G . Weiter ist $y_0 = f(x_0)$ und $y_n = f(x_n)$. Es folgt

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)}.$$

Nach der Erinnerung in (1) gilt $f'(x_0) \neq 0$. Dann folgt

$$\frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Dies zeigt, dass g in y_0 komplex differenzierbar ist. Also ist g holomorph. Dies beweist, dass f eine biholomorphe Abbildung zwischen G und $f(G)$ liefert. ■

Beispiele:

- (1) Wählen wir ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ so, dass gilt

$$-z \notin G \text{ für alle } z \in G,$$

so definiert das Quadrieren $z \mapsto z^2$ eine injektive holomorphe Abbildung. Man erhält also eine biholomorphe Abbildung

$$G \xrightarrow{z \mapsto z^2} \{z^2 : z \in G\}.$$

- (a) Wir wählen $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Es ist

$$\mathbb{H} = \{re^{i\varphi} : r > 0, 0 < \varphi < \pi\}$$

und

$$\begin{aligned} \{z^2 : z \in \mathbb{H}\} &= \{r^2 e^{i \cdot 2\varphi} : r > 0, 0 < \varphi < \pi\} = \\ &= \{re^{i\varphi} : r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\mathbb{H} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine biholomorphe Abbildung. (Was ist die Umkehrabbildung?)

- (b) Analog erhält man eine biholomorphe Abbildung

$$\mathbb{H} \xrightarrow{z \mapsto -z^2} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}.$$

(c) Wir kennen die biholomorphe Abbildung

$$\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Invers ist

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto \frac{iz+i}{-z+1}.$$

Nun führen wir danach die Abbildung aus (b) aus:

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad z \mapsto -\left(\frac{iz+i}{-z+1}\right)^2 = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2.$$

(d) Bei folgendem Beispiel können wir die Umkehrabbildung explizit durch bekannte Funktionen ausdrücken. Wir betrachten $G = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Es ist

$$\begin{aligned} G &= \{re^{i\varphi} : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\}, \\ \{z^2 : z \in G\} &= \{r^2 e^{i \cdot 2\varphi} : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\} = \\ &= \{re^{i\varphi} : r > 0, -\pi < \varphi < \pi\} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

Auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist der Hauptzweig des Logarithmus Log definiert und holomorph: Schreibt man $z = re^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$, so ist $\operatorname{Log}(re^{i\varphi}) = \ln(r) + i\varphi$. Daher können wir die Umkehrabbildung zu

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$$

so beschreiben:

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \xrightarrow{z \mapsto \exp(\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z))} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}.$$

2. Aut($\mathbb{E}$) - die Automorphismengruppe von $\mathbb{E}$

Im Folgenden wollen wir die Automorphismengruppe des (offenen) Einheitskreises

$$\mathbb{E} = K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

bestimmen. (Man findet auch die Schreibweise $\mathbb{D}$.) Das folgende Lemma von Schwarz spielt eine zentrale Rolle bei der Bestimmung von $\operatorname{Aut}(\mathbb{E})$.

LEMMA (Schwarz). Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ holomorph mit $f(0) = 0$.

(1) Es gilt

$$|f(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

(2) Gibt es ein $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}^*$ mit

$$f(z) = \zeta z \quad \text{und} \quad |\zeta| = 1.$$

Man kann schreiben $\zeta = e^{i\varphi}$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und erhält dann die Darstellung

$$f(z) = e^{i\varphi} z.$$

(f ist also die Drehung um den Winkel φ mit Drehzentrum 0.)

(3) Es ist $|f'(0)| \leq 1$.

(4) Ist $|f'(0)| = 1$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und $f(z) = \zeta z$ für alle $z \in \mathbb{E}$.

Beweis:

- (0) • Da $z = 0$ eine Nullstelle von $f(z)$ ist, gibt es eine holomorphe Funktion $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ mit
- $$f(z) = z \cdot g(z) \text{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Nur zur Erinnerung: Ist

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

die Potenzreihenentwicklung von $f(z)$ im Nullpunkt, so ist

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n.$$

- *Behauptung:* Es gilt $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$.
Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{E}$ ein beliebiger Punkt. Sei $r \in \mathbb{R}$ mit $|z_0| < r < 1$. Wir betrachten die Funktion g auf $\overline{K_r(0)}$. Ist g nicht konstant, so nimmt g nach dem Maximumprinzip sein Betragsmaximum auf dem Rand an, d.h. es gibt ein $z_r \in \overline{K_r(0)}$ mit $|z_r| = r$ und (insbesondere) $|g(z_0)| \leq |g(z_r)|$. Ist g konstant gilt natürlich trivialerweise $|g(z_0)| \leq |g(z_r)|$. Es folgt

$$|g(z_0)| \leq |g(z_r)| = \frac{|f(z_r)|}{|z_r|} < \frac{1}{r},$$

und damit

$$r \cdot |g(z_0)| < 1.$$

Da dies für alle r mit $|z_0| < r < 1$ gilt, ergibt sich für $r \rightarrow 1$

$$|g(z_0)| \leq 1.$$

Da $z_0 \in \mathbb{E}$ beliebig gewählt werden konnte, folgt die Behauptung.

- (1) Mit $f(z) = zg(z)$ und $|g(z)| \leq 1$ folgt sofort $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{E}$.
- (2) Sei $z_0 \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit $|f(z_0)| = |z_0|$. Dann ist $|g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1$. Wäre $g(z)$ nicht konstant, so wäre $g(\mathbb{E})$ eine offene Teilmenge von $\overline{K_1(0)}$, dann könnte aber $g(z_0)$ nicht auf dem Rand liegen. Daher muss $g(z)$ konstant sein. Mit $\zeta = g(z) = g(z_0)$ folgt dann $f(z) = zg(z) = z\zeta$, also die Behauptung.
- (3) Aus $f(z) = zg(z)$ folgt $f'(z) = g(z) + zg'(z)$, also $f'(0) = g(0)$. Aus $|g(z)| \leq 1$ folgt dann $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$.
- (4) Ist $|f'(0)| = 1$, so ist $|g(0)| = |f'(0)| = 1$. Wegen $|g(z)| \leq 1$ muss dann $g(z)$ wieder konstant sein. Der Rest folgt wie im Beweis von (2). ■

FOLGERUNG. Ist $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit $f(0) = 0$, so gibt es ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und

$$f(z) = \zeta z \text{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

(Schreibt man $\zeta = e^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$, so sieht man, dass

$$f(z) = e^{i\varphi} z$$

gilt, dass also f eine Drehung um den Winkel φ mit Drehzentrum 0 ist.)

Beweis: Wir haben also holomorphe Abbildungen $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ und $f^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(0) = 0$ und $f^{-1}(0) = 0$. Das Lemma von Schwarz liefert für f und f^{-1}

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f^{-1}(z)| \leq |z|.$$

Ersetzen wir in der zweiten Abschätzung z durch $f(z)$, so erhalten wir

$$|f^{-1}(f(z))| \leq |f(z)|, \quad \text{also} \quad |z| \leq |f(z)|.$$

Zusammen mit der ersten Abschätzung folgt

$$|f(z)| = |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{E}.$$

Der zweite Teil im Lemma von Schwarz liefert ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und $f(z) = \zeta z$, wie behauptet. ■

Im folgenden Lemma lernen wir weitere Automorphismen von $\mathbb{E}$ kennen, die sich durch Möbius-Transformationen beschreiben lassen:

LEMMA. Für $a \in \mathbb{E}$ definiert

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$$

eine Möbius-Transformation.

(1) Es gilt

$$\varphi_a^{-1} = \varphi_a, \quad \text{also} \quad \varphi_a \circ \varphi_a = \text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}$$

und

$$\varphi_a(0) = a \quad \text{und} \quad \varphi_a(a) = 0.$$

(2) Es gilt

$$\varphi_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E},$$

und damit

$$\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{E}).$$

Beweis:

(1) φ_a wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ \bar{a} & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Es ist

$$\det(A) = -1 + a\bar{a} = |a|^2 - 1 < 0$$

wegen $|a| < 1$. Also liegt tatsächlich eine Möbius-Transformation vor. Mit den Formeln für die inverse Möbius-Transformation finden wir

$$\varphi_a^{-1}(z) = \frac{-z + a}{-\bar{a}z + 1} = \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} = \varphi_a(z),$$

wie behauptet.

(2) Wir betrachten die Bilder der Kreispunkte $1, i, -1$ unter φ_a :

$$\varphi_a(1) = \frac{1 - a}{\bar{a} - 1}, \quad \varphi_a(i) = \frac{i - a}{\bar{a}i - 1}, \quad \varphi_a(-1) = \frac{-1 - a}{-\bar{a} - 1}.$$

Da komplexe Konjugation den Absolutbetrag nicht ändert, gilt

$$\begin{aligned} |\bar{a} - 1| &= |a - 1| = |1 - a|, \\ |\bar{a}i - 1| &= |-ai - 1| = |-ai + i^2| = |i||i - a| = |i - a|, \\ |-\bar{a} - 1| &= |-a - 1| = |-1 - a|. \end{aligned}$$

Es folgt

$$|\varphi_a(1)| = |\varphi_a(i)| = |\varphi_a(-1)| = 1,$$

also

$$\varphi_a(1), \varphi_a(i), \varphi_a(-1) \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Daher wird $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ durch φ_a auf sich selbst abgebildet. Es folgt $\varphi_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$ oder $\varphi_a(\mathbb{E}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$. Wegen $\varphi_a(a) = 0$ und $a \in \mathbb{E}$ bleibt nur die Möglichkeit $\varphi_a(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$. ■

FOLGERUNG. Zu $a, b \in \mathbb{E}$ gibt es einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ mit

$$\varphi(a) = b,$$

beispielsweise $\varphi_b \circ \varphi_a$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir alle Automorphismen von $\mathbb{E}$ beschreiben:

SATZ. *Es gilt*

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1} : a, \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < 1 \text{ und } |\zeta| = 1 \right\}.$$

In der Darstellung $f(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ sind ζ und a durch f eindeutig bestimmt, es gilt nämlich

$$a = f^{-1}(0) \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{f'(0)}{1-|a|^2}.$$

Beweis:

- (1) $\supseteq$ Dies ist nach den Vorbereitungen klar.
(2) $\subseteq$ Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ und $a = f^{-1}(0) \in \mathbb{E}$. Dann gilt für $f \circ \varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{E})$

$$(f \circ \varphi_a)(0) = f(\varphi_a(0)) = f(a) = 0,$$

also gibt es nach dem Lemma von Schwarz ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und

$$(f \circ \varphi_a)(z) = \zeta z.$$

Ersetzen wir z durch $\varphi_a(z)$, so folgt mit $\varphi_a \circ \varphi_a = \text{id}_{\mathbb{E}}$ sofort

$$f(z) = \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1},$$

was noch zu zeigen war.

Für $f(z) = \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ gilt

$$f'(z) = \zeta \frac{(\bar{a}z-1) - (z-a)\bar{a}}{(\bar{a}z-1)^2} = \zeta \frac{a\bar{a}-1}{(\bar{a}z-1)^2}, \quad \text{also} \quad f'(0) = \zeta(|a|^2-1).$$

Es ist also

$$a = f^{-1}(0) \quad \text{und} \quad \zeta = -\frac{f'(0)}{1-|a|^2}.$$

Dies zeigt, dass a und ζ durch f eindeutig bestimmt sind. ■

Bemerkungen:

- (1) **Achtung:** Wählt man in der Darstellung $f(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ die Zahl $a = 0$, so erhält man $f(z) = -\zeta z$ (und nicht $z \mapsto \zeta z$).
(2) Schreiben wir

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \quad \text{und} \quad \mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

so liefert der letzte Satz eine Bijektion

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) \rightarrow S^1 \times \mathbb{E}, \quad (z \mapsto \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}) \mapsto (\zeta, a).$$

Da $\text{Aut}(\mathbb{E})$ eine Gruppe ist, kann man auf $S^1 \times \mathbb{E}$ eine Gruppenstruktur so einführen, dass $\text{Aut}(\mathbb{E}) \rightarrow S^1 \times \mathbb{E}$ ein Gruppenisomorphismus ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \zeta_1 & -\zeta_1 a_1 \\ \bar{a}_1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \zeta_2 & -\zeta_2 a_2 \\ \bar{a}_2 & -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \zeta_1 \zeta_2 - \zeta_1 a_1 \bar{a}_2 & \zeta_1 a_1 - \zeta_1 \zeta_2 a_2 \\ \zeta_2 \bar{a}_1 - \bar{a}_2 & -\zeta_2 a_2 \bar{a}_1 + 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \zeta_1(\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2) & \zeta_1(a_1 - \zeta_2 a_2) \\ \zeta_2 \bar{a}_1 - \bar{a}_2 & -(\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1) \end{pmatrix} = \\ &= (\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1) \begin{pmatrix} \zeta_1 \frac{\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} & \zeta_1 \frac{a_1 - \zeta_2 a_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} \\ \frac{\zeta_2 \bar{a}_1 - \bar{a}_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für das Produkt $(\zeta, a) = (\zeta_1, a_1) \cdot (\zeta_2, a_2)$ sollte dann gelten:

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_1 \frac{\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} = \zeta_1 \zeta_2 \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_2 a_1 \bar{a}_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} = -\zeta_1 \zeta_2 \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_2 a_1 \bar{a}_2}{1 - \zeta_2 \bar{a}_1 a_2}, \\ a &= -\frac{1}{\zeta} \cdot \zeta_1 \frac{a_1 - \zeta_2 a_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} = -\frac{1}{\zeta_1} \cdot \frac{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1}{\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2} \cdot \zeta_1 \cdot \frac{a_1 - \zeta_2 a_2}{\zeta_2 \bar{a}_1 a_2 - 1} = \\ &= -\frac{a_1 - \zeta_2 a_2}{\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2} = \frac{\zeta_2 a_2 - a_1}{\zeta_2 - a_1 \bar{a}_2}. \end{aligned}$$

Hier ist noch eine Anwendung des Lemmas von Schwarz und der Automorphismen φ_a :

LEMMA (Schwarz-Pick). *Ist $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ holomorph, so gilt*

$$\frac{|f'(a)|}{1 - |f(a)|^2} \leq \frac{1}{1 - |a|^2} \quad \text{für alle } a \in \mathbb{E}.$$

Beweis: Durch

$$F(z) = \varphi_{f(a)} \circ f \circ \varphi_a$$

wird eine holomorphe Funktion $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ definiert. Es ist

$$F(0) = \varphi_{f(a)}(f(\varphi_a(0))) = \varphi_{f(a)}(f(a)) = 0.$$

Wir können also das Schwarzsche Lemma anwenden. Mit

$$\varphi'_a(z) = \frac{|a|^2 - 1}{(\bar{a}z - 1)^2}$$

erhalten wir mit der Kettenregel für das Differenzieren

$$\begin{aligned} F'(0) &= \varphi'_{f(a)}(f(\varphi_a(0))) \cdot f'(\varphi_a(0)) \cdot \varphi'_a(0) = \varphi'_{f(a)}(f(a)) \cdot f'(a) \cdot \varphi'_a(0) = \\ &= \frac{|f(a)|^2 - 1}{(\overline{f(a)}f(a) - 1)^2} \cdot f'(a) \cdot (|a|^2 - 1) = \frac{|f(a)|^2 - 1}{(|f(a)|^2 - 1)^2} \cdot f'(a) \cdot (|a|^2 - 1) = \\ &= f'(a) \cdot \frac{|a|^2 - 1}{|f(a)|^2 - 1} = f'(a) \cdot \frac{1 - |a|^2}{1 - |f(a)|^2}. \end{aligned}$$

Das Schwarzsche Lemma liefert $|F'(0)| \leq 1$, woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Anwendungsbeispiel: Sei $a \in (-1, 1)$, also $a \in \mathbb{R}$ mit $|a| < 1$. Wir betrachten

$$U_a = \mathbb{E} \setminus [a, 1).$$

Aus $\mathbb{E}$ wurde also die Strecke $[a, 1)$ entfernt. Wir wollen zeigen, dass

$$f(z) = -\frac{z - a}{az - 1}$$

eine biholomorphe Abbildung

$$U_a \rightarrow U_0$$

definiert.

An der Gestalt von f sehen wir, dass $f \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ gilt. Nun ist $f(1) = 1$ und $f(a) = 0$ und $f(-1) = -1$. Ist $K = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, so gilt also $f(K) = K$. Die Strecke $(a, 1)$ ist eine Zusammenhangskomponente von $K \setminus \{1, a\}$, die den Punkt -1 nicht enthält. Also ist $f((a, 1))$ eine Zusammenhangskomponente von $K \setminus \{0, 1\}$, die den Punkt -1 nicht enthält. Also gilt $f((a, 1)) = (0, 1)$. Daher liefert f eine bijektive Abbildung $U_a \rightarrow U_0$, woraus die Behauptung folgt.

Bemerkung: Gruppentheoretisch gibt es eine „schönere“ Beschreibung von $\text{Aut}(\mathbb{E})$. Wir betrachten

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ \bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}) : |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\} \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Man rechnet nach, dass es sich um eine Gruppe handelt. Sie wird manchmal mit $\text{SU}(1, 1)$ bezeichnet.

SATZ. *Es gilt*

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}} : u, v \in \mathbb{C} \text{ mit } |u|^2 - |v|^2 = 1 \right\}.$$

Der Beweis ergibt sich aus folgendem Lemma:

LEMMA. (1) Sind $u, v \in \mathbb{C}$ mit $|u|^2 - |v|^2 = 1$, definiert man

$$\zeta = -\frac{u}{\bar{u}}, \quad a = -\frac{v}{u},$$

so gilt

$$|\zeta| = 1, \quad |a| < 1 \quad \text{und} \quad \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}} = \zeta \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

(2) Sind $\zeta, a \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und $|a| < 1$, schreibt man $\zeta = e^{i\varphi}$ (mit $\varphi \in \mathbb{R}$), definiert man

$$u = \frac{1}{\sqrt{1 - |a|^2}} \cdot i \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad v = -ua,$$

so gilt

$$|u|^2 - |v|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \zeta \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} = \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}}.$$

Beweis:

(1) Seien $u, v \in \mathbb{C}$ mit $|u|^2 - |v|^2 = 1$ und $f(z) = \frac{uz+v}{\bar{v}z+\bar{u}}$. Dann gilt:

$$f(z) = \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}} = \frac{u}{\bar{u}} \cdot \frac{z + \frac{v}{u}}{\frac{\bar{v}}{\bar{u}}z + 1} = \left(-\frac{u}{\bar{u}}\right) \cdot \frac{z - \left(-\frac{v}{u}\right)}{\left(-\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)z - 1}$$

Setzen wir

$$\zeta = -\frac{u}{\bar{u}}, \quad a = -\frac{v}{u},$$

so erhalten wir

$$f(z) = \zeta \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

Es gilt außerdem

$$|\zeta| = 1 \quad \text{und} \quad |a| = \frac{|v|}{|u|} < 1.$$

(2) Es ist

$$\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{1 - |a|^2}} \cdot (-i) \cdot e^{-i\frac{\varphi}{2}}, \quad \frac{u}{\bar{u}} = \frac{i \cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}}{-i \cdot e^{-i\frac{\varphi}{2}}} = -e^{i\varphi} = -\zeta.$$

Also:

$$u = -\zeta \bar{u}, \quad v = -ua = \zeta \bar{u}a.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{uz + v}{\bar{v}z + \bar{u}} &= \frac{-\zeta \bar{u}z + \zeta \bar{u}a}{\zeta \bar{u} \bar{a}z - \zeta \bar{u}} = \frac{-\zeta \bar{u}}{\zeta \bar{u}} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} = \frac{-\zeta \bar{u}}{\zeta \cdot (-\zeta \bar{u})} \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} = \\ &= \zeta \cdot \frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \end{aligned}$$

und

$$|u|^2 - |v|^2 = |u|^2 - |u|^2 |a|^2 = |u|^2 \cdot (1 - |a|^2) = \frac{1}{1 - |a|^2} \cdot (1 - |a|^2) = 1.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

3. Die Automorphismen der oberen Halbebene - $\text{Aut}(\mathbb{H})$

Überlegungen:

(1) Wir kennen

$$\text{Aut}(\mathbb{E}) = \left\{ z \mapsto \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1} : a, \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < 1 \text{ und } |\zeta| = 1 \right\}.$$

Ist $f(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$, so ist $\zeta = -f(0)$ und $a = f^{-1}(0)$, ζ und a sind also durch f eindeutig bestimmt. Wir schreiben

$$\varphi_{\zeta,a}(z) = \zeta \cdot \frac{z-a}{\bar{a}z-1}.$$

(2) Wir wissen, dass

$$\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

biholomorph ist. Es folgt

$$\text{Aut}(\mathbb{H}) = \{ \lambda^{-1} \circ \varphi_{\zeta,a} \circ \lambda : a, \zeta \in \mathbb{C} \text{ mit } |a| < 1 \text{ und } |\zeta| = 1 \}.$$

(3) Es gilt

$$\lambda(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

und

$$\varphi_{\zeta,a}(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Es folgt

$$(\lambda^{-1} \circ \varphi_{\zeta,a} \circ \lambda)(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(4) Wir wissen, dass sich die Möbius-Transformationen f mit $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ schreiben lassen als

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad-bc \neq 0.$$

(a, b, c, d sind nur bis auf eine Konstante bestimmt.) Es ist

(5) Sei

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(i) &= \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(-ci+d)}{(ci+d)(-ci+d)} = \frac{(ac+bd) + i(ad-bc)}{|ci+d|^2} = \\ &= \frac{ac+bd}{|ci+d|^2} + i \cdot \frac{ad-bc}{|ci+d|^2}. \end{aligned}$$

Es muss $\text{Im}(f(i)) > 0$, also $ad-bc > 0$ gelten. Dies liefert folgenden Satz:

SATZ. Für die Automorphismengruppe der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ gilt

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{H}) &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R}) \right\} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } ad-bc = 1 \right\} = \\ &= \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ und } ad-bc > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz macht eine Aussage über die Fixpunkte eines Automorphismus von $\mathbb{H}$:

SATZ. Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}}\}$ und $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (und $ad-bc > 0$). Dann gilt:

- (1) Ist $(a+d)^2 < 4(ad-bc)$, so hat f genau einen Fixpunkt in $\mathbb{H}$.
- (2) Ist $(a+d)^2 \geq 4(ad-bc)$, so hat f keinen Fixpunkt in $\mathbb{H}$.

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Beispiel: Die Translationen $f(z) = z + b$ (mit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) sind fixpunktfreie Automorphismen von $\mathbb{H}$.

4. Die biholomorphen Abbildungen $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$

Wir kennen bereits die sogenannte Cayley-Abbildung

$$\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E} \text{ mit } \lambda(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

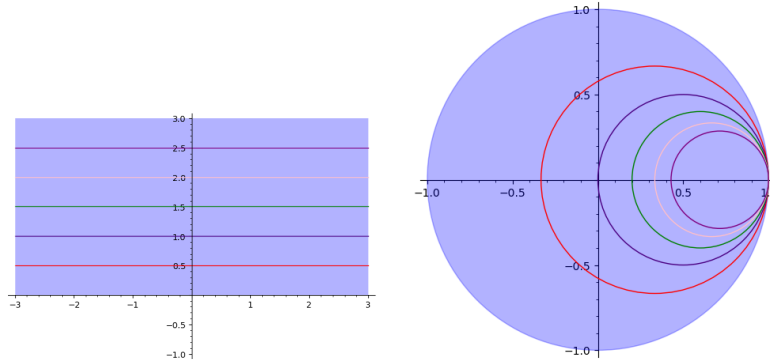
Der folgende Satz beschreibt das Bild der zur reellen Achse parallelen Geraden $\text{Im}(z) = h$ unter λ :

SATZ. Für $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ mit $\lambda(z) = \frac{z-i}{z+i}$ und $h \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$\lambda(\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = h\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{h}{h+1} \right| = \frac{1}{h+1} \right\} \setminus \{1\}.$$

Das Bild ist also ein Kreis mit Mittelpunkt $\frac{h}{h+1}$ und Radius $\frac{1}{h+1}$ ohne den Punkt 1.

Beispiele:



Beweis: Da $\lambda(z) = \frac{z-i}{z+i}$ eine Möbiustransformation ist, wird für $h \in \mathbb{R}_{>0}$ die verallgemeinerte Gerade

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = h\} \cup \{\infty\}$$

auf einen Kreis abgebildet, bis auf den Punkt $1 = \lambda(\infty)$. Nun findet man für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| \lambda(x+ih) - \frac{h}{h+1} \right| &= \left| \frac{(x+ih)-i}{(x+ih)+i} - \frac{h}{h+1} \right| = \left| \frac{x+i(h-1)}{x+i(h+1)} - \frac{h}{h+1} \right| = \\ &= \left| \frac{(x+i(h-1))(h+1) - (x+i(h+1))h}{(x+i(h+1))(h+1)} \right| = \\ &= \left| \frac{x(h+1) + i(h^2-1) - xh - i(h^2+h)}{x(h+1) + i(h+1)^2} \right| = \\ &= \left| \frac{x-i(1+h)}{(h+1)(x+i(h+1))} \right| = \frac{1}{h+1} \left| \frac{x-i(h+1)}{x+i(h+1)} \right| = \frac{1}{h+1}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lambda(\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = h\} \cup \{\infty\}) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \frac{h}{h+1} \right| = \frac{1}{h+1} \right\}.$$

Mit $\lambda(\infty) = 1$ folgt die Behauptung. ■

Die Cayley-Abbildung $\lambda(z) = \frac{z-i}{z+i}$ ist ein Beispiel einer biholomorphen Abbildung $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$. Der folgende Satz beschreibt alle biholomorphen Abbildungen $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$:

SATZ. Die biholomorphen Abbildung $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ werden durch die Möbius-Transformationen folgenden Bauart beschreiben:

$$f(z) = \zeta \frac{z-b}{z-\bar{b}} \text{ mit } \zeta \in \mathbb{C}, |\zeta| = 1 \text{ und } b \in \mathbb{H}.$$

Beweisskizze: Sei $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph. Dann ist $f \circ \lambda^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph, es gibt also $a, \zeta \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$, $|\zeta| = 1$ und

$$(f \circ \lambda^{-1})(z) = \zeta \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}.$$

Sei $b = \lambda^{-1}(a) \in \mathbb{H}$. Setzen wir statt z nun $\lambda(z)$ mit $z \in \mathbb{H}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(z) &= (f \circ \lambda^{-1})(\lambda(z)) = \zeta \frac{\lambda(z) - a}{\bar{a}\lambda(z) - 1} = \zeta \frac{\lambda(z) - \lambda(b)}{\overline{\lambda(b)}\lambda(z) - 1} = \\ &= \zeta \frac{\frac{z-i}{z+i} - \frac{b-i}{b+i}}{\frac{\bar{b}+i}{\bar{b}-i} \frac{z-i}{z+i} - 1} = \zeta \frac{z-i - \frac{b-i}{b+i}(z+i)}{\frac{\bar{b}+i}{\bar{b}-i}(z-i) - (z+i)} = \\ &= \zeta \frac{\bar{b}+i}{b+i} \frac{z-b}{z-\bar{b}} \end{aligned}$$

Wegen $|\zeta \frac{\bar{b}+i}{b+i}| = 1$ hat $f(z)$ die behauptete Gestalt. ■

5. Die Automorphismen von $\mathbb{C}$ - $\text{Aut}(\mathbb{C})$

Diese haben wir bereits bestimmt:

SATZ. Für die Automorphismen von $\mathbb{C}$ gilt

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}.$$

Der Riemannsche Abbildungssatz

1. Einführung

Bemerkungen:

- (1) Einfach zusammenhängende Gebiete G in $\mathbb{C}$ lassen sich funktionentheoretisch dadurch charakterisieren, dass jede holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Stammfunktion besitzt.
- (2) Beispiele einfach zusammenhängender Gebiete in $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}, \quad \mathbb{H}, \quad \mathbb{E}, \quad \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad \mathbb{C} \setminus [-1, 1], \quad \dots$$

- (3) Ist G ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so muss $f(G)$ nicht einfach zusammenhängend sein, wie das Beispiel

$$G = \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z, \quad f(G) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

zeigt.

- (4) Ist $f : G \rightarrow H$ eine biholomorphe Abbildung zwischen Gebieten G und H , so gilt:

$$G \text{ einfach zusammenhängend} \iff H \text{ einfach zusammenhängend.}$$

Beweis: Wir zeigen dies funktionentheoretisch. Sei G einfach zusammenhängend. Wir zeigen, dass auch H einfach zusammenhängend ist. Sei also $h : H \rightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige holomorphe Funktion. Wir müssen zeigen, dass sie eine Stammfunktion besitzt. Wir betrachten die holomorphe Funktion $G \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(f(z)) \cdot f'(z)$. Da G einfach zusammenhängend sein soll, gibt es eine Funktion $F : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F'(z) = h(f(z)) \cdot f'(z)$. Wir betrachten jetzt die Funktion $L = F \circ f^{-1} : H \rightarrow \mathbb{C}$, also $L(z) = F(f^{-1}(z))$. Es ist

$$\begin{aligned} L'(z) &= F'(f^{-1}(z)) \cdot (f^{-1})'(z) = h(f(f^{-1}(z))) \cdot f'(f^{-1}(z)) \cdot (f^{-1})'(z) = \\ &= h(z) \cdot (f \circ f^{-1})'(z) = h(z). \end{aligned}$$

Also ist L eine Stammfunktion von h . Dies beweist, dass auch H einfach zusammenhängend ist. Die Umkehrung ist dann natürlich auch klar.

- (5) Wir haben bereits einige Beispiele biholomorpher Abbildungen (einfach zusammenhängender Gebiete) gesehen:

$$\mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{E}, \quad \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}, \quad \dots$$

- (6) $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind nicht biholomorph äquivalent. Ist nämlich $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{E}$ irgendeine holomorphe Funktion, so ist diese nach dem Satz von Liouville konstant.
- (7) Das Erstaunliche ist nun, dass es bezüglich biholomorpher Äquivalenz nur zwei Äquivalenzklassen einfach zusammenhängender Gebiete in $\mathbb{C}$ gibt. Es gilt nämlich

$$G \subseteq \mathbb{C} \text{ einfach zusammenhängend} \implies G \simeq \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{falls } G = \mathbb{C}, \\ \mathbb{E}, & \text{falls } G \subsetneq \mathbb{C}. \end{cases}$$

Dies ist im Wesentlichen der Inhalt des Riemannschen Abbildungssatzes:

SATZ (Riemannscher Abbildungssatz). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $G \neq \mathbb{C}$. Dann ist G biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$, d.h. es gibt eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$.*

Wir werden später noch Varianten des Satzes angeben, bei der zusätzliche Bedingungen an die biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ gestellt werden.

Der Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes wird in mehreren Schritten erfolgen.

2. Reduktion von $G \subsetneq \mathbb{C}$ zu $G \subseteq \mathbb{E}$

Wir wollen zunächst zeigen, dass wir jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subsetneq \mathbb{C}$ biholomorph auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{E}$ abbilden können. Wir machen dies schrittweise.

LEMMA (I). *Ist $G \subsetneq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und $z_0 \notin G$ und $z_1 \in G$, so ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$$

injektiv holomorph mit $f(z_0) = 0$ und $f(z_1) = 1$. Insbesondere ist $f(G)$ biholomorph äquivalent zu G mit $0 \notin f(G)$ und $1 \in f(G)$.

Beweis: Klar. ■

Das folgende Lemma benützt den Logarithmus, um ein einfach zusammenhängendes Gebiet nach $\mathbb{E}$ abzubilden.

LEMMA (II). *Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend mit $0 \notin G$ und $1 \in G$.*

- (1) *Für $a \in G$ sei $\gamma_{1,a}$ eine ganz in G verlaufende, stückweise glatte Kurve mit Anfangspunkt 1 und Endpunkt a . Dann definiert $\ell : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\ell(a) = \int_{\gamma_{1,a}} \frac{dz}{z}$$

eine injektive holomorphe Funktion mit

$$e^{\ell(z)} = z \quad \text{und} \quad \ell'(z) = \frac{1}{z} \quad \text{für alle } z \in G.$$

- (2) *$\ell : G \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine injektive holomorphe Funktion, $\ell(G)$ ein Gebiet mit $0 \in \ell(G)$.*
 (3) *Ist $r > 0$ mit $K_r(0) \subseteq \ell(G)$, so gilt*

$$|\ell(z) - 2\pi i| > r \quad \text{für alle } z \in G.$$

- (4) *Durch*

$$f(z) = \frac{r}{\ell(z) - 2\pi i}$$

wird eine injektive holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ definiert mit

$$|f(z)| < 1 \quad \text{für alle } z \in G.$$

Insbesondere ist G biholomorph äquivalent zu $f(G)$ mit

$$f(G) \subseteq \mathbb{E}.$$

Beweis:

- (1) Da G einfach zusammenhängend ist mit $0 \notin G$, besitzt die auf G holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion, die sich wie angegeben beschreiben lässt. Es handelt sich um einen Zweig des Logarithmus auf G .
 (2) Zur Injektivität: Sind $z_1, z_2 \in G$ mit $\ell(z_1) = \ell(z_2)$, so folgt sofort $z_1 = e^{\ell(z_1)} = e^{\ell(z_2)} = z_2$, was die Injektivität beweist. Der Satz von der Gebietstreue liefert, dass $\ell(G)$ ein Gebiet ist. Wegen $\ell(1) = 0$ ist $0 \in \ell(G)$.

- (3) Annahmen, es gibt ein $z_1 \in G$ mit $|\ell(z_1) - 2\pi i| \leq r$. Da $\ell(G)$ offen ist, gibt es dann sogar ein $z_2 \in G$ mit $|\ell(z_2) - 2\pi i| < r$. Dann ist

$$\ell(z_2) - 2\pi i \in K_r(0) \subseteq \ell(G),$$

es gibt also ein $z_3 \in G$ mit

$$\ell(z_2) - 2\pi i = \ell(z_3).$$

Es folgt

$$z_2 = e^{\ell(z_2)} = e^{\ell(z_2) - 2\pi i} = e^{\ell(z_3)} = z_3,$$

insbesondere also $\ell(z_2) = \ell(z_3)$, was im Widerspruch zu $\ell(z_2) - 2\pi i = \ell(z_3)$ steht. Die Annahme ist falsch, die Behauptung also richtig.

- (4) Aus $|\ell(z) - 2\pi i| > r$ folgt

$$\left| \frac{r}{\ell(z) - 2\pi i} \right| < 1 \text{ für alle } z \in G.$$

Also definiert $f(z) = \frac{r}{\ell(z) - 2\pi i}$ eine holomorphe Funktion $G \rightarrow \mathbb{E}$. Da $\ell(z)$ injektiv ist, ist auch $f(z)$ injektiv. Da f injektiv und holomorph ist, ist $f(G)$ biholomorph äquivalent zu G , wobei nun $f(G) \subseteq \mathbb{E}$ gilt. ■

LEMMA (III). Ist $G \subseteq \mathbb{E}$ einfach zusammenhängend mit $a \in G$, so ist G biholomorph äquivalent zu $\varphi_a(G)$ mit $0 \in \varphi_a(G)$. (Dabei ist $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{az-1}$ und $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{E})$.)

Beweis: Klar. ■

LEMMA (IV). Ist $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist G biholomorph äquivalent zu einem Gebiet $\tilde{G} \subseteq \mathbb{E}$ mit $0 \in \tilde{G}$.

Beweis: Dies ergibt sich sofort aus Anwendung von Lemma I, II, III auf G . ■

3. Funktionen auf einfach zusammenhängenden Gebiete in $\mathbb{E}$

Wir betrachten jetzt einfach zusammenhängende Gebiete $G \subseteq \mathbb{E}$, die die 0 enthalten. Wir suchen nach injektiven holomorphen Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{E}$, sodass $f(G)$ möglichst groß ist.

DEFINITION. Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subseteq \mathbb{E}$ mit $0 \in G$ definieren wir

$$\mathcal{F}_G = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ injektiv holomorph mit } f(0) = 0 \text{ und } f(G) \subseteq \mathbb{E}\}$$

und

$$A_G = \{f'(0) \in \mathbb{C} : f \in \mathcal{F}_G\}$$

und

$$s_G = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}_G\}.$$

LEMMA (V). Sei $G \subseteq \mathbb{E}$ einfach zusammenhängend mit $0 \in G$.

- (1) Es ist $\text{id}_G \in \mathcal{F}_G$ und $1 \in A_G$.
- (2) Es ist $0 \notin A_G$.
- (3) Für $f \in \mathcal{F}_G$ und $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 < r \leq 1$ ist

$$(z \mapsto re^{i\varphi} f(z)) \in \mathcal{F}_G \quad \text{und} \quad re^{i\varphi} f'(0) \in A_G.$$

- (4) Ist $a \in A_G$, so gilt

$$\overline{K_{|a|}(0)} \setminus \{0\} \subseteq A_G.$$

(5) Ist $\delta > 0$ mit $\overline{K_\delta(0)} \subseteq G$, so gilt für $f \in \mathcal{F}_G$

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{\delta}$$

und

$$A_G \subseteq \overline{K_{\frac{1}{\delta}}(0)}.$$

(6) Es gilt

$$1 \leq s_G \leq \frac{1}{\delta}.$$

Beweis:

(1) Wegen $\text{id}_G \in \mathcal{F}_G$ ist $1 \in A_G$.

(2) Ist $f \in \mathcal{F}_G$, so ist f injektiv, also $f'(0) \neq 0$. Daher ist $0 \notin A_G$.

(3) Ist $f \in \mathcal{F}_G$, sind $r, \varphi \in \mathbb{R}$ mit $0 < r \leq 1$, so ist auch g mit

$$g(z) = re^{i\varphi}f(z)$$

in $\mathcal{F}_G$ und

$$g'(0) = re^{i\varphi}f'(0).$$

(4) Dies folgt sofort aus (3).

(5) Wegen $0 \in G$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\overline{K_\delta(0)} \subseteq G$. Sei $f \in \mathcal{F}_G$. Wir schreiben $f'(0)$ mit Hilfe der Cauchy-Integralformeln:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\delta} \frac{f(z)}{(z-0)^2} dz.$$

Wegen $f(G) \subseteq \mathbb{E}$ und $|z| = \delta$ können wir für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \delta$ leicht abschätzen:

$$\left| \frac{f(z)}{z^2} \right| = \frac{|f(z)|}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

Die Standardabschätzung liefert

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\delta^2} \cdot 2\pi\delta = \frac{1}{\delta}.$$

Es folgt

$$A_G \subseteq \overline{K_{\frac{1}{\delta}}(0)}.$$

Daher existiert

$$s = \sup\{|a| \in A_G\}$$

und es gilt $1 \leq s \leq \frac{1}{\delta}$. Es folgt

$$A_G = K_s(0) \setminus \{0\} \quad \text{oder} \quad A_G = \overline{K_s(0)} \setminus \{0\}.$$

(6) Dies folgt aus (1) und (5). ■

Das folgende Lemma dient nur zur Vorbereitung des nächsten Lemmas. Wir suchen für ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G \subsetneq \mathbb{E}$ mit $0 \in G$ eine Funktion $\psi \in \mathcal{F}_G$ mit $|\psi'(0)| > 1$.

LEMMA (VI). Ist $G \subseteq \mathbb{E}$ einfach zusammenhängend mit $0 \in G$ und $a \notin G$, so definiert

$$\psi(z) = \varphi_{\sqrt{a}}(\sqrt{\varphi_a(z)})$$

eine injektive holomorphe Funktion mit

$$\psi(G) \subseteq \mathbb{E}, \quad 0 \in \psi(G) \quad \text{und} \quad |\psi'(0)| > 1.$$

Dabei ist $z \mapsto \sqrt{z}$ eine Wurzel auf der einfach zusammenhängenden Menge $\varphi_a(G)$, die die 0 nicht enthält.

Beweis:

(1) Die Funktion

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$$

hat keine Nullstelle in G . Auch $\varphi_a(G)$ ist einfach zusammenhängend, enthält aber nicht die 0. Also gibt es eine holomorphe Wurzel auf $\varphi_a(G)$, die wir einfach mit $\sqrt{}$ bezeichnen.

(2) Es ist

$$\begin{aligned}\varphi'_a(z) &= \frac{(\bar{a}z - 1) - (z - a)\bar{a}}{(\bar{a}z - 1)^2} = \frac{|a|^2 - 1}{(\bar{a}z - 1)^2}, \\ \varphi'_a(0) &= |a|^2 - 1, \\ \varphi'_a(a) &= \frac{|a|^2 - 1}{(\bar{a}a - 1)^2} = \frac{|a|^2 - 1}{(|a|^2 - 1)^2} = \frac{1}{|a|^2 - 1}.\end{aligned}$$

Die Funktion $z \mapsto \sqrt{\varphi_a(z)}$ bildet 0 auf $\sqrt{a}$ ab. Daher gilt für

$$\psi(z) = \varphi_{\sqrt{a}}(\sqrt{\varphi_a(z)})$$

$\psi(0) = 0$. Es ist

$$\begin{aligned}\psi'(z) &= \varphi'_{\sqrt{a}}(\sqrt{\varphi_a(z)}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varphi_a(z)}} \cdot \varphi'_a(z) \\ \psi'(0) &= \varphi'_{\sqrt{a}}(\sqrt{\varphi_a(0)}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\varphi_a(0)}} \cdot \varphi'_a(0) = \varphi'_{\sqrt{a}}(\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (|a|^2 - 1) = \\ &= \frac{1}{|\sqrt{a}|^2 - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (|a|^2 - 1) = \frac{|a|^2 - 1}{(|a| - 1) \cdot 2\sqrt{a}} = \frac{1 + |a|}{2\sqrt{a}}.\end{aligned}$$

Es ist

$$|\sqrt{a}|^2 = |\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}| = |a|, \quad \text{also} \quad |\sqrt{a}| = \sqrt{|a|}.$$

Daher folgt

$$|\psi'(0)| = \frac{1 + |a|}{2\sqrt{|a|}} = 1 + \frac{1 - 2\sqrt{|a|} + |a|}{2\sqrt{|a|}} = 1 + \frac{(1 - \sqrt{|a|})^2}{2\sqrt{|a|}} > 1.$$

Dies beweist die Behauptung. ■

LEMMA (VII). Sei $G \subseteq \mathbb{E}$ einfach zusammenhängend mit $0 \in G$ und $f \in \mathcal{F}_G$. Ist $f(G) \subsetneq \mathbb{E}$, wählt man $a \in \mathbb{E} \setminus f(G)$ und ψ passend zu $f(G)$ und a wie im letzten Lemma, so ist $g = \psi \circ f \in \mathcal{F}_G$ mit $|g'(0)| > |f'(0)|$.

Beweis: Für $g = \psi \circ f$ gilt:

$$g'(0) = \psi'(f(0)) \cdot f'(0) = \psi'(0) \cdot f'(0),$$

also wegen $|\psi'(0)| > 1$

$$|g'(0)| = |\psi'(0)| \cdot |f'(0)| > |f'(0)|,$$

wie behauptet. ■

LEMMA (VIII). Sei $G \subseteq \mathbb{E}$ einfach zusammenhängend mit $0 \in G$. Ist $f \in \mathcal{F}_G$ mit $|f'(0)| = s_G$, so gilt $f(G) = \mathbb{E}$, also ist G biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$.

Beweis: Dies folgt aus der Definition von s_G und dem vorangegangenen Lemma VII. ■

4. Warum gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{F}_G$ mit $|f'(0)| = s_G$

Im Beweis des folgenden Lemmas spielen die früher bewiesenen Sätze von Montel und Hurwitz eine wesentliche Rolle.

LEMMA (IX). Sei $G \subseteq \mathbb{E}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G$. Dann gibt es ein

$$f \in \mathcal{F}_G \quad \text{mit} \quad f'(0) = s_G.$$

(Dabei ist $s_G = \sup\{|g'(0)| : g \in \mathcal{F}_G\}$.)

Beweis:

- Wir wählen eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit $f_n \in \mathcal{F}_G$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = s_G.$$

Indem wir eventuell f_n durch $e^{i\varphi_n} f_n$ für ein geeignetes φ_n ersetzen, können wir $f'_n(0) = |f'_n(0)|$ annehmen, und damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = s_G.$$

- Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ ist betragsmäßig durch 1 beschränkt. Nach dem Satz von Montel existiert eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge. Durch Umbenennung können wir annehmen, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ selbst lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert.
- Dann konvergieren auch die Ableitungen lokal gleichmäßig gegen f' . Es folgt

$$f'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = s_G.$$

- Die Funktionen f_n sind (nach Voraussetzung) injektiv, also ist nach dem Satz von Hurwitz f injektiv oder konstant. Wegen $f'(0) = s_G \geq 1$ ist f nicht konstant, muss also injektiv sein.
- Wegen $|f_n(z)| < 1$ folgt $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in G$. Gäbe es ein $z_0 \in G$ mit $|f(z_0)| = 1$, so wäre f keine offene Abbildung. Es folgt also

$$f(G) \subseteq \mathbb{E}.$$

Aus $f_n(0) = 0$ folgt auch $f(0) = 0$. Daher gilt

$$f \in \mathcal{F}_G.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

5. Zurück zum Riemannschen Abbildungssatz

Nach diesen Vorbereitungen können wir den Riemannschen Abbildungssatz aus den vorangegangenen Lemmas folgern.

Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes, von $\mathbb{C}$ verschiedenes Gebiet.

- Zunächst kann man von G zu einem biholomorph äquivalenten Gebiet $G \subseteq \mathbb{E}$ mit $0 \in G$ übergehen (Lemma IV).
- Für $G \subseteq \mathbb{E}$ mit $0 \in G$ haben wir

$$\mathcal{F}_G = \{f : G \rightarrow \mathbb{E} \text{ injektiv holomorph mit } f(0) = 0\}$$

betrachtet und dazu

$$s_G = \sup\{|f'(0)| : f \in \mathcal{F}_G\}.$$

- Lemma VIII besagt, dass G biholomorph äquivalent zu $\mathbb{E}$ ist, wenn man ein $f \in \mathcal{F}_G$ mit $|f'(0)| = s_G$ findet.
- Lemma IX zeigt, dass tatsächlich ein $f \in \mathcal{F}_G$ mit $|f'(0)| = s_G$ existiert.
- Aus den beiden letzten Aussagen ergibt sich der Riemannsche Abbildungssatz. ■

Der folgende Satz ergänzt den Riemannschen Abbildungssatz:

SATZ (Riemannscher Abbildungssatz II). *Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

- (1) *Es existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$.*
- (2) *Zu $z_0 \in G$ existiert eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(z_0) = 0$.*
- (3) *Zu $z_0 \in G$ existiert genau eine biholomorphe Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis:

- (1) Dies haben den Riemannschen Abbildungssatz in dieser Form bereits bewiesen. Sei $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ eine biholomorphe Abbildung.

- (2) Für $z_0 \in G$ ist mit $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ auch $\varphi_{f(z_0)} \circ f$ eine biholomorphe Abbildung $G \rightarrow \mathbb{E}$. Diese bildet z_0 auf 0 ab.
- (3) • *Existenz:* Sei jetzt $f : G \rightarrow \mathbb{E}$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(z_0) = 0$. Da f injektiv ist, ist $f'(z_0) \neq 0$, wir können also schreiben

$$f'(z_0) = re^{i\varphi} \text{ mit } r > 0 \text{ und } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Betrachten wir statt $f(z)$ die Abbildung $g(z) = e^{-i\varphi}f(z)$, so ist $g : G \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph mit $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) = r \in \mathbb{R}_{>0}$.

- *Eindeutigkeit:* Seien $f, g : G \rightarrow \mathbb{E}$ biholomorph mit $f(z_0) = g(z_0) = 0$ und $f'(z_0), g'(z_0) \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten

$$\psi = f \circ g^{-1} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}.$$

Natürlich ist auch ψ biholomorph, also ein Automorphismus von $\mathbb{E}$. Aus $\psi(0) = f(g^{-1}(0)) = f(z_0) = 0$ folgt, dass ein $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $|\zeta| = 1$ und

$$\psi(z) = \zeta z$$

existiert. Aus $f = \psi \circ g$ folgt

$$f'(z_0) = \psi'(g(z_0)) \cdot g'(z_0) = \psi'(0) = \zeta g'(z_0), \quad \text{also} \quad \zeta = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Zusammen mit $|\zeta| = 1$ ergibt sich $\zeta = 1$, also $\psi(z) = z$, und damit $f = g$, wie behauptet. Damit ist alles bewiesen. ■

Meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$

1. Meromorphe Funktionen

Wir beginnen mit der Erinnerung an ein paar Begriffsbildungen und Sprechweisen:

- (1) Eine Teilmenge M heißt **diskret** in $\mathbb{C}$, wenn zu jedem $z \in \mathbb{C}$ eine offene Umgebung U_z von z existiert, sodass $M \cap U_z = \emptyset$ oder $M \cap U_z = \{z\}$ gilt. (Jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ enthält dann nur endlich viele Punkte von M .)
- (2) Eine **meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$** besteht aus einer diskreten Teilmenge L von $\mathbb{C}$, sodass $f : \mathbb{C} \setminus L \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist und f in den Punkten von L Pole hat.
- (3) Ist f eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion und hat f in z_0 einen Pol der Ordnung m , so hat die Laurentreihenentwicklung von f in z_0 die Gestalt

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Dabei heißt

$$\text{Ht}(f, z_0) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0}$$

der **Hauptteil von f in z_0** . Definiert man ein Polynom $P(z)$ durch

$$P(z) = a_{-1}z + a_{-2}z^2 + \cdots + a_{-m}z^m,$$

so ist der Hauptteil von f in z_0 einfach $P(\frac{1}{z-z_0})$. Man beachte, dass $P(0) = 0$ ist.

Wir wollen uns die Polstellen zusammen mit den Hauptteilen einer meromorphen Funktion anschauen.

Beispiele:

- (1) Die rationale Funktion

$$f(z) = \frac{2z^5 + z^4 + z^3 + z^2 - z + 1}{z^5 + z^3}$$

hat wegen

$$z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z^3(z-i)(z+i)$$

Polstellen in 0 , i und $-i$. Man findet die Zerlegung (Partialbruchzerlegung)

$$f(z) = 2 + \left(\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{\frac{1}{2}}{z-i} + \frac{\frac{1}{2}}{z+i}.$$

An dieser Darstellung kann man sofort die Hauptteile ablesen:

$$\text{Ht}(f, 0) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2}, \quad \text{Ht}(f, i) = \frac{\frac{1}{2}}{z-i}, \quad \text{Ht}(f, -i) = \frac{\frac{1}{2}}{z+i}.$$

- (2) Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$. Die Polstellen sind die Zahlen $\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

- Für $k = 2m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{z \rightarrow \pi \cdot 2m} \frac{z - \pi \cdot 2m}{\sin(z)} = \lim_{z \rightarrow \pi \cdot 2m} \frac{z - \pi \cdot 2m}{\sin(z - \pi \cdot 2m)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\sin(z)} = 1.$$

Also ist der Hauptteil von $f(z)$ in $\pi \cdot 2m$

$$\frac{1}{z - \pi \cdot 2m}.$$

- Für $k = 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(z) &= \sin((z - \pi \cdot (2m + 1)) + \pi \cdot (2m + 1)) = \\ &= \sin(z - \pi \cdot (2m + 1)) \cos(\pi \cdot (2m + 1)) + \cos(z - \pi \cdot (2m + 1)) \sin(\pi \cdot (2m + 1)) = \\ &= \sin(z - \pi \cdot (2m + 1)) \cos(\pi) = -\sin(z - \pi \cdot (2m + 1)).\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \pi \cdot (2m+1)} \frac{z - \pi \cdot (2m + 1)}{\sin(z)} &= \lim_{z \rightarrow \pi \cdot (2m+1)} \frac{z - \pi \cdot (2m + 1)}{z - \pi \cdot (2m + 1) - \sin(z - \pi \cdot (2m + 1))} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{-\sin(z)} = -1.\end{aligned}$$

Der Hauptteil von $f(z)$ in $\pi \cdot (2m + 1)$ ist also

$$\frac{-1}{z - \pi \cdot (2m + 1)}.$$

Zusammengefasst erhält man für den Hauptteil von $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ in $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Ht} \left(\frac{1}{\sin(z)}, \pi \cdot k \right) = \frac{(-1)^k}{z - k \cdot \pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- (3) Die Funktion $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ hat genau in den ganzen Zahlen Polstellen. Im letzten Beispiel sahen wir, dass die Laurentreihenentwicklung von $\frac{1}{\sin(z)}$ in $k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, so aussieht:

$$\frac{1}{\sin(z)} = \frac{(-1)^k}{z - k \cdot \pi} + \sum_{j \geq 0} a_j (z - k \cdot \pi)^j$$

Ersetzen wir z durch πz , so ergibt sich

$$\frac{1}{\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^k}{\pi z - k \cdot \pi} + \sum_{j \geq 0} a_j (\pi z - k \cdot \pi)^j,$$

also

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)} = \frac{(-1)^k}{z - k} + \sum_{j \geq 0} a_j \cdot \pi^{j+1} (z - k)^j.$$

Daher ist

$$\text{Ht} \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \pi \cdot k \right) = \frac{(-1)^k}{z - k} \text{ für } k \in \mathbb{Z}.$$

Wie weit bestimmen Pole und Hauptteile eine meromorphe Funktion?

SATZ. Seien f und g meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Dann sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

- (1) f und g haben die gleichen Polstellen und in allen Polen die gleichen Hauptteile.
- (2) $f = g + h$ für eine ganze Funktion h auf $\mathbb{C}$.

Beweis: $\Rightarrow$ Es ist $\text{Ht}(f - g) = 0$ in allen Polstellen von f und g , also hat $f - g$ in allen Polstellen von f und g hebbare Singularitäten, also ist $f - g$ eine ganze Funktion.

$\Leftarrow$ Da die Addition einer in z_0 holomorphen Funktion nichts an den Hauptteilen in z_0 ändert, folgt die Behauptung. ■

Wir wollen jetzt folgender Problemstellung nachgehen: Gegeben sei eine diskrete Teilmenge $\{z_1, z_2, z_3, \dots\}$ von $\mathbb{C}$ und für jedes z_n ein Polynom P_n mit $P_n(0) = 0$. Gibt es eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f mit

$$\text{Polstellen}(f) = \{z_1, z_2, z_3, \dots\} \quad \text{und} \quad \text{Ht}(f, z_n) = P_n\left(\frac{1}{z - z_n}\right) \quad \text{für alle } n?$$

2. Meromorphe Funktionen mit nur endlich vielen Polen

Seien $z_1, \dots, z_m$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{C}$ und $P_1(z), \dots, P_m(z)$ nichtkonstante Polynome mit $P_j(0) = 0$. Dann ist

$$f(z) = P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + \dots + P_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right)$$

eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit den Hauptteilen $P\left(\frac{1}{z-z_j}\right)$ in z_j . Jede andere auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit den gleichen Polstellen und Hauptteilen hat dann die Gestalt

$$P_1\left(\frac{1}{z-z_1}\right) + \dots + P_m\left(\frac{1}{z-z_m}\right) + g(z) \text{ mit einer ganzen Funktion } g(z).$$

Kann man eine solche Konstruktion auch mit unendlich vielen Punkten machen?

3. Meromorphe Funktionen mit unendlich vielen Polen

Wir beginnen mit ein paar Beispielen.

Beispiele:

- (1) Suchen wir eine meromorphe Funktion f mit $\text{Polstellen}(f) = \mathbb{Z}$ und

$$\text{Ht}(f, n) = \frac{(-1)^n}{z-n} \text{ für } n \in \mathbb{Z},$$

so haben wir dazu bereits eine Funktion gefunden, nämlich

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

- (2) Gibt es eine meromorphe Funktion f mit $\text{Polstellen}(f) = \mathbb{Z}$ und

$$\text{Ht}(f, n) = \frac{1}{z-n} \text{ für } n \in \mathbb{Z}?$$

In Analogie zum Fall mit nur endlich vielen Polstellen könnte man schauen, ob man nicht einfach die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

wählen kann. Allerdings ist nicht klar, wie man $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ zu lesen hat. Man könnte die Reihe als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z-n}$$

interpretieren. Leider divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n}$ schon für alle $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, weswegen dieser Ansatz nicht sinnvoll ist.

- (2') Man kann mit Hilfe von (1) auch die Aufgabe in (2) lösen: Es ist $\cos(\pi n) = (-1)^n$ für $n \in \mathbb{Z}$, woraus mit den vorangegangenen Ergebnissen folgt, dass

$$f(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

genau in den ganzen Zahlen Polstellen hat mit den Hauptteilen

$$\text{Ht}\left(\pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}, n\right) = \frac{1}{z-n} \text{ für } z \in \mathbb{Z}.$$

Da die Kotangens-Funktion durch $\cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ definiert wird, kann man auch

$$\text{Ht}(\pi \cot(\pi z), n) = \frac{1}{z-n} \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

schreiben.

Da man natürlich nicht hoffen kann, alle möglichen Hauptteilvergaben durch bekannte Funktionen lösen zu können, werden wir den Reihenansatz weiterverfolgen.

4. Konvergenz von Reihen meromorpher Funktionen

Wir wiederholen eine Reihe wichtiger Aussagen.

Ist $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von Funktionen, so kann man die zugehörige Reihe

$$\sum_{n \geq 0} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = f_0 + f_1 + f_2 + \dots$$

betrachten, die formal über die Folge der Partialsummen

$$\left(\sum_{n=0}^N f_k \right)_{N \geq 0}$$

definiert wird. Die Begriffe **gleichmäßige Konvergenz**, **lokal gleichmäßige Konvergenz** und **kompakte Konvergenz** übertragen sich dann direkt von den Funktionenfolgen auf Reihen.

Beispielsweise konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung U gibt, beispielsweise $U = K_r(z_0)$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert mit der Eigenschaft:

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon \text{ für alle } N \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in U.$$

Äquivalent dazu ist, dass es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq G$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε gibt mit

$$\left| \sum_{n=0}^N f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon \text{ für alle } N \geq N_\varepsilon \text{ und alle } z \in K.$$

Für die Anwendungen ist folgender Konvergenzbegriff wichtig.

DEFINITION. Eine Reihe $\sum_{n \geq 0} f_n$ von Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **normal konvergent** (in G), wenn es zu jedem $z_0 \in G$ eine Umgebung $U \subseteq G$ und eine Folge $(M_n)_{n \geq 0}$ (mit $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) gibt mit

$$|f_n(z)| \leq M_n \text{ für alle } z \in U \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

LEMMA. Eine normal konvergente Reihe $\sum f_n$ von Funktion $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert absolut und lokal gleichmäßig. Die Reihe kann beliebig umgeordnet werden ohne Konvergenz und Grenzwert zu ändern.

Beweis: Sei $z_0 \in D$ beliebig gegeben. Dann gibt es $r > 0$ und eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty$ mit $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass gilt

$$|f_n(z)| \leq M_n \text{ für alle } z \in K_r(z_0).$$

(1) Die absolute Konvergenz ist klar:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Da absolut konvergente Reihen konvergieren, gibt es eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z).$$

- (2) Für die lokal gleichmäßige Konvergenz zeigt man, dass das Cauchy-Kriterium (für lokal gleichmäßige Konvergenz) erfüllt ist.
- (3) Da man absolut konvergente Reihen beliebig umordnen kann ohne Konvergenzverhalten und Grenzwert zu ändern, folgt auch die letzte Aussage. ■

Beispiel: Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

konvergiert lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, ist aber nicht normal konvergent (Übungsaufgabe).

SATZ (Weierstrass). Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge von holomorphen Funktionen, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ in G normal konvergiert.

- (1) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gegen eine holomorphe Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{C}$.
- (2) Die Reihe der Ableitungen $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ konvergiert gegen f' .
- (3) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$ konvergiert normal.

Beweis:

- (1), (2) Die Partialsummen

$$S_N = \sum_{n=0}^N f_n$$

sind ebenfalls holomorph und konvergieren nach dem vorangegangenen Lemma lokal gleichmäßig gegen f . Daher ist f holomorph nach einem vorangegangenen Satz und

$$f'(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f'_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(z).$$

- (1) Warum liegt bei den Ableitungen normale Konvergenz vor? Sei $z_0 \in G$ beliebig vorgegeben. Dann existiert $r > 0$ mit $\bar{K}_r(z_0) \subseteq G$ und eine Folge $M_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit

$$|f_n(z)| \leq M_n \text{ für } z \in K_r(z_0) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} M_n < \infty.$$

Für $a \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ und $z \in \partial K_r(z_0)$ gilt

$$|z - a| = |(z - z_0) + (z_0 - a)| \geq |z - z_0| - |z_0 - a| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2},$$

also

$$\left| \frac{1}{(z - a)^2} \right| \leq \frac{4}{r^2}.$$

Die Cauchy-Integralformel für $f'_n(a)$ lautet

$$f'_n(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f_n(z)}{(z-a)^2} dz$$

und lässt sich für $a \in K_{\frac{r}{2}}(z_0)$ wie folgt abschätzen

$$|f'_n(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot M_n \cdot \frac{4}{r^2} \cdot 2\pi r = M_n \cdot \frac{4}{r}.$$

Daraus folgt sofort die normale Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n$. ■

SATZ. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergiert normal in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Die Grenzfunktion wird **Riemannsche Zeta-Funktion** $\zeta(z)$ genannt, also

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

(Dabei ist $\frac{1}{n^z} = e^{-z \log n}$.)

Beweis:

(1) Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Definition

$$\frac{1}{n^z} = \frac{1}{e^{z \log n}} = e^{-\log n \cdot z} = e^{-\log n \cdot (\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z))} = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \cdot e^{-i \log n \cdot \operatorname{Im}(z)},$$

also

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}}.$$

(2) Sei nun $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Wähle ein $\delta > 0$ mit

$$1 < 1 + \delta < \operatorname{Re}(z_0).$$

Dann ist $z_0 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1 + \delta\}$, d.h. $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1 + \delta\}$ ist eine offene Umgebung von z_0 . Für alle $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1 + \delta\}$ gilt

$$\left| \frac{1}{n^z} \right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \leq \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Da bekanntlich folgende Reihe konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta}} < \infty,$$

erhalten wir sofort die behauptete normale Konvergenz. ■

Bemerkung: Ist $L \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$, hat man für jedes $a \in L$ ein Polynom $P_a(z)$ (mit $P_a(0) = 0$) und einen zugehörigen Hauptteil $P_a(\frac{1}{z-a})$, so könnte man die Reihe

$$\sum_{a \in L} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) \quad \text{oder allgemeiner} \quad \sum_{a \in L} f_a(z)$$

betrachten. Allerdings ist nicht klar, wie man $\sum_{a \in L}$ lesen soll, da wir üblicherweise $\sum_{n=1}^{\infty}$ oder $\sum_{n=0}^{\infty}$ verwenden. Da L aber diskret ist, ist L abzählbar, d.h. wir können die Elemente von L durchnummerieren:

$$L = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Wir können dann definieren

$$\sum_{a \in L} f_a(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{a_n}(z).$$

Wenn die Reihe rechts normal konvergiert, können wir die Reihe umordnen. Dann ist $\sum_{a \in L}$ definiert unabhängig von der Aufzählung von L .

Beispiel: Wir wollen zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ normal konvergiert.

- Sei $R > 0$. Dann gilt für $|z| \leq R$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \geq 2R$

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - R \geq |n| - \frac{1}{2}|n| = \frac{1}{2}|n|,$$

und damit

$$\left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \frac{1}{\frac{1}{4}|n|^2} = \frac{4}{n^2}.$$

- Sei nun $n_1, n_2, n_3, \dots$ eine Aufzählung der ganzen Zahlen. Wir wollen zeigen, dass

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(z-n_j)^2}$$

normal konvergiert.

- Sei $K \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ eine beliebige kompakte Menge. Sei $R > 0$ mit $K \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$. Es gibt dann einen Index j_0 mit $|n_j| \geq 2R$ für alle $j \geq j_0$. Für $z \in K$ folgt

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \left| \frac{1}{(z - n_j)^2} \right| \leq \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{4}{n_j^2} < \infty.$$

- Da K kompakt ist, gibt es für $j = 1, \dots, j_0 - 1$ ein M_j mit

$$\left| \frac{1}{(z - n_j)^2} \right| \leq M_j \text{ für alle } z \in K.$$

Es folgt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{(z - n_j)^2} \right| \leq M_1 + \dots + M_{j_0-1} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{4}{n_j^2} < \infty.$$

Daraus folgt die normale Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z - n)^2}.$$

Die Funktion stellt also eine meromorphe Funktion dar mit Polen in den ganzen Zahlen und Hauptteilen

$$\frac{1}{(z - n)^2}.$$

(Stellt die Reihe eine bekannte Funktion dar?)

Bemerkung: Ist $L \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$, ist $P_a(\frac{1}{z-a})$ ein Hauptteil in $a \in L$, so kann man schauen, ob die Reihe

$$f(z) = \sum_{a \in L} P_a\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

normal konvergiert. Leider ist dies nicht immer der Fall. Man kann aber Polynome $Q_a(z)$ finden, sodass

$$f(z) = \sum_{a \in L} \left(P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) - Q_a(z) \right)$$

normal konvergiert. Das besagt der Satz von Mittag-Leffler.

5. Der Satz von Mittag-Leffler

Satz (Mittag-Leffler). Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ eine diskrete Teilmenge. Für jedes $a \in L$ sei $P_a(z)$ ein von 0 verschiedenes Polynom mit $P_a(0) = 0$. Dann existieren Polynome $Q_a(z)$ für $a \in L$, sodass die Reihe

$$f(z) = \sum_{a \in L} \left(P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) - Q_a(z) \right)$$

auf $\mathbb{C} \setminus L$ normal konvergiert. f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus L$ und hat Polstellen in $a \in L$ mit

$$\text{Ht}(f, a) = P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ für } a \in L.$$

Ist $g(z)$ eine weitere meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit

$$\text{Polstellen}(g) = L \text{ und } \text{Ht}(g, a) = P_a\left(\frac{1}{z-a}\right) \text{ für } a \in L,$$

so gibt es eine ganze Funktion $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$g(z) = f(z) + \varphi(z).$$

Beweis:

- (1) Wir können annehmen, dass L unendlich ist, da der endliche Fall schon behandelt wurde. Wir nummerieren die Elemente von L :

$$L = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Statt $P_{a_n}(z)$ schreiben wir einfach $P_n(z)$.

- (2) Wir betrachten den Fall $a_n \neq 0$. Die rationale Funktion

$$z \mapsto P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right)$$

ist holomorph in $K_{|a_n|}(0)$. Wir entwickeln die Funktion in eine Potenzreihe um 0:

$$P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k.$$

(Natürlich hängt c_k von n ab.) Der Konvergenzradius ist $|a_n|$, insbesondere konvergiert die Reihe dann absolut für $\frac{|a_n|}{2}$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k (\frac{|a_n|}{2})^k| < \infty.$$

Es gibt dann ein $d_n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\sum_{k=d_n+1}^{\infty} |c_k (\frac{|a_n|}{2})^k| < \frac{1}{2^n}.$$

Definieren wir

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{d_n} c_k z^k,$$

so folgt für $|z| \leq \frac{1}{2}|a_n|$

$$\begin{aligned} \left| P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right| &= \left| \sum_{k=d_n+1}^{\infty} c_k z^k \right| \leq \sum_{k=d_n+1}^{\infty} |c_k| |z|^k \leq \\ &\leq \sum_{k=d_n+1}^{\infty} |c_k| \left(\frac{|a_n|}{2}\right)^k < \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst: Wir haben (im Fall $a_n \neq 0$) Polynome $Q_n(z)$ so gewählt, dass gilt

$$\left| P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right| < \frac{1}{2^n} \text{ für } |z| \leq \frac{1}{2}|a_n|.$$

Im Fall $a_n = 0$ wählen wir $Q_n(z) = 0$.

- (3) Sei nun $R > 0$ beliebig. Wegen der Diskretheit von L gibt es einen Index $N_R \in \mathbb{N}$ mit

$$R \leq \frac{1}{2}|a_n| \text{ für alle } n \geq N_R.$$

Ist $|z| \leq R$, so folgt für $n \geq N_R$

$$|z| \leq R \leq \frac{1}{2}|a_n|,$$

und damit

$$\left| P_n\left(\frac{1}{z - a_n}\right) - Q_n(z) \right| \leq \frac{1}{2^n} \text{ für } |z| \leq R \text{ und } n \geq N_R.$$

- (4) Sei nun $K \subseteq \mathbb{C} \setminus L$ eine beliebige kompakte Menge. Da $P_n(\frac{1}{z - a_n}) - Q_n(z)$ auf $\mathbb{C} \setminus L$ holomorph ist, ist

$$M_{K,n} = \sup\{|P_n(\frac{1}{z - a_n}) - Q_n(z)| : z \in K\} < \infty.$$

Wegen der Kompaktheit von K gibt es ein $R > 0$ mit

$$K \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}.$$

Dann gilt aber

$$|P_n(\frac{1}{z-a_n}) - Q_n(z)| \leq \frac{1}{2^n} \text{ für } z \in K \text{ und } n \geq N_R,$$

und damit

$$M_{K,n} \leq \frac{1}{2^n} \text{ für } n \geq N_R.$$

Für $z \in K$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |P_n(\frac{1}{z-a_n}) - Q_n(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M_{K,n} \leq \sum_{n=1}^{N_R-1} M_{K,n} + \sum_{n=N_R}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Dies beweist die normale Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(P_n(\frac{1}{z-a_n}) - Q_n(z) \right).$$

Der Rest ist klar. ■

Beispiel: Wir suchen eine meromorphe Funktion $f(z)$ auf $\mathbb{C}$ mit

$$\text{Polstellen}(f) = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \text{Ht}(f, n) = \frac{1}{z-n} \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

- Wir haben schon angedeutet, dass die Reihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{z-n}$$

nicht „schön“ konvergiert. Deswegen versuchen wir, wie im Beweis des Satzes von Mittag-Leffler vorzugehen.

- Für $n = 0$ soll der Hauptteil $\frac{1}{z}$ sein. Wir lassen ihn einfach stehen.
- Sei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Taylorreihe von $\frac{1}{z-n}$ in 0:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-n} &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{n}} = -\frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{z}{n} + \frac{z^2}{n^2} + \frac{z^3}{n^3} + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}z - \frac{1}{n^3}z^2 - \frac{1}{n^4}z^3 - \dots \end{aligned}$$

Wir wählen $Q_n(z) = -\frac{1}{n}$ und müssen daher

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}$$

untersuchen.

- Für $n \neq 0$ betrachten wir

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{n + (z-n)}{(z-n)n} = \frac{z}{n(z-n)}.$$

Für $R > 0$, $|z| \leq R$ und $|n| \geq 2R$ gilt

$$|z-n| \geq |n| - |z| \geq |n| - R \geq |n| - \frac{1}{2}|n| = \frac{1}{2}|n|,$$

also

$$\left| \frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right| = \left| \frac{z}{n(z-n)} \right| = \frac{|z|}{|n||z-n|} \leq \frac{2R}{|n|^2}.$$

- Da $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, folgt wie im Beweis von Mittag-Leffler, dass die Reihe

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$

normal konvergiert. Daher definiert $f(z)$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ mit

$$\text{Polstellen}(f) = \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \text{Ht}(f, n) = \frac{1}{z-n} \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$

- Wir wissen, dass $g(z) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ die gleichen Pole und Hauptteile hat wie $f(z)$. Es gibt daher eine ganze Funktion $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \pi \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} + \varphi(z).$$

Was kann man über $\varphi(z)$ sagen? (Tatsächlich kann man zeigen, dass $\varphi(z) = 0$ ist. Einen (nicht offensichtlichen) Beweis findet man in der 4. Auflage des Funktionentheorie-Buches von Hurwitz auf Seite 122. Einen anderen Beweis findet man in „Grundkurs Funktionentheorie“ von Fritzsche auf den Seiten 202-205.)

Wir geben eine theoretische Anwendung des Satzes von Mittag-Leffler:

SATZ. Seien f, g ganze Funktionen ohne gemeinsame Nullstelle, d.h. $\{z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z) = 0\} = \emptyset$. Dann existieren ganze Funktionen A, B mit

$$Af + Bg = 1.$$

Beweisskizze:

- Ist g identisch 0, so hat f keine Nullstellen, also ist $\frac{1}{f}$ eine ganze Funktion und wir können $A = \frac{1}{f}$ und $B = 0$ wählen.
- Sei also g nicht identisch 0. Wir nummerieren die Nullstellen von g :

$$\{z \in \mathbb{C} : g(z) = 0\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}.$$

Wegen $f(b_n) \neq 0$ und $g(b_n) = 0$ hat $\frac{1}{fg}$ einen Pol in b_n . Mit Mittag-Leffler finden wir eine meromorphe Funktion M mit

$$\text{Polstellen}(M) = \{b_1, b_2, b_3, \dots\} \quad \text{und} \quad \text{Ht}(M, b_n) = \text{Ht}\left(\frac{1}{fg}, b_n\right).$$

- Die Funktion $M - \frac{1}{fg}$ ist dann holomorph in b_n . Wir definieren

$$A = Mg \quad \text{und} \quad B = -\left(M - \frac{1}{fg}\right)f = -Mf + \frac{1}{g}.$$

Sowohl A als auch B sind ganze Funktionen und leisten das Verlangte. ■

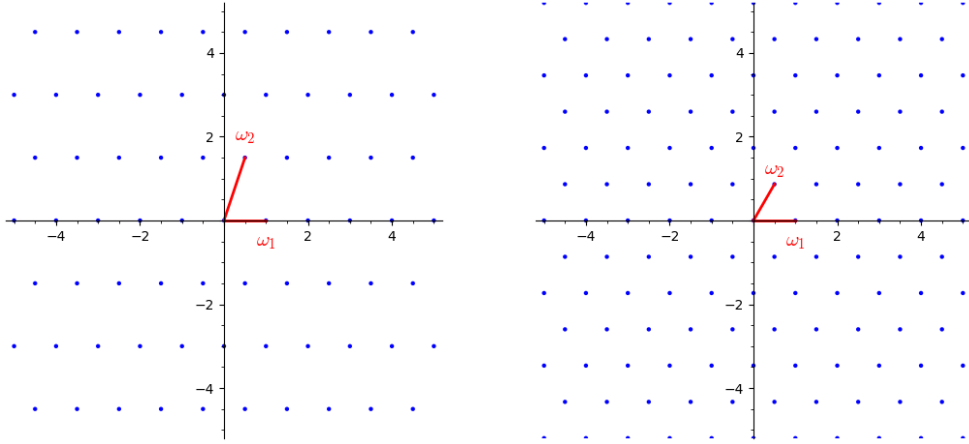
6. Doppeltperiodische Funktionen - elliptische Funktionen

DEFINITION. Ein **Gitter** in $\mathbb{C}$ ist eine Teilmenge der Gestalt

$$L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\},$$

wobei ω_1, ω_2 eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$ ist. Dabei nennt man ω_1, ω_2 auch eine **Gitterbasis**.

Die folgenden Bilder zeigen Gitter in $\mathbb{C}$.



LEMMA. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dazu sei für $n \in \mathbb{N}_0$

$$L_n = \{\omega \in L : n \leq |z| < n+1\}.$$

- (1) L ist eine Untergruppe der additiven Gruppe von $\mathbb{C}$.
- (2) L ist eine diskrete Teilmenge von $\mathbb{C}$, weswegen auch

$$\delta = \frac{1}{2} \min\{|\omega| : \omega \in L \setminus \{0\}\}$$

wohldefiniert und positiv ist.

- (3) Für $\omega, \omega' \in L$ mit $\omega \neq \omega'$ gilt

$$K_\delta(\omega) \cap K_\delta(\omega') = \emptyset.$$

- (4) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq \delta$ ist

$$\bigcup_{\omega \in L_n} K_\delta(\omega)$$

eine disjunkte Vereinigung und

$$\bigcup_{\omega \in L_n} K_\delta(\omega) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : n - \delta \leq |z| \leq n + 1 + \delta\}.$$

- (5) Für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq \delta$ ist

$$|L_n| \leq \frac{6\delta + 3}{\delta^2} \cdot n.$$

- (6) Es gilt die Konvergenzaussage

$$\alpha \in \mathbb{R}_{>2} \implies \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\alpha} < \infty.$$

Beweis:

- (1) Dies folgt aus

$$(0 \in L), \quad (\omega, \omega' \in L \implies \omega + \omega' \in L) \quad \text{und} \quad (\omega \in L \implies -\omega \in L).$$

- (2) Sei ω_1, ω_2 eine Gitterbasis von L . Dann ist $\omega_1 \neq 0$ und $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$, es gibt also $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + bi$, und damit

$$L = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\} = \{\omega_1(m + n(a + bi)) : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Für $m, n \in \mathbb{Z}$ und $R > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\omega_1(m + n(a + bi))| \leq R &\iff |(m + na) + nbi| \leq \frac{R}{|\omega_1|} \iff \\
&\iff (m + na)^2 + n^2b^2 \leq \frac{R^2}{|\omega_1|^2} \iff \\
&\iff n^2b^2 \leq \frac{R^2}{|\omega_1|^2} \text{ und } (m + na)^2 \leq \frac{R^2}{|\omega_1|^2} - n^2b^2 \iff \\
&\iff |n| \leq \frac{R}{|b||\omega_1|} \text{ und } |m + na| \leq \sqrt{\frac{R^2}{|\omega_1|^2} - n^2b^2} \iff \\
&\iff |n| \leq \frac{R}{|b||\omega_1|} \text{ und} \\
&\quad -na - \sqrt{\frac{R^2}{|\omega_1|^2} - n^2b^2} \leq m \leq -na + \sqrt{\frac{R^2}{|\omega_1|^2} - n^2b^2}.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass nur endlich viele Gitterpunkte im abgeschlossenen Kreis $\overline{K_R(0)}$ liegen. Da R beliebig groß gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

- (3) Wäre $z \in K_\delta(\omega) \cap K_\delta(\omega')$, so würde folgen

$$|\omega - \omega'| = |(\omega - z) + (z - \omega')| \leq |z - \omega| + |z - \omega'| < \delta + \delta = 2\delta,$$

ein Widerspruch zur Definition von δ .

- (4) Die Disjunktheit der angegebenen Mengen folgt aus (3). Sei nun $\omega \in L_n$, d.h. $n \leq |\omega| < n + 1$. Dann gilt für $z \in K_\delta(\omega)$:

$$\begin{aligned}
|z - \omega| < \delta &\implies \delta > |\omega - z| \geq |\omega| - |z| \geq n - |z| \implies n - \delta < |z|, \\
|z - \omega| < \delta &\implies |z| = |(z - \omega) + \omega| \leq |z - \omega| + |\omega| < \delta + n + 1,
\end{aligned}$$

zusammengefasst:

$$|z - \omega| < \delta \implies n - \delta < |z| < n + 1 + \delta.$$

Daraus ergibt sich

$$K_\delta(\omega) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : n - \delta \leq |z| \leq n + 1 + \delta\},$$

und damit die Behauptung.

- (5) Wir berechnen Flächen:

$$\text{Fläche} \left(\bigcup_{\omega \in L_n} K_\delta(\omega) \right) = \sum_{\omega \in L_n} \pi \delta^2 = |L_n| \cdot \pi \delta^2$$

und

$$\begin{aligned}
&\text{Fläche}(\{z \in \mathbb{C} : n - \delta \leq |z| \leq n + 1 + \delta\}) = \\
&= \pi(n + 1 + \delta)^2 - \pi(n - \delta)^2 = \\
&= \pi((n + 1 + \delta) + (n - \delta))((n + 1 + \delta) - (n - \delta)) = \\
&= \pi(2n + 1)(2\delta + 1)
\end{aligned}$$

Da die erste Fläche in der zweiten enthalten ist, folgt

$$|L_n| \cdot \pi \delta^2 \leq \pi(2n + 1)(2\delta + 1),$$

also

$$|L_n| \leq \frac{(2n + 1)(2\delta + 1)}{\delta^2} \stackrel{n \in \mathbb{N}}{\leq} \frac{(2n + n)(2\delta + 1)}{\delta^2} = \frac{3n \cdot (2\delta + 1)}{\delta^2} = \frac{6\delta + 3}{\delta^2} \cdot n.$$

(6) Mit (5) folgt für $n \geq \delta$

$$\sum_{\omega \in L_n} \frac{1}{|\omega|^\alpha} \leq \sum_{\omega \in L_n} \frac{1}{n^\alpha} = |L_n| \cdot \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{6\delta + 3}{\delta^2} \cdot n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{6\delta + 3}{\delta^2} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ bekanntlich für $\sigma > 1$ konvergiert, konvergiert

$$\sum_{n \geq \delta} \sum_{\omega \in L_n} \frac{1}{|\omega|^\alpha}$$

für $\alpha > 2$, woraus die Behauptung folgt. ■

SATZ. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter. Dann konvergiert die Reihe

$$\zeta_L(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

auf $\mathbb{C} \setminus L$ normal. Die Grenzfunktion heißt **Weierstraßsche ζ -Funktion** $\zeta_L(z)$. Die Polstellen von $\zeta_L(z)$ sind genau die Punkte von L mit Hauptteil $\text{Ht}(\zeta_L(z), \omega) = \frac{1}{z - \omega}$.

Beweis:

- Es ist für $\omega \neq 0$ und $|z| < |\omega|$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - \omega} &= \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\frac{z}{\omega} - 1} = -\frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = -\frac{1}{\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{z^k}{\omega^{k+1}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\omega} - \frac{z}{\omega^2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^{k+1}}, \\ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^{k+1}} &= \frac{z^2}{\omega^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^k} = \frac{z^2}{\omega^3} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \frac{z^2}{\omega^2(\omega - z)}. \end{aligned}$$

Ist nun $R > 0$, $|z| \leq R$ und $|\omega| \geq 2R$, so folgt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{\omega^{k+1}} \right| &= \frac{|z|^2}{|\omega|^2 |\omega - z|} \leq \frac{|z|^2}{|\omega|^2 (|\omega| - |z|)} \leq \frac{R^2}{|\omega|^2 (|\omega| - R)} \leq \\ &\leq \frac{R^2}{|\omega|^2 (|\omega| - \frac{1}{2}|\omega|)} = \frac{2R^2}{|\omega|^3}, \end{aligned}$$

also

$$\left| \frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right| \leq \frac{2R^2}{|\omega|^3}.$$

- Aus der hergeleiteten Abschätzung folgt zusammen mit $\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} < \infty$ mit der üblichen Argumentation die Behauptung. ■

Bei einer normal konvergenten Reihe darf man gliedweise differenzieren und erhält wieder eine normal konvergente Reihe.

SATZ. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter.

(1) Die **Weierstraßsche $\wp$ -Funktion** des Gitters L wird definiert als

$$\wp(z) = -\zeta'_L(z)$$

und ist gegeben durch die normal konvergente Reihe

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\wp(z)$ ist eine gerade Funktion, d.h. $\wp(-z) = \wp(z)$.

- (2) $\wp(z)$ ist periodisch bezüglich des Gitters, d.h.

$$\wp(z + \omega) = \wp(z) \text{ für alle } \omega \in L.$$

(Dies folgt schon aus $\wp(z + \omega_1) = \wp(z + \omega_2) = \wp(z)$, wenn ω_1, ω_2 eine Gitterbasis von L ist. Deswegen nennt man solche Funktionen auch **doppeltperiodisch**.)

- (3) Die Ableitung $\wp'(z)$ wird gegeben durch die normal konvergente Reihe

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3}$$

Auch $\wp'(z)$ ist periodisch bezüglich L .

Beweis:

- Da die Reihe für $\zeta_L(z)$, also

$$\zeta_L(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right)$$

normal konvergiert, erhält man durch gliedweises Differenzieren die Ableitungen, wobei die Ableitungen wieder durch normal konvergente Reihen gegeben sind:

$$\begin{aligned} \wp(z) &= -\zeta'_L(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(-\frac{2}{(z - \omega)^3} \right) = -2 \sum_{\omega \in L} \frac{1}{(z - \omega)^3}. \end{aligned}$$

- Es ist

$$\begin{aligned} \wp(-z) &= \frac{1}{(-z)^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(-z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z + \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \stackrel{\text{ersetze } \omega \text{ durch } -\omega}{=} \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{(-\omega)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) = \wp(z), \end{aligned}$$

was zeigt, dass $\wp(z)$ eine gerade Funktion ist.

- Natürlich gilt $\wp'(z + \omega) = \wp'(z)$ für alle $\omega \in L$. (Bei einer normal konvergenten Reihe darf man die Summationsreihenfolge abändern.) Sei jetzt ω_1, ω_2 eine Gitterbasis von L und

$$f_j(z) = \wp(z + \omega_j) - \wp(z) \text{ für } j = 1, 2.$$

Dann ist

$$f'_j(z) = \wp'(z + \omega_j) - \wp'(z) = 0,$$

also ist $f_j(z) = f_j$ konstant. Setzen wir in

$$\wp(z + \omega_j) = \wp(z) + f_j$$

nun $z = -\frac{1}{2}\omega_j$ ein, so erhalten wir

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega_j\right) = \wp\left(-\frac{1}{2}\omega_j\right) + f_j.$$

Da $\wp(z)$ eine gerade Funktion ist, folgt $f_j = 0$, also gilt

$$\wp(z + \omega) = \wp(z) \text{ für alle } \omega \in L.$$

Das war zu zeigen. ■

Bemerkung: Wir schauen uns die Laurentreihenentwicklung von $\wp(z)$ in $z = 0$ an. Es ist

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

also gilt

$$\text{Ht}(\wp(z), 0) = \frac{1}{z^2}.$$

Der folgende Satz beschreibt die Laurentreihenentwicklung:

Satz. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter.

- (1) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ konvergiert die Reihe

$$G_n = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n}$$

absolut. G_n heißt **Eisensteinreihe**.

- (2) Für ungerades $n \geq 3$ ist $G_n = 0$.
 (3) Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion zum Gitter Λ hat folgende Laurentreihenentwicklung um 0:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2}z^{2n}.$$

Beweis:

- (1) Wir haben zuvor gezeigt, dass für $\alpha \in \mathbb{R}_{>2}$ gilt

$$\sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^\alpha} < \infty.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

- (2) Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe für G_n können wir ω durch $-\omega$ ersetzen und erhalten

$$G_n = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n} = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{(-\omega)^n} = (-1)^n \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^n} = (-1)^n G_n.$$

Im Fall $n \equiv 1 \pmod{2}$ folgt $G_n = -G_n$, und damit $G_n = 0$.

- (3) Wir betrachten die in $z = 0$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Wegen der normalen Konvergenz dürfen wir gliedweise differenzieren:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \left((z - \omega)^{-2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \\ f'(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-2) \cdot (z - \omega)^{-3}, \\ f''(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-2) \cdot (-3) \cdot (z - \omega)^{-4} = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-1)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (z - \omega)^{-4}, \\ f^{(3)}(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (z - \omega)^{-5} = \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (z - \omega)^{-5}, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot (z - \omega)^{-(n+2)}, \\ f^{(n+1)}(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-1)^{n+1} \cdot (n+2)! \cdot (z - \omega)^{-(n+3)}. \end{aligned}$$

Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (-1)^n \cdot (n+1)! \cdot (z - \omega)^{-(n+2)} = n! \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} (n+1) \cdot \frac{(-1)^n}{(z - \omega)^{n+2}} = \\ &= n!(n+1) \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{(\omega - z)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Es folgt für $n \geq 1$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (n+1) \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{n+2}} = (n+1)G_{n+2}.$$

Damit ergibt sich die Taylorreihenentwicklung

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)G_{n+2} z^n.$$

Da aber G_n für ungerade n Null ist, müssen wir nur über gerade n summieren:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)G_{2n+2} z^{2n}.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Exkurse

1. Über Funktionen, die die gleichen Werte an den gleichen Stellen annehmen

Wir beginnen mit einem merkwürdigen Satz, den wir hier nicht beweisen wollen:

SATZ (Nevanlinna - Five Value Theorem). Sind f, g meromorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$ und gibt es 5 verschiedene Punkte $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{C}$ mit

$$f^{-1}(a_j) = g^{-1}(a_j) \text{ für } j = 1, \dots, 5,$$

so gilt schon $f = g$.

Der Satz mit Beweis findet sich im Buch *Meromorphic Functions* von W. K. Hayman [H, Theorem 2.6, S.48]. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass 4 Punkte nicht ausreichen um die Gleichheit der Funktionen zu zeigen.

Beispiel: Wir betrachten die auf $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen

$$f(z) = e^z \quad \text{und} \quad g(z) = e^{-z}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(0) &= \emptyset = g^{-1}(0), \\ f^{-1}(1) &= \{2k \cdot \pi i : k \in \mathbb{Z}\} = g^{-1}(1), \\ f^{-1}(-1) &= \{(2k+1) \cdot \pi i : k \in \mathbb{Z}\} = g^{-1}(-1), \\ f^{-1}(\infty) &= \emptyset = g^{-1}(\infty). \end{aligned}$$

Die Funktionen e^z und e^{-z} nehmen also die 4 Werte $0, 1, -1, \infty$ an den gleichen Stellen an, sind aber nicht gleich.

Im Folgenden betrachten wir die Fragestellung des Satzes zunächst für Polynome und dann für meromorphe Funktionen auf $\hat{\mathbb{C}}$. (Die Beweise orientieren sich an [AS] und [P].)

Bemerkung: Ist $f(z)$ ein nichtkonstantes Polynom (mit komplexen Koeffizienten) und ist für $a \in \mathbb{C}$

$$f^{-1}(a) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\},$$

so hat $f(z)$ die Gestalt

$$f(z) = a + c(z - \alpha_1)^{e_1} \dots (z - \alpha_d)^{e_d} \text{ mit natürlichen Zahlen } e_1, \dots, e_d \text{ und } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Variiert man $e_1, \dots, e_d$ und c , so erhält man immer noch $f^{-1}(a) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$. Der folgende Satz sagt, dass ein Polynom aber durch einen zweiten Wert, also durch $f^{-1}(b)$ für ein $b \neq a$ eindeutig bestimmt ist.

SATZ. Seien $f, g \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstante Polynome derart, dass Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ existieren mit

$$f^{-1}(a) = g^{-1}(a) \quad \text{und} \quad f^{-1}(b) = g^{-1}(b).$$

Dann gilt $f = g$.

Beweis: O.E. sei $\text{grad}(g) \leq \text{grad}(f)$. Wir betrachten die rationale Funktion $F : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$F(z) = \frac{f'(z)(f(z) - g(z))}{(f(z) - a)(f(z) - b)}.$$

Der Zähler-Grad ist sicher kleiner als der Nenner-Grad, woraus $F(\infty) = 0$ folgt. Wir wollen sehen, dass F keine Polstellen hat. Sei $(z - \xi)^e$ ein Teiler des Nenners. Da $f(z) - a$ und $f(z) - b$ teilerfremd sind, können wir o.E. annehmen, dass $(z - \xi)^e$ das Polynom $f(z) - a$ teilt, d.h.

$$f(z) - a = (z - \xi)^e \cdot h(z) \text{ mit einem Polynom } h(z).$$

Dann ist

$$f'(z) = e(z - \xi)^{e-1}h(z) + (z - \xi)^e h'(z),$$

also teilt $(z - \xi)^{e-1}$ das Polynom $f'(z)$. Es ist $f(\xi) = a$, also gilt nach Voraussetzung auch $g(\xi) = a$. Wegen

$$f(z) - g(z) = (f(z) - a) - (g(z) - a) = (f(z) - f(\xi)) - (g(z) - g(\xi))$$

teilt $z - \xi$ das Polynom $f(z) - g(z)$. Insgesamt folgt, dass $(z - \xi)^e$ das Polynom $f'(z)(f(z) - g(z))$ teilt. Daher kürzt sich $(z - \xi)^e$ in $F(z)$ heraus. Also hat $F(z)$ keine Polstellen. Wegen $F(\infty) = 0$ ist $F(z)$ das Nullpolynom, also $f(z) = g(z)$, wie behauptet. ■

Wir betrachten die Situation nun für rationale Funktionen, also für meromorphe Funktionen $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$. Das folgende Beispiel zeigt, dass (in obigem Sinn) eine rationale Funktion durch 3 Werte noch nicht festgelegt ist.

Beispiel: Sei $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}i}{6} \in \mathbb{C}$ (Die Zahl α genügt der Gleichung $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3} = 0$.) und

$$f(z) = \frac{(z - \alpha)^2(z - (1 - 2\alpha))}{z^2(z - 1)}, \quad g(z) = \frac{(z - \alpha)(z - (1 - 2\alpha))^2}{z(z - 1)^2}$$

Dann gilt:

$$f^{-1}(0) = g^{-1}(0), \quad f^{-1}(1) = g^{-1}(1), \quad f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty).$$

(Der Nachweis der Behauptung ist eine Übungsaufgabe.)

SATZ. Seien f, g nichtkonstante meromorphe Funktionen auf $\widehat{\mathbb{C}}$, sodass 4 verschiedene Punkte $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ existieren mit

$$f^{-1}(a_1) = g^{-1}(a_1), \quad f^{-1}(a_2) = g^{-1}(a_2), \quad f^{-1}(a_3) = g^{-1}(a_3), \quad f^{-1}(a_4) = g^{-1}(a_4).$$

Dann gilt schon $f = g$.

Beweis:

- (1) Nach einer geeigneten (Möbius-)Transformation können wir o.E.

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \infty, \quad a_3 = a, \quad a_4 = b$$

annehmen mit $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $a \neq b$. Nach eventueller Vertauschung von f und g können wir o.E. $\text{grad}(f) \geq \text{grad}(g)$ annehmen. Wir schreiben $f = \frac{f_1}{f_2}$ und $g = \frac{g_1}{g_2}$ mit teilerfremden Polynomen f_1, f_2 und teilerfremden Polynomen g_1, g_2 .

- (2) Die folgenden Überlegungen brauchen wir im Weiteren nicht. Das Verhalten in ∞ lässt sich so beschreiben

$$f(\infty) \begin{cases} = \infty & \text{im Fall } \text{grad}(f_1) > \text{grad}(f_2), \\ \in \mathbb{C} & \text{im Fall } \text{grad}(f_1) = \text{grad}(f_2), \\ = 0 & \text{im Fall } \text{grad}(f_1) < \text{grad}(f_2). \end{cases}$$

Eine entsprechende Fallunterscheidung gilt natürlich für g . Die Voraussetzung $f^{-1}(0) = g^{-1}(0)$ und $f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty)$ liefert dann die Implikationen

$$\begin{aligned} \text{grad}(f_1) > \text{grad}(f_2) &\implies \text{grad}(g_1) > \text{grad}(g_2), \\ \text{grad}(f_1) = \text{grad}(f_2) &\implies \text{grad}(g_1) = \text{grad}(g_2), \\ \text{grad}(f_1) < \text{grad}(f_2) &\implies \text{grad}(g_1) < \text{grad}(g_2). \end{aligned}$$

(3) Für $\xi \in \mathbb{C}$ gelten die Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) = 0 &\iff f(\xi) = 0 \iff g(\xi) = 0 \iff g_1(\xi) = 0, \\ f_2(\xi) = 0 &\iff f(\xi) = \infty \iff g(\xi) = \infty \iff g_2(\xi) = 0, \\ f_1(\xi) = af_2(\xi) &\iff f(\xi) = a \iff g(\xi) = a \iff g_1(\xi) = ag_2(\xi), \\ f_1(\xi) = bf_2(\xi) &\iff f(\xi) = b \iff g(\xi) = b \iff g_1(\xi) = bg_2(\xi). \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Die folgenden beiden Polynome haben jeweils mengenmäßig, d.h. ohne Vielfachheiten, die gleichen Nullstellen:

$$f_1(z) \text{ und } g_1(z), \quad f_2(z) \text{ und } g_2(z)$$

$$f_1(z) - af_2(z) \text{ und } g_1(z) - ag_2(z), \quad f_1(z) - bf_2(z) \text{ und } g_1(z) - bg_2(z).$$

(4) Wir wollen zeigen, dass folgende Teilbarkeitsbeziehung gilt:

$$f_1f_2(f_1 - af_2)(f_1 - bf_2) \mid (f'_1f_2 - f_1f'_2) \cdot (f_1g_2 - f_2g_1).$$

Da man von 0 verschiedene Polynome (bis auf eine multiplikative Konstante) als Produkt von Ausdrücken $(z - \xi)^e$ (mit $e \in \mathbb{N}$) schreiben kann, genügt es, folgende Implikation zu zeigen:

$$(z - \xi)^e \mid f_1f_2(f_1 - af_2)(f_1 - bf_2) \implies (z - \xi)^e \mid (f'_1f_2 - f_1f'_2)(f_1g_2 - f_2g_1).$$

Da f_1 und f_2 als teilerfremd vorausgesetzt waren, sind auch die vier Polynome $f_1, f_2, f_1 - af_2, f_1 - bf_2$ paarweise teilerfremd. Teilt also $(z - \xi)^e$ das Produkt $f_1f_2(f_1 - af_2)(f_1 - bf_2)$, so genau einen der vier Faktoren. Im Prinzip gibt es also 4 Fälle.

(a) **Fall** $(z - \xi)^e \mid f_1$: Wir schreiben

$$f_1(z) = (z - \xi)^e h(z)$$

und erhalten

$$f'_1(z) = e(z - \xi)^{e-1}h(z) + (z - \xi)^e h'(z) = (z - \xi)^{e-1} (eh(z) + (z - \xi)h'(z)),$$

also $(z - \xi)^{e-1} \mid f'_1(z)$. Dies impliziert

$$(z - \xi)^{e-1} \mid (f'_1f_2 - f_1f'_2).$$

Aus $z - \xi \mid f_1(z)$ folgt $f_1(\xi) = 0$, und damit $g_1(\xi) = 0$. Also ist ξ Nullstelle von $f_1g_2 - f_2g_1$, woraus

$$z - \xi \mid f_1g_2 - f_2g_1$$

folgt. Insgesamt folgt

$$(z - \xi)^e \mid (f'_1f_2 - f_1f'_2)(f_1g_2 - f_2g_1).$$

(b) **Fall** $(z - \xi)^e \mid f_2$: Dies zeigt man genau wie eben. (In $(f'_1f_2 - f_1f'_2)(f_1g_2 - f_2g_1)$ kann man die Indizes 1 und 2 vertauschen ohne den Ausdruck zu ändern.)

(c) **Fall** $(z - \xi)^e \mid f_1 - af_2$: Wir schreiben

$$f_1(z) - af_2(z) = (z - \xi)^e h(z), \quad \text{also} \quad f_1(z) = af_2(z) + (z - \xi)^e h(z).$$

Wie zuvor findet man ein Polynom $k(z)$ mit

$$f'_1(z) = af'_2(z) + (z - \xi)^{e-1}k(z).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f'_1f_2 - f_1f'_2 &= (af'_2(z) + (z - \xi)^{e-1}k(z))f_2(z) - (af_2(z) + (z - \xi)^e h(z))f'_2(z) = \\ &= (z - \xi)^{e-1}k(z)f_2(z) - (z - \xi)^e h(z)f'_2(z), \end{aligned}$$

was wiederum

$$(z - \xi)^{e-1} \mid f'_1f_2 - f_1f'_2$$

liefert. Aus $z - \xi \mid f_1 - af_2$ folgt $f_1(\xi) = af_2(\xi)$, und dieses dann $g_1(\xi) = ag_2(\xi)$. Also ist

$$f_1(\xi)g_2(\xi) - f_2(\xi)g_1(\xi) = af_2(\xi) \cdot g_2(\xi) - f_2(\xi) \cdot ag_2(\xi) = 0,$$

woraus

$$z - \xi \mid f_1g_2 - f_2g_1$$

folgt. Insgesamt ergibt sich auch hier

$$(z - \xi)^e \mid (f'_1 f_2 - f_1 f'_2)(f_1 g_2 - f_2 g_1).$$

(d) **Fall** $(z - \xi)^e \mid f_1 - b f_2$: Genau wie eben zeigt man

$$(z - \xi)^e \mid (f'_1 f_2 - f_1 f'_2)(f_1 g_2 - f_2 g_1).$$

Zusammengenommen erhält man die Teilbarkeitsrelation

$$f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2) \mid (f'_1 f_2 - f_1 f'_2)(f_1 g_2 - f_2 g_1).$$

- (5) Durch Vergleich der Grade auf der linken und rechten Seite wollen wir zeigen, dass nur die Möglichkeit $f_1 g_2 - f_2 g_1 = 0$, also $f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = g$ bleibt. Sei $m = \text{grad}(f_1)$, $n = \text{grad}(f_2)$, also $\text{grad}(f) = \max(m, n)$. Wir hatten $\text{grad}(g) \leq \text{grad}(f)$ vorausgesetzt, also $\text{grad}(g_1) \leq \max(m, n)$ und $\text{grad}(g_2) \leq \max(m, n)$. Dann folgt

$$\text{grad}(f_1 g_2 - f_2 g_1) \leq 2 \max(m, n).$$

(a) **Fall** $\text{grad}(f_1) > \text{grad}(f_2)$: Dann gilt

$$\text{grad}(f_1) = \text{grad}(f_1 - a f_2) = \text{grad}(f_1 - b f_2) = m,$$

also

$$\text{grad}(f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2)) = 3m + n.$$

Da f_1 und f_2 unterschiedlichen Grad haben, gilt

$$\text{grad}(f'_1 f_2 - f_1 f'_2) = m + n - 1.$$

Es folgt

$$\text{grad}(f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2)) \leq \text{grad}((f'_1 f_2 - f_1 f'_2)(f_1 g_2 - f_2 g_1)),$$

also

$$3m + n \leq (m + n - 1) + 2m,$$

ein Widerspruch. Dieser Fall kann nicht eintreten.

(b) **Fall** $\text{grad}(f_1) < \text{grad}(f_2)$: Hier gilt

$$\text{grad}(f_2) = \text{grad}(f_1 - a f_2) = \text{grad}(f_1 - b f_2) = n,$$

also

$$\text{grad}(f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2)) = m + 3n.$$

Wieder gilt

$$\text{grad}(f'_1 f_2 - f_1 f'_2) = m + n - 1 \quad \text{und} \quad \text{grad}(f_1 g_2 - f_2 g_1) \leq 2n.$$

Wieder erhält man durch Gradvergleich

$$m + 3n \leq (m + n - 1) + 2n,$$

ein Widerspruch. Auch dieser Fall kann nicht eintreten.

(c) **Fall** $\text{grad}(f_1) = \text{grad}(f_2)$: Nach eventueller Vertauschung von a und b können wir

$$\text{grad}(f_1 - a f_2) = \text{grad}(f_1) = \text{grad}(f_2) \quad \text{mit} \quad f_1 - b f_2 = h \quad \text{mit} \quad \text{grad}(h) \leq m$$

annehmen. Wir erhalten

$$\text{grad}(f_1 f_2 (f_1 - a f_2)(f_1 - b f_2)) = 3m + \text{grad}(h).$$

Wir schätzen ab $\text{grad}(f_1 g_2 - f_2 g_2) \leq 2m$. Nun ist

$$f'_1 f_2 - f_1 f'_2 = (b f'_2 + h') f_2 - (b f_2 + h) f'_2 = h' f_2 - h f'_2 \leq \text{grad}(h) + m - 1.$$

Also folgt

$$\text{grad}((f'_1 f_2 - f_1 f'_2)(f_1 g_2 - f_2 g_1)) \leq (\text{grad}(h) + m - 1) + 2m = 3m + \text{grad}(h) - 1.$$

Auch hier erhält man einen Widerspruch.

Wir haben gesehen, dass die Annahme $f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0$ zu einem Widerspruch führt. Also folgt $f_1 g_2 = f_2 g_1$, und damit $f = \frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = g$, was wir zeigen wollten. ■

2. Beispiele ausgefüllter Julia-Mengen für quadratische Polynome

Ist $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, so kann man für $a \in \mathbb{C}$ die Zahlenfolge $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$, also $(f^n(a))_{n \geq 0}$ betrachten. Man kann in diesem Fall die **ausgefüllte Julia-Menge** von f als

$$\mathcal{K}(f) = \{a \in \mathbb{C} : (f^n(a))_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt}\}$$

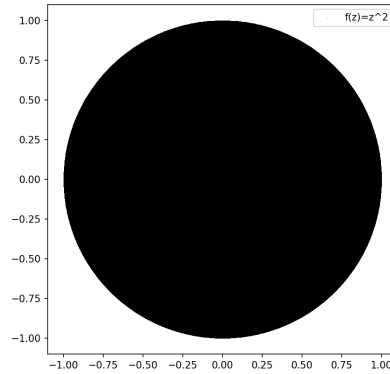
definieren [S, S.74]. Die **Julia-Menge** von f ist dann der Rand der ausgefüllten Julia-Menge:

$$\mathcal{J}(f) = \partial \mathcal{K}(f).$$

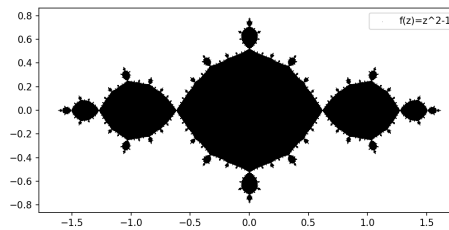
Es folgen ein paar Beispiele mit Polynomen der Gestalt $f(z) = z^2 + c$ für ausgefüllte Julia-Mengen $\mathcal{K}(f)$. Die Bilder wurden mit einem einfachen Python-Programm erstellt.

- (1) $f(z) = z^2$. Man sieht leicht, dass gilt

$$\mathcal{K}(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

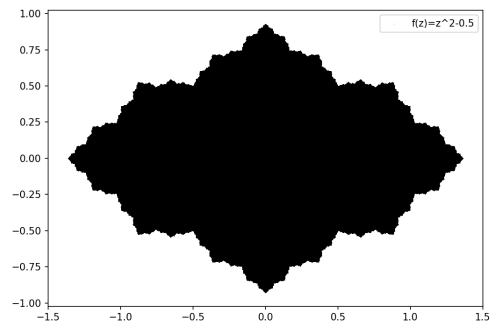


- (2) $f(z) = z^2 - 1$.

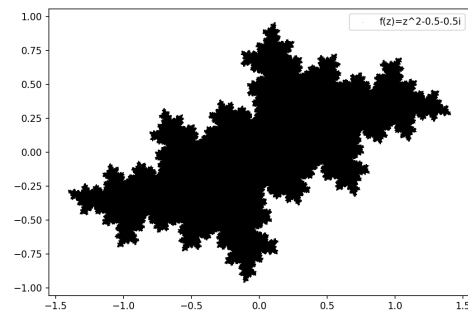


- (3) $f(z) = z^2 + 1$. Auf dem mit Python erzeugten Bild ist nichts zu sehen, aber f hat die Fixpunkte $e^{2\pi i \frac{1}{6}}, e^{2\pi i \frac{5}{6}}$, die natürlich zu $\mathcal{K}(f)$ gehören.

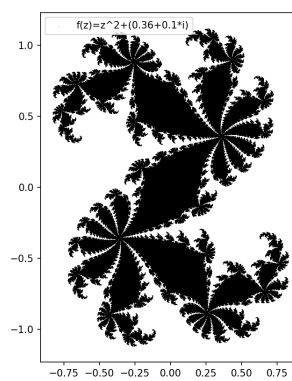
(4) $f(z) = z^2 - 0.5$.



(5) $f(z) = z^2 - 0.5 - 0.5i$.



(6) $f(z) = z^2 + (0.36 + 0.1i)$.



(7) $f(z) = z^2 - 2$. In Aufgabe 29 wird gezeigt, dass gilt
 $\mathcal{K}(f) = [-2, 2]$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Die folgenden geschlossenen Kurven (Wege) γ kamen in Staatsexamenaufgaben der letzten Jahre vor. Skizziere sie (mit Umlaufsinn) und bestimme die Umlaufzahlen für alle Punkte aus $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$.

(1)

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) = \begin{cases} -1 + e^{2it} & \text{für } t \in [0, \pi], \\ 1 - e^{-2(t-\pi)i} & \text{für } t \in (\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

(2) Für $R > 1$ sei

$$\gamma_R : [0, 2R + \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma_R(t) = \begin{cases} t & \text{für } t \in [0, R], \\ Re^{i(t-R)} & \text{für } t \in (R, R + \frac{\pi}{2}], \\ i(2R + \frac{\pi}{2} - t) & \text{für } t \in (R + \frac{\pi}{2}, 2R + \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

(3) γ sei der geschlossene Polygonzug, der die Punkte

$$\frac{3}{2} - 2i, \quad \frac{3}{2} + 2i, \quad -\frac{3}{2} - i, \quad -\frac{3}{2} + i, \quad \frac{3}{2} - 2i$$

in der angegebenen Reihenfolge geradlinig verbindet.

(4)

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } \gamma(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{-it}.$$

Aufgabe 2: (Staatsexamen Analysis Herbst 2024, Thema Nr. 1, Aufgabe 2)

Geben Sie jeweils an, ob die folgende Aussage richtig oder falsch ist, und führen Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

- a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $e^{f(z)} = z$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt.
- b) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, dann ist das Bild $f(U) \subseteq \mathbb{C}$ offen.
- c) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|f(z)| = \sin(\pi|z|)$ für alle $z \in \mathbb{D}$. (Hier ist $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene.)

Aufgabe 3: Durch

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$$

wird eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert.

- (1) Bestimme Typ und Residuum für jede isolierte Singularität.
- (2) Besitzt f eine Stammfunktion?
- (3) Besitzt die Einschränkung von f auf $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ eine Stammfunktion?

Aufgabe 4: (Staatsexamen Analysis Herbst 2024, Thema Nr. 2, Aufgabe 3)

Es sei

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z} + \frac{1}{z-2} \left(\exp\left(\frac{1}{1-z}\right) - 1 \right)$$

- a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und berechnen Sie jeweils das Residuum.
- b) Es sei $V := \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |\frac{3}{2} - z| \leq \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f|_{\mathbb{C} \setminus V}$ von f auf $\mathbb{C} \setminus V$ eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 5: Wieviele Nullstellen hat das Polynom

$$f(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$$

im Kreisring $1 \leq |z| \leq 2$?

(Hinweis: Satz von Rouché)

Aufgabe 6: (Staatsexamen Frühjahr 2008, Thema Nr. 1, Aufgabe 4)

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) = z^5 - 1 - \frac{1}{2}e^z$ in der linken Halbebene $\mathbb{H}_l := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) < 0\}$ genau 2 Nullstellen hat, mit Vielfachheiten gezählt.

(Hinweis: Satz von Rouché)

Aufgabe 7: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{K_1(0)} \subseteq G$ und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $|f(z)| \geq 1$ für alle $z \in G$ mit $|z| = 1$.
- Es gibt einen Punkt $z_0 \in K_1(0)$ mit $|f(z_0)| < 1$.

Zeige:

$$K_1(0) \subseteq f(K_1(0)).$$

(Hinweis: Satz von Rouché)

Aufgabe 8: Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}[z].$$

Zeige, dass es für jedes $R > 0$ ein $n_R \in \mathbb{N}$ gibt mit der Eigenschaft:

$$n \geq n_R \implies P_n(z) \text{ hat keine Nullstelle in } \overline{K_R(0)}.$$

(Hinweis: Satz von Rouché)

Aufgabe 9: Wir betrachten die holomorphen Funktionen

$$f_n : K_1(0) \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f_n(z) = \frac{1}{1 + z^n}.$$

Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ lokal gleichmäßig, aber nicht gleichmäßig gegen die konstante Funktion 1 konvergiert.

Aufgabe 10: (Staatsexamen Analysis Frühjahr 2025, Thema Nr. 3, Aufgabe 4)

Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, -1\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z^2} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

- a) Bestimmen Sie die Art jeder isolierten Singularität von f und berechnen Sie die Residuen.
 b) Berechnen Sie für

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, -1, 1\}, \quad t \mapsto -1 + \frac{1}{2}e^{-it}$$

das Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$.

- c) Zeigen Sie, dass sich f auf $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z+1| < 1\}$ nicht lokal gleichmäßig durch Polynome approximieren lässt.

Aufgabe 11:

- (1) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $(f_n)_{n \geq 1}, (g_n)_{n \geq 1}$ Folgen stetiger Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}, g_n : U \rightarrow \mathbb{C}$, die auf U lokal gleichmäßig gegen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ bzw. $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ konvergieren. Zeige, dass die Produktfolge $(f_n g_n)_{n \geq 1}$ lokal gleichmäßig gegen das Produkt fg konvergiert.
 (2) Bleibt die Aussage in (1) richtig, wenn man von den Funktionen f_n und g_n nicht mehr voraussetzt, dass sie stetig sind?

Aufgabe 12: Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $a \in U$ und $r > 0$ mit

$$\overline{K_r(a)} \subseteq U.$$

Zeige, dass ein $\delta > 0$ existiert mit

$$K_{r+\delta}(a) \subseteq U.$$

Aufgabe 13: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{K_1(0)} \subseteq G$, $z_0 \in G$ mit $|z_0| = 1$ und $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einem Pol 1. Ordnung in z_0 . Sei $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ die Potenzreihenentwicklung von f in 0. Zeige:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = z_0.$$

Aufgabe 14: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $C > 0$ und $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : G \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$0 < |f_n(z)| \leq C \text{ für alle } z \in G.$$

Es gebe einen Punkt $z_0 \in G$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z_0) = 0.$$

Zeige, dass $(f_n)_{n \geq 1}$ gegen die Nullfunktion konvergiert.

(Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe kann man die Sätze von Hurwitz und Montel benutzen.)

Aufgabe 15: Die einzigen Nullstellen von $\cos(z)$ in $\mathbb{C}$ sind die reellen Nullstellen $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Daher ist $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ holomorph auf der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit

$$f_n : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } f_n(z) = \tan(nz).$$

Zeige, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ auf $\mathbb{H}$ lokal gleichmäßig gegen die konstante Funktion i konvergiert.

Aufgabe 16: Fragt man sich, ob die reelle Funktionenfolge $(f_n)_{n \geq 1}$ mit

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(nx)$$

eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt, könnte man versuchen, nach Wahl einer Zahl $\delta > 0$ den Satz von Montel auf die Funktionenfolge $(g_n)_{n \geq 1}$ mit

$$g_n : \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| < \delta\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sin(nz)$$

anzuwenden. Funktioniert das?

Aufgabe 17:

- (1) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in G$, $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit einer wesentlichen Singularität in z_0 . Zeige:

- (a) Sind $U, V \subseteq G$ offene Teilmengen mit $z_0 \in U$ und $V \neq \emptyset$, so gilt

$$f(U \setminus \{z_0\}) \cap f(V) \neq \emptyset.$$

(Hinweis: Casorati-Weierstraß)

- (b) f ist nicht injektiv.

- (2) Zeige: Ist f eine injektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, so gibt es $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und

$$f(z) = az + b.$$

(Hinweis: f hat eine isolierte Singularität in ∞ . Welche Möglichkeiten gibt es?)

Aufgabe 18: (Staatsexamen Analysis Herbst 1997, Thema Nr. 3, Aufgabe 2)

Finden Sie jeweils die allgemeine Form einer Funktion f , die in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genau die folgenden Singularitäten hat:

- (a) einen doppelten Pol in 0 mit Hauptteil z^{-2} ,
- (b) einen n -fachen Pol in 0 und einen m -fachen Pol in ∞ ,
- (c) n einfache Pole.

Aufgabe 19: (Staatsexamen Analysis Frühjahr 2003, Thema Nr. 2, Aufgabe 2(a))

Bestimmen Sie die Pole und deren Ordnungen der komplexen Funktionen $f(z) = 1/\sin z$ und $g(z) = \sin(1/z)$ in $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Aufgabe 20: Durch

$$f(z) = \frac{z^2 + 6z - 11}{z^2 - 1}$$

wird eine Abbildung $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert. Bestimme für alle $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ die Menge $f^{-1}(w)$ und die Zahl $|f^{-1}(w)|$.

Aufgabe 21: Seien $f, g \in \mathbb{C}[z]$ nicht konstante Polynome derart, dass Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \neq \beta$ existieren mit

$$f^{-1}(\alpha) = g^{-1}(\alpha) \quad \text{und} \quad f^{-1}(\beta) = g^{-1}(\beta).$$

Zeige, dass dann $f = g$ gilt.

(Ein Lösungshinweis ist auf einem Extrablatt erhältlich.)

Aufgabe 22: Sei $\alpha = \frac{3-\sqrt{3}i}{6} \in \mathbb{C}$. (Die Zahl α genügt der Gleichung $\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3} = 0$.) Sei

$$f(z) = \frac{(z-\alpha)^2(z-(1-2\alpha))}{z^2(z-1)}, \quad g(z) = \frac{(z-\alpha)(z-(1-2\alpha))^2}{z(z-1)^2}$$

Zeige:

$$f^{-1}(0) = g^{-1}(0), \quad f^{-1}(1) = g^{-1}(1), \quad f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty).$$

Aufgabe 23: Sei $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion vom Grad 3. Listet man die Verzweigungsindizes in allen Verzweigungspunkten auf, so gibt es nach Riemann-Hurwitz (bis auf die Reihenfolge) folgende drei Möglichkeiten:

$$2, 2, 2, 2 \quad \text{oder} \quad 2, 2, 3 \quad \text{oder} \quad 3, 3.$$

Gib für jede Möglichkeit eine passende Funktion an.

Aufgabe 24: Seien f, g holomorphe Funktionen auf $\mathbb{C}$. Zeige: Genau dann gilt

$$f(z)^2 + g(z)^2 = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C},$$

wenn es eine holomorphe Funktion $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt mit

$$f(z) = \cos(h(z)) \quad \text{und} \quad g(z) = \sin(h(z)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Aufgabe 25: Zeige für $n \geq 2$: Die Menge der auf der $(n-1)$ -Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ im $\mathbb{R}^n$ gelegenen Punkte mit rationalen Koordinaten, also

$$M_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

lässt sich wie folgt parametrisiert beschreiben:

$$M_n = \left\{ \left(\frac{2u_1}{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 + 1}, \dots, \frac{2u_{n-1}}{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 + 1}, \frac{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 - 1}{u_1^2 + \dots + u_{n-1}^2 + 1} \right) : u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{Q} \right\} \cup \{(0, \dots, 0, 1)\}.$$

(Hinweis: Stereographische Projektion)

Aufgabe 26: Durch $f(z) = z + \frac{1}{z}$ wird eine meromorphe Funktion $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definiert.

- (1) Bestimme die Verzweigungspunkte.
- (2) Jede Zahl aus dem Intervall $[-2, 2]$ hat die Gestalt $2 \cos(t)$ mit $t \in [0, \pi]$. Bestimme $f^{-1}(2 \cos(t))$. Was ist $f^{-1}([-2, 2])$?
- (3) Zeige:

$$f(\{|z| > 1\}) = f(\{0 < |z| < 1\}) = \mathbb{C} \setminus [-2, 2].$$

(4) Zeige, dass die Einschränkungen

$$f|_{\{0 < |z| < 1\}} : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$$

und

$$f|_{\{|z| > 1\}} : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$$

bijektiv sind.

Ist f eine meromorphe Funktion vom Grad ≥ 2 auf $\widehat{\mathbb{C}}$, so heißt f in $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ **total verzweigt**, wenn gilt $e(f, a) = \text{grad}(f)$.

Aufgabe 27: Sei f eine meromorphe Funktion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ vom Grad $n \geq 2$.

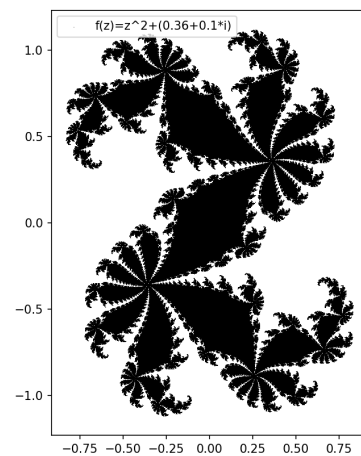
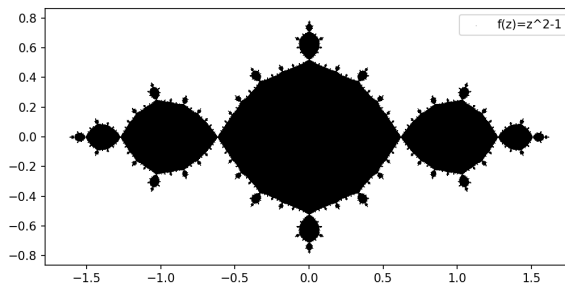
- (1) Zeige, dass f in $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ genau dann total verzweigt ist, wenn gilt $f^{-1}(f(a)) = \{a\}$.
- (2) Zeige, dass f höchstens in 2 Punkten total verzweigt sein kann. (Hinweis: Riemann-Hurwitz)
- (3) Gib ein Beispiel einer Funktion an, die in zwei Punkten total verzweigt ist.
- (4) Seien $w_0, w_1 \in \mathbb{C}$ mit $w_0 \neq w_1$. Gibt es eine meromorphe Funktion f mit

$$f^{-1}(w_0) = \{0\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(w_1) = \{1\}?$$

Ist $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ ein Polynom, so kann man für $a \in \mathbb{C}$ die Zahlenfolge $a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \dots$, also $(f^n(a))_{n \geq 0}$ betrachten. Man kann in diesem Fall die **ausgefüllte Julia-Menge** von f als

$$\mathcal{K}(f) = \{a \in \mathbb{C} : (f^n(a))_{n \geq 0} \text{ ist beschränkt}\}$$

definieren.¹ (Die **Julia-Menge** von f ist dann der Rand der ausgefüllten Julia-Menge: $\mathcal{J}(f) = \partial \mathcal{K}(f)$.) Die Bilder zeigen die ausgefüllten Julia-Mengen für $f(z) = z^2 - 1$ und $f(z) = z^2 + (0.36 + 0.1i)$. Sie wurden mit einem einfachen Python-Programm erstellt.



Aufgabe 28: Sei $f_c(z) = z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{C}$.

¹J. H. Silverman. The Arithmetic of Dynamical Systems. Springer, 2007. S.74

- (1) Bestimme die ausgefüllte Julia-Menge für $f_0(z) = z^2$.
- (2) Zeige, dass für $|z| \geq 1 + \sqrt{1+|c|}$ gilt $|f_c(z)| \geq 2|z|$.
- (3) Zeige:

$$\mathcal{K}(f_c) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \sqrt{1+|c|}\}.$$

Aufgabe 29: Mit dieser Aufgabe soll die ausgefüllte Julia-Menge $\mathcal{K}(f)$ des Polynoms $f(z) = z^2 - 2$ bestimmt werden.

- (1) Jede Zahl des Intervalls $[-2, 2]$ lässt sich (eindeutig) schreiben als $2 \cos(t)$ mit $t \in [0, \pi]$. Zeige:
 $f^n(2 \cos(t)) = 2 \cos(2^n t)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \in [0, \pi]$.

- (2) In Aufgabe 26 wurde gezeigt, dass

$$g : \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus [-2, 2] \text{ mit } g(z) = z + \frac{1}{z}$$

bijektiv ist. Zeige, dass für $b \in \mathbb{C}$ mit $|b| > 1$ gilt

$$f^n(g(b)) = g(b^{2^n}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

- (3) Folgere aus (1) und (2), dass für die ausgefüllte Julia-Menge von $f(z) = z^2 - 2$ gilt

$$\mathcal{K}(f) = [-2, 2].$$

Aufgabe 30: Bestimme eine Möbius-Transformation

- (1) $f(z)$ mit $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = \infty$,
- (2) $g(z)$ mit $g(1) = 2 + i$, $g(2 + i) = 3$, $g(3) = 1$,

Aufgabe 31: Für zwei verschiedene Punkte $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ sei $\mathcal{F}_{z_1, z_2}$ die Menge der Möbius-Transformationen, die z_1 und z_2 festlassen, also

$$\mathcal{F}_{z_1, z_2} = \{f \in \mathcal{M} \text{ mit } f(z_1) = z_1 \text{ und } f(z_2) = z_2\}.$$

Zeige:

- (1) Ist $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}$, so ist

$$\mathcal{F}_{z_1, z_2} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{z_1, z_2\}, \quad f \mapsto f(z_0)$$

eine Bijektion.

- (2) $\mathcal{F}_{z_1, z_2}$ ist eine Untergruppe der Gruppe $\mathcal{M}$ der Möbius-Transformationen ist.
- (3) Sind $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $z_1 \neq z_2$ und $w_1 \neq w_2$, und ist g eine Möbius-Transformation mit $g(z_1) = w_1$ und $g(z_2) = w_2$, so gilt

$$\mathcal{F}_{w_1, w_2} = g \circ \mathcal{F}_{z_1, z_2} \circ g^{-1}.$$

(Die Untergruppen $\mathcal{F}_{z_1, z_2}$ und $\mathcal{F}_{w_1, w_2}$ sind also konjugiert.

- (4) Für $z_1, z_2, w_1, w_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $z_1 \neq z_2$, $w_1 \neq w_2$ und $\{z_1, z_2\} \neq \{w_1, w_2\}$ gilt

$$\mathcal{F}_{z_1, z_2} \cap \mathcal{F}_{w_1, w_2} = \{\text{id}_{\widehat{\mathbb{C}}}\}.$$

- (5) Die Gruppen $\mathcal{F}_{z_1, z_2}$ (für $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ mit $z_1 \neq z_2$) sind abelsch.

Aufgabe 32: Zu drei verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ betrachte man

$$\mathcal{G} = \{f \text{ Möbius-Transformation mit } f(\{z_1, z_2, z_3\}) = \{z_1, z_2, z_3\}\}.$$

Ist $f \in \mathcal{G}$, so gibt es eine Permutation $\sigma \in S_3 = S(\{1, 2, 3\})$ mit

$$f(z_1) = z_{\sigma(1)}, \quad f(z_2) = z_{\sigma(2)}, \quad f(z_3) = z_{\sigma(3)}.$$

Die Zuordnung $f \mapsto \sigma$ definiert eine Abbildung $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow S_3$.

- (1) Zeige, dass $\mathcal{G}$ eine Untergruppe von $\mathcal{M}$ ist.
- (2) Zeige, dass $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow S_3$ ein Gruppenisomorphismus ist.
- (3) Bestimme $\mathcal{G}$ im Fall $z_1 = 1, z_2 = 0, z_3 = \infty$.

Aufgabe 33: Für $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{1, 0, \infty\}$ gilt:

$DV(z, 1, 0, \infty) = z$	$DV(0, z, 1, \infty) = \frac{-1}{z-1}$
$DV(z, 1, \infty, 0) = \frac{1}{z}$	$DV(0, z, \infty, 1) = -z + 1$
$DV(z, 0, 1, \infty) = -z + 1$	$DV(0, 1, z, \infty) = \frac{z}{z-1}$
$DV(z, 0, \infty, 1) = \frac{-1}{z-1}$	$DV(0, 1, \infty, z) = \frac{z}{z-1}$
$DV(z, \infty, 1, 0) = \frac{z}{z-1}$	$DV(0, \infty, z, 1) = z$
$DV(z, \infty, 0, 1) = \frac{z}{z-1}$	$DV(0, \infty, 1, z) = \frac{1}{z}$
$DV(1, z, 0, \infty) = \frac{1}{z}$	$DV(\infty, z, 1, 0) = \frac{z}{z-1}$
$DV(1, z, \infty, 0) = z$	$DV(\infty, z, 0, 1) = \frac{z}{z-1}$
$DV(1, 0, z, \infty) = \frac{z-1}{z}$	$DV(\infty, 1, z, 0) = \frac{-1}{z-1}$
$DV(1, 0, \infty, z) = \frac{z}{z-1}$	$DV(\infty, 1, 0, z) = -z + 1$
$DV(1, \infty, z, 0) = -z + 1$	$DV(\infty, 0, z, 1) = \frac{1}{z}$
$DV(1, \infty, 0, z) = \frac{-1}{z-1}$	$DV(\infty, 0, 1, z) = z$

Zwecks einer einheitlichen Schreibweise sei $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z, 1, 0, \infty)$ und

$$W(z) = \{DV(z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}) : \sigma \in S_4\},$$

wobei S_4 die Menge der Permutationen von $1, 2, 3, 4$ bezeichnet.

Bestimme die Anzahl $|W(z)|$ in Abhängigkeit von $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{1, 0, \infty\}$.

Aufgabe 34: (Staatsexamen Analysis Frühjahr 2024, Thema Nr. 2, Aufgabe 5)

Es sei $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{z-1}{z+1} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}, \\ \infty & \text{für } z = -1, \\ 1 & \text{für } z = \infty. \end{cases}$$

- a) Bestimmen Sie mit Begründung $\varphi(\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$ und $\varphi(\mathbb{R})$.
- b) Geben Sie für

$$U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

und

$$V := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

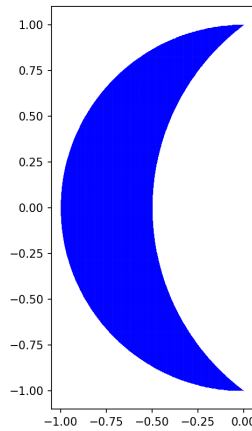
eine biholomorphe Abbildung $f : U \rightarrow V$ an, und zeigen Sie, dass diese biholomorph ist.

Aufgabe 35: Bestimme das Bild von

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \text{ und } \left| z - \frac{3}{4} \right| > \frac{5}{4} \right\}$$

unter der Möbius-Transformation

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$



Aufgabe 36:

- (1) Zeige, dass für eine Möbius-Transformation $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$f(\mathbb{R} \cup \infty) = \mathbb{R} \cup \infty \iff \text{es gibt } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- (2) Zeige, dass es genau eine Möbius-Transformation $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ gibt mit

$$f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \quad \text{und} \quad f(1) = 0 \quad \text{und} \quad f(i) = i.$$

Bestimme f .

- (3) Zeige, dass für die Möbius-Transformation f aus (2) gilt

$$f(\{e^{it} : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}) = \{it : 0 \leq t \leq 1\}.$$

- (4) Zeige, dass die Möbius-Transformation f aus (2) eine Bijektion

$$\mathbb{H} \setminus \{e^{it} : 0 < t \leq \frac{\pi}{2}\} \xrightarrow{f} \mathbb{H} \setminus \{it : 0 < t \leq 1\},$$

und damit eine biholomorphe Abbildung liefert. (Hier ist $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene.)

Auf dem Übungsblatt wird mehrfach die Funktion $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ benutzt, für die $\varphi_a \in \text{Aut}(\mathbb{E})$ und $\varphi_a \circ \varphi_a = \text{id}_{\mathbb{E}}$ gilt.

Aufgabe 37: Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit zwei Fixpunkten, d.h. es gibt $a, b \in \mathbb{E}$ mit $a \neq b$ und

$$f(a) = a \quad \text{und} \quad f(b) = b.$$

Zeige, dass dann f die Identität $\text{id}_{\mathbb{E}}$ ist.

(Hinweis: Betrachte $g = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a$ und wende das Schwarzsche Lemma an.)

Aufgabe 38: Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion und $a \in \mathbb{E} \setminus \{0\}$ mit

$$f(0) = a \quad \text{und} \quad f(a) = 0.$$

Zeige, dass gilt

$$f = \varphi_a.$$

(Hinweis: Zeige zunächst mit Hilfe von Aufgabe 37, dass f ein Automorphismus von $\mathbb{E}$ ist.)

Aufgabe 39: Sei $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ holomorph mit $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

- (1) Ist es möglich, dass gilt $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$?
- (2) Ist es möglich, dass gilt $f'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$?

Aufgabe 40: Für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ sei $A(f) = \{f'(z) : z \in \mathbb{E}\} = f'(\mathbb{E})$. (Nach dem Satz von der Gebietstreue ist $A(f)$ ein Gebiet oder $A(f)$ besteht nur aus einem Punkt.)

- (1) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n(z) = z^n$. Bestimme $A(f_n)$.
- (2) Zeige, dass für $a \in \mathbb{E}$ die Menge $A(\varphi_a)$ beschränkt ist.
- (3) Skizziere $A(\varphi_{\frac{1}{2}})$.
- (4) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$, für die $A(f)$ unbeschränkt ist?

Aufgabe 41:

- (1) Sei $f \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}}\}$. Dann existieren $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. (Es ist dann $ad-bc > 0$.)
Zeige:

$$\text{Anzahl der Fixpunkte von } f \text{ in } \mathbb{H} = \begin{cases} 0, & \text{falls } (a+d)^2 \geq 4(ad-bc), \\ 1, & \text{falls } (a+d)^2 < 4(ad-bc). \end{cases}$$

- (2) Sei $g \in \text{Aut}(\mathbb{E}) \setminus \{\text{id}_{\mathbb{E}}\}$. Dann existieren $a, \zeta \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1$, $|\zeta| = 1$ und $g(z) = \zeta \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$.
Zeige:

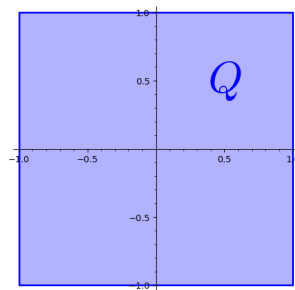
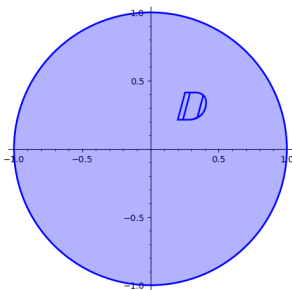
$$\text{Anzahl der Fixpunkte von } g \text{ in } \mathbb{E} = \begin{cases} 0, & \text{falls } |1-\zeta| \geq 2\sqrt{1-|a|^2}, \\ 1, & \text{falls } |1-\zeta| < 2\sqrt{1-|a|^2}. \end{cases}$$

Aufgabe 42: (Staatsexamen Analysis Herbst 2023, Thema Nr. 1, Aufgabe 4a))

Es seien $Q := \{z \in \mathbb{C} : -1 < \text{Re}(z) < 1, -1 < \text{Im}(z) < 1\}$, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $f : \mathbb{D} \rightarrow Q$ eine biholomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.

- (1) Zeigen Sie: Die Abbildung $g : \mathbb{D} \rightarrow Q$, $g(z) = if(z)$ ist biholomorph.
- (2) Beweisen Sie: $f(iz) = if(z)$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

Hinweis: Sie können z.B. $f^{-1} \circ g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ betrachten.



Aufgabe 43: (Staatsexamen Analysis Herbst 2025, Thema Nr. 1, Aufgabe 3)

Im Folgenden sei $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe der komplexen Ebene.

- Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph. Beweisen Sie, dass $|f'(0)| \leq 1$.
- Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in G$. Untersuchen Sie die Menge

$$M := \{g'(0) : g : G \rightarrow G \text{ holomorph mit } g(0) = 0\}$$

auf Beschränktheit und auf Offenheit.

Hinweis: Fallunterscheidung: $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$. Für $G \neq \mathbb{C}$ beachte man a).

Aufgabe 44: (Staatsexamen Analysis Herbst 2025, Thema Nr. 3, Aufgabe 2)

Wir betrachten die folgenden fünf offenen Mengen (obere Halbebene H , erster Quadrant Q , rechter Einheitshalbkreis K , Viertelkreis V und „Pac-Man“ P):

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}, \quad Q = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\},$$

$$V = \{re^{i\phi} \mid r \in (0, 1), |\phi| < \pi/4\}, \quad P = \{re^{i\phi} \mid r \in (0, 1), |\phi| < 3\pi/4\}.$$

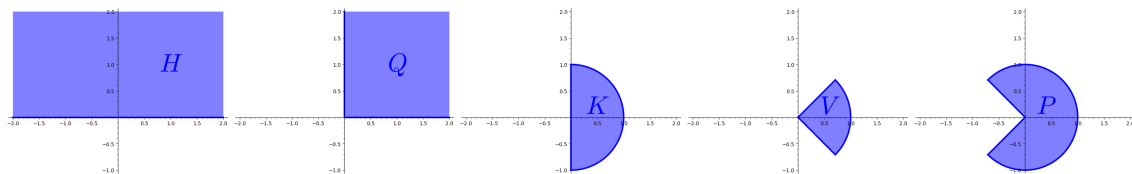
Ziel ist die Konstruktion einer biholomorphen Abbildung $f : H \rightarrow P$.

- Geben Sie jeweils eine biholomorphe Abbildung $g_1 : Q \rightarrow H$, $g_2 : V \rightarrow K$ und $g_3 : V \rightarrow P$ an.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Abbildungen, die holomorph und bijektiv sind, biholomorph sind.
- Begründen Sie, dass die Möbius-Transformation $g_4 : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ auf der erweiterten komplexen Zahlenebene $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit

$$g_4(z) = i \frac{z - i}{z + i}$$

die Menge Q biholomorph auf die Menge K abbildet.

- Geben Sie eine biholomorphe Abbildung $f : H \rightarrow P$ an, indem Sie diese mithilfe von g_1 bis g_4 ausdrücken.



Aufgabe 45: Sei $G \subsetneq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_0 \in G$ und dazu

$$\mathcal{T} = \{f : G \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph mit } f(z_0) = 0 \text{ und } f(G) \subseteq \mathbb{E}\}$$

und

$$\tau = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{T}\}.$$

Zeige, dass für $f \in \mathcal{T}$ folgende Äquivalenz gilt:

$$f : G \rightarrow \mathbb{E} \text{ ist biholomorph} \iff |f'(z_0)| = \tau.$$

(Hinweis: Riemannscher Abbildungssatz und Schwarzsches Lemma)

Aufgabe 46: (Staatsexamen Analysis Frühjahr 1998, Thema Nr. 1, Aufgabe 5)

Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ bezeichne

$$\operatorname{Aut}(G) = \{f : G \rightarrow G \mid f \text{ ist biholomorph}\}$$

die Gruppe der Automorphismen von G . Sei $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie $\text{Aut}(G)$ für

- (a) den punktierten Einheitskreis $G = \mathbb{E} \setminus \{0\}$,
- (b) das Gebiet $G = \mathbb{E} \setminus \{z_1, z_2\}$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{E}$.

Aufgabe 47: (Staatsexamen Analysis Herbst 1996, Thema Nr. 2, Aufgabe 3)

Bestimme eine konforme Abbildung $f : H \rightarrow E$ der oberen Halbebene $H = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ auf die Einheitskreisscheibe $E = \{z \mid |z| < 1\}$. Existiert eine solche Abbildung f , für die zusätzlich $f(2+i) = 0$ gilt und $f(2i)$ reell und positiv ist? Falls ja, bestimme eine solche. Ist sie eindeutig bestimmt?

Aufgabe 48: (Staatsexamen Analysis Herbst 2001, Thema Nr. 1, Aufgabe 5)

- a) Man konstruiere eine biholomorphe Abbildung der längs der negativen reellen Achse geschlitzten Ebene

$$G := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0, \text{Re}(z) \leq 0\}$$

auf den Einheitskreis.

- b) Es sei $\phi : G \rightarrow \mathbb{E}$ eine beliebige biholomorphe Abbildung von G auf den Einheitskreis. Man zeige: Es gibt einen (von ϕ abhängigen) Punkt $P \in \partial\mathbb{E}$ auf dem Rand des Einheitskreises, so dass für jede reelle Zahl α mit $-\pi < \alpha < \pi$ gilt:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(re^{i\alpha}) = P.$$

Aufgabe 49: Aus Aufgabe 17 folgt für die Automorphismengruppe von $\mathbb{C}$

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } a \neq 0\}.$$

Bestimme die Automorphismengruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, also

$$\text{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Aufgabe 50: Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ konvergiert, aber dort nicht normal konvergent ist.

Aufgabe 51: Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z+n} ?$$

Aufgabe 52: Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^3} < \infty.$$

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - a_n)^2} - \frac{1}{a_n^2} \right)$$

auf $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ normal konvergiert.

Literaturverzeichnis

- [AS] W. Adams, E. Straus. Non-archimedean analytic functions taking the same values at the same points. Illinois J. Math. **15** (1971), 418-424.
- [C] J. B. Conway. Functions of One Complex Variable. Graduate Texts in Mathematics 11. Springer, 1975.
- [FB] E. Freitag, R. Busam. Funktionentheorie 1. Vierte, korrigierte und erweiterte Auflage. Springer, 2006.
- [H] W. K. Hayman. Meromorphic Functions. Oxford University Press, 1964.
- [HCR] A. Hurwitz, R. Courant, H. Röhl. Vorlesungen über allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Vierte vermehrte und verbesserte Auflage. Springer, 1964.
- [J] K. Jänich. Funktionentheorie. 6. Auflage. Springer, 2004.
- [L] S. Lang. Complex Analysis. Fourth Edition. Graduate Texts in Mathematics 103. Springer, 1999.
- [P] A. K. Pizer. A problem on rational functions. The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 5 (May, 1973), pp. 552-553.
- [RS1] R. Remmert, G. Schumacher. Funktionentheorie 1. Fünfte, neu bearbeitete Auflage. Springer, 2002.
- [RS2] R. Remmert, G. Schumacher. Funktionentheorie 2. Dritte, neu bearbeitete Auflage. Springer, 2007.
- [S] J. H. Silverman. The Arithmetic of Dynamical System. Graduate Texts in Mathematics 241. Springer, 2007.