Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

© Edgar M.E. Wermuth

TH Nürnberg

WS 24 (urspr. SS 09)

a) Lineare Unabhängigkeit

Grundlegende Rechenoperation in Vektorräumen ist die Bildung von Linearkombinationen

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_k \vec{v}_k \,.$$

Auch ein Produkt $A\vec{x}$, Matrix mal Vektor, ist ja nichts als eine Linearkombination (kurz: **LK**) der Spalten von A, mit den Komponenten von $\vec{x}$ als Koeffizienten.

Die Bildung von LKen bzw. die Wahl der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ ist redundant, wenn verschiedene Koeffizienten, also formal verschiedene LKen *denselben* Vektor ergeben.

Offenbar ist dies genau dann *nicht* der Fall, wenn nur die triviale Linearkombination

$$0 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \vec{v}_k$$

den Nullvektor ergibt. Man nennt dann die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear unabhängig (kurz: **l.u.**), andernfalls linear abhängig.

Klar: Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sind genau dann l.u., wenn keiner der Vektoren als LK der anderen darstellbar ist.

Eine schärfere Charakterisierung liefert das

Unabhängigkeits-Lemma (kurz: **U-Lemma**)

Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie *nicht* sämtlich als Linearkombinationen einer wie auch immer gewählten *kleineren* Anzahl von Vektoren darstellbar sind.

Beweis:
Eine Richtung ist trivial:

Sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ linear abhängig, ist mindestens einer LK der anderen, und diese anderen sind dann eine kleinere Anzahl, durch die alle darstellbar sind.

Nun die andere Richtung.

Angenommen, es gibt Vektoren $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_l$ mit $l < k$ und

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \lambda_{11}\,\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{1l}\,\vec{u}_l,\\
\vec{v}_2 &= \lambda_{21}\,\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{2l}\,\vec{u}_l,\\
&\vdots\\
\vec{v}_k &= \lambda_{k1}\,\vec{u}_1 + \cdots + \lambda_{kl}\,\vec{u}_l.
\end{aligned}$$

Dann können wir eine LK

$$\vec{v} = \alpha_1\,\vec{v}_1 + \alpha_2\,\vec{v}_2 + \cdots + \alpha_k\,\vec{v}_k$$

durch Einsetzen und Umsortieren schreiben als

$$\begin{aligned}
\vec{v} = \quad & \big(\lambda_{11}\cdot\alpha_1 + \lambda_{21}\cdot\alpha_2 + \cdots + \lambda_{k1}\cdot\alpha_k\big)\vec{u}_1\\
&+ \big(\lambda_{12}\cdot\alpha_1 + \lambda_{22}\cdot\alpha_2 + \cdots + \lambda_{k2}\cdot\alpha_k\big)\vec{u}_2\\
&\vdots\\
&+ \big(\lambda_{1\,l}\cdot\alpha_1 + \lambda_{2\,l}\cdot\alpha_2 + \cdots + \lambda_{k\,l}\cdot\alpha_k\big)\vec{u}_l\,.
\end{aligned}$$

Da homogene lineare Gleichungssysteme mit mehr Unbekannten als Gleichungen stets nichttriviale Lösungen besitzen, gibt es nicht sämtlich verschwindende $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, durch die alle vor den $\vec{u}_i$ stehenden Koeffizienten-Summenausdrücke zugleich annulliert werden, was eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors durch die $\vec{v}_i$ und damit deren lineare Abhängigkeit bedeutet. ■

Das U-Lemma ist zentral für alles Weitere.

b) Dimension und Basis

Kann man den linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in V$ keinen weiteren hinzufügen, ohne die Unabhängigkeit zu zerstören, lässt sich offenbar jeder Vektor aus V als LK von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugen. Man nennt dann den Vektorraum V endlich erzeugt, und da laut U-Lemma die Anzahl n dieser den Raum erzeugenden linear unabhängigen Vektoren *eindeutig bestimmt* ist, nennt man n die Dimension des Raumes. Irgendein den Vektorraum erzeugendes linear unabhängiges System von Vektoren wird Basis des Raumes genannt.

Klar gemäß U-Lemma: *Jedes* System von n linear unabhängigen Vektoren ist eine Basis; jedes kleinere linear unabhängige System lässt sich durch Hinzufügen weiterer Vektoren zu einer Basis ergänzen. Es gilt sogar:

Sind $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ und $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ zwei Basen von V, kann man $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ stets durch Auswahl geeigneter $n-k$ der $\vec{v}_i$ zu einer Basis von V ergänzen.

Begründung für dieses „Austausch-Lemma“:

Ist $k < n$, können gemäß U-Lemma nicht alle $\vec{v}_i$ LK von $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k$ sein, so dass mindestens ein $\vec{v}_i$ von ihnen unabhängig ist und hinzugefügt werden kann. Dies lässt sich fortsetzen, bis n linear unabhängige Vektoren zusammengestellt sind.

Zusammengefasst:

Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum, gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl n, die Dimension des Raumes, so dass jedes maximale linear unabhängige System in V genau n Vektoren umfasst. Solche Systeme, die Basen von V, gestatten die Darstellung jedes Vektors aus V als eindeutig bestimmte Linearkombination der jeweiligen Basisvektoren. Systeme aus weniger als n Vektoren erlauben nicht die Darstellung jedes Elements des Raumes als Linearkombination, und ermöglicht ein System aus n Vektoren die Darstellung jedes Elements als Linearkombination, ist dieses System linear unabhängig. Basen sind *maximale* linear unabhängige und *minimale* den Raum erzeugende Systeme.