Algebraische Dimension bei *nicht* endlich erzeugten Vektorräumen

EMEW, TH Nürnberg, 3. Mai 2026

Vorab sei festgestellt, dass im *unendlich*dimensionalen Fall *Reihenentwicklungen* mittels sogenannter *Schauder-Basen* eine wichtige Rolle spielen. Dabei geht es dann auch um Fragen von *Konvergenz* und *Vollständigkeit,* also zusätzlich zur algebraischen um eine damit verbundene *topologische* Struktur.

Hier betrachten wir aber nur *endliche algebraische Linearkombinationen* von Vektoren. Und in diesem Zusammenhang macht die Definition der *linearen Unabhängigkeit* von Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ für *nicht* endlich erzeugte Räume genauso Sinn wie für endlich erzeugte. Wir müssen nur zusätzlich vereinbaren: Eine beliebige Menge $M \subseteq V$ heiße *linear unabhängig*, wenn *jede endliche Teilmenge* von M linear unabhängig ist.

Ein Vektorraum V über $\mathbb{K}$ ist *nicht endlich erzeugt*, wenn es zu linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ aus V stets einen weiteren Vektor v_{n+1} gibt, so dass auch $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linear unabhängig sind. Durch „rekursive Auswahl" erhält man eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine *unendliche* linear unabhängige Menge in V ist.

Wir betrachten nun die Gesamtheit $\mathcal{M}$ *aller* linear unabhängigen Teilmengen von V. Die Mengeninklusion $\subseteq$ ist bekanntlich eine *partielle Ordnung* auf $\mathcal{M}$. Als $\subseteq$-*Kette* in $\mathcal{M}$ bezeichnen wir eine Teilmenge von $\mathcal{M}$, bei der je zwei Mengen A, B stets entweder $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ erfüllen. Zu jeder Kette gibt es eine *obere Schranke* in $\mathcal{M}$, nämlich einfach die Vereinigung aller Glieder der Kette.

Dass die Vereinigung der Kettenglieder zu $\mathcal{M}$ gehört, ist leicht einzusehen: Zu endlich vielen $v_1, \ldots, v_n$ aus dieser Vereinigungsmenge kann man (höchstens) n verschiedene Kettenglieder wählen, denen sie angehören, und wegen Vergleichbarkeit dieser Kettenglieder gehören die v_i alle *einem* Kettenglied an, sind also voneinander unabhängig.

Nach dem *Zornschen Lemma*[1] existiert daher in $\mathcal{M}$ ein $\subseteq$-*maximales* Element M. Es gibt also *kein* $v \in V$, so dass $M \cup \{v\}$ linear unabhängig ist. M.a.W.: Jedes $v \in V$ ist endliche Linearkombination von Elementen aus M; M ist eine algebraische *Basis* von V.

Nun seien M_1 und M_2 *zwei* Basen einunddesselben nicht endlich erzeugten Vektorraumes V. Wir zeigen, dass diese Basen *gleichmächtig* sind.

Jedem $u \in M_1$ entsprechen endlich viele Elemente $v_1, \ldots, v_n \in M_2$, deren Linearkombination, mit Koeffizienten $\neq 0$, u ist. Die v_i sind durch u eindeutig bestimmt, da M_2 ja linear unabhängig ist. Nennen wir u_1 und u_2 aus M_1 *äquivalent*, wenn ihnen genau dieselben Elemente aus M_2 zugeordnet sind, ergeben die Äquivalenzklassen eine Zerlegung von M_1 in lauter *endliche* Mengen. Denn dieselben $v_1, \ldots, v_n$ sind, wegen der linearen Unabhängigkeit von M_1, höchstens n verschiedenen $u \in M_1$ zugeordnet, da alle Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ ja in einem n-dimensionalen Unterraum von V liegen.

Wir haben also eine *injektive* Abbildung der Menge $\mathcal{Z}$ der Zerlegungsklassen von M_1 in die Menge $\mathcal{E}$ der endlichen Teilmengen von M_2. Also folgt $\operatorname{card}(\mathcal{Z}) \leq \operatorname{card}(\mathcal{E})$.

Nun nutzen wir noch zwei rein mengentheoretische Tatsachen:

a) Bei Zerlegung einer *unendlichen* Menge in *endliche* Klassen ist die Menge aller Klassen gleichmächtig zur ursprünglichen Menge. Also hier $\operatorname{card}(\mathcal{Z}) = \operatorname{card}(M_1)$.
b) Die Menge aller *endlichen* Teilmengen einer *unendlichen* Menge ist gleichmächtig zur ursprünglichen Menge. Also hier $\operatorname{card}(\mathcal{E}) = \operatorname{card}(M_2)$.

(Für einen Beweis von a) und b), den wir hier übergehen, braucht man das Auswahlaxiom.)

Daher $\operatorname{card}(M_1) \leq \operatorname{card}(M_2)$ und, mit vertauschten Rollen, auch $\operatorname{card}(M_2) \leq \operatorname{card}(M_1)$.
Mit dem Satz von Schröder/Bernstein (Halmos, Abschnitt 22) folgt $\operatorname{card}(M_1) = \operatorname{card}(M_2)$.
Die gemeinsame Kardinalzahl aller Basen ist die *algebraische Dimension* des Raumes. ■

---

1 Äquivalent zum *Auswahlaxiom*. Siehe etwa **Paul R. Halmos,** *Naive Set Theory*, Dover 2023, Abschnitt 16 (Nachdruck; urspr. Van Nostrand 1960). Es wird aber in praktisch *jeder* Darstellung der Mengenlehre erörtert. Das Lemma (Max Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, 1935) ist sehr ähnlich zu *Hausdorffs Maximalketten-Prinzip;* siehe **Felix Hausdorff**, *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, Seite 140.

Nachtrag

Ist man mit der Mengenlehre vertraut, sind die beiden mengentheoretischen Tatsachen a) und b) relativ leicht zu beweisen. Aber es ist wohl nicht einfach, in der Literatur irgendwo Beweise genau *dieser* Aussagen zu finden; weshalb ich sie hier nachtrage.

a) Eine *unendliche* Menge M werde in *endliche* Klassen zerlegt; die Menge der Klassen sei mit $\mathcal{Z}$ bezeichnet. Dann gilt $\operatorname{card}(\mathcal{Z}) = \operatorname{card}(M)$.

Beweis:

Die Existenz einer Injektion von $\mathcal{Z}$ nach M ergibt sich in trivialer Weise, indem wir gemäß Auswahlaxiom aus jeder Zerlegungsklasse eines ihrer Elemente auswählen. Nach Schröder/Bernstein folgt also die Behauptung, wenn wir die Existenz einer Injektion von M nach $\mathcal{Z}$ zeigen.

Zu jeder Klasse $K \in \mathcal{Z}$ wählen wir eine injektive Funktion $\varphi_K : K \to \mathbb{N}$, welche die Elemente von K durchnumeriert (Auswahlaxiom!). Eine Funktion $\varphi : M \to \mathcal{Z} \times \mathbb{N}$ sei nun definiert durch

$$\varphi(x) := (K, \varphi_K(x)) \quad (K \in \mathcal{Z},\, x \in K).$$

Offensichtlich ist φ injektiv.

Die *Hessenbergsche Formel* für *unendliche* Mengen A besagt, dass stets

$$\operatorname{card}(A \times A) = \operatorname{card}(A)$$

(siehe die Kardinalzahlen-Formel $a \cdot a = a$ bei Halmos, Seite 97).

Da $\mathcal{Z}$ unendlich ist (endlich viele endliche Klassen ergäben ja eine endliche Vereinigungsmenge M), also $\operatorname{card}(\mathcal{Z}) \geq \operatorname{card}(\mathbb{N})$ und damit nach Hessenberg $\operatorname{card}(\mathcal{Z} \times \mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathcal{Z})$, ergibt sich mit φ auch die Existenz einer Injektion von M nach $\mathcal{Z}$. ■

b) Sei $\mathcal{E}$ die Gesamtheit aller *endlichen* Teilmengen einer *unendlichen* Menge M, also insbesondere $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(M)$. Dann gilt $\operatorname{card}(\mathcal{E}) = \operatorname{card}(M)$. (Halmos, S. 93: $\operatorname{card}(M) < \operatorname{card}\big(\mathcal{P}(M)\big)$.)

Beweis:

Da $\operatorname{card}(M) \leq \operatorname{card}(\mathcal{E})$ evident ist, müssen wir wieder nur eine Injektion von $\mathcal{E}$ nach M definieren, um mit Schröder/Bernstein die Behauptung zu erschließen.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei M^n definiert als die Menge aller Abbildungen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach M (entspricht dem n-fachen kartesischen Produkt von M mit sich selbst). Nach Hessenberg ist jedes M^n gleichmächtig zu M. Mit dem Auswahlaxiom folgt

$$\operatorname{card}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n\Big) = \operatorname{card}(M \times \mathbb{N}) = \operatorname{card}(M).$$

Zu jedem $N \in \mathcal{E}$ gibt es mindestens ein $\varphi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$ mit Wertebereich N. Mit dem Auswahlaxiom erhalten wir also eine Injektion von $\mathcal{E}$ nach $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M^n$. Also gibt es auch eine Injekton von $\mathcal{E}$ nach M. ■

Einen interessanten ganz *anderen* Beweis der Eindeutigkeit der Dimension bei beliebigen Vektorräumen findet man bei **Edwin Hewitt, Karl Stromberg**, *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin 1965; siehe Seite 30f. Der dortige Beweis gilt einheitlich für *alle* Dimensionen. Aber für den *endlich*dimensionalen Fall ist m.E. ein *elementarerer* Beweis vorzuziehen.

Halmos' Klassiker *Naive Set Theory* ist eine meisterhafte *kurze* Einführung in die Mengenlehre, beschränkt sich aber ganz bewusst auf die allerwichtigsten Dinge. Als insgesamt *umfassend* über die Mengenlehre, auch über die Konsistenz und Unabhängigkeit von Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese (Kurt Gödel, Paul J. Cohen) informierende Werke seien empfohlen:

Azriel Levy, *Basic Set Theory*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1979

Raymond M. Smullyan, Melvin Fitting, *Set Theory and the Continuum Problem*, Revised Edition, Dover, New York 2010