KAPITEL 2

Elementare Abschätzungen für $\pi(x)$

Gauß und Legendre vermuteten, dass $\pi(x)$ wie $\frac{x}{\log x}$ wächst, aber erst P. L. Tchebychev[1] bewies um 1850 Resultate, die in diese Richtung weisen. Den Methoden Tchebychevs folgend werden wir unter anderem zeigen, dass

$$0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}$$

gilt.

1. Die Funktionen $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

Die Primzahlzählfunktion $\pi(x) = \#\{p \text{ prim} : p \leq x\}$ können wir auch in der Form

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1$$

schreiben, wobei die Summe alle Primzahlen $p \leq x$ durchläuft.
Wir definieren für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \sum_{p\leq x} \log p, \\ \psi(x) &= \sum_{p^k\leq x} \log p = \sum_{\substack{p,k\geq 1 \\ p^k\leq x}} \log p. \end{aligned}$$

(Bei $\psi(x)$ kommt für jede Primzahlpotenz $p^k \leq x$ ein Summand $\log p$ hinzu.)

Beispiel: ≤ 10 gibt es die Primzahlen $2, 3, 5, 7$ und die Primzahlpotenzen $2, 3, 2^2, 5, 7, 2^3, 3^2$, also gilt

$$\vartheta(10) = \log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 7 \quad \text{und} \quad \psi(10) = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7.$$

Satz. (1) *Für $x < 2$ ist $\vartheta(x) = \psi(x) = 0$, für $x \geq 2$ ist $0 < \vartheta(x) \leq \psi(x)$.*

(2) *Für ψ haben wir die beiden Darstellungen*

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{k\geq 1} \vartheta(x^{1/k}) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor} \vartheta(x^{1/k}) \quad \textit{für } x > 0 \textit{ und} \\ \psi(x) &= \sum_{p} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p = \sum_{p\leq x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p \quad \textit{für } x \geq 1. \end{aligned}$$

(3) *Es gilt*

$$e^{\vartheta(x)} = \prod_{p\leq x} p \quad \textit{und} \quad e^{\psi(x)} = \mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, \lfloor x \rfloor).$$

Beweis:

(1) Es erste Aussage ist klar.

(2) Die Doppelsumme in der Definition von $\psi(x)$ kann man verschieden ausführen:

Datei: anazt2.tex. Version vom 15.11.2020

[1] Für den Namen Tchebychev finden sich unterschiedliche Schreibweisen, z.B. Čebyšev [**Narkiewicz 2000**], Chebyshev [**Crandall/Pomerance 2005**], Tchebychef [**Hardy/Wright 1979**], Tchebycheff [**Ellison/Ellison 1985**], Tchebychev [**Brüdern 1995**], Tschebyschef, Tschebyscheff [**Ribenboim 2006**], Tschebyschew, Tschebyschow.

(a) Wir bemerken zunächst, dass für $x > 0$ die Äquivalenz gilt:

$$x^{1/k} < 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{k}\log x < \log 2 \quad \Longleftrightarrow \quad k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Daher gilt

$$\vartheta(x^{1/k}) = 0 \quad \text{für} \quad k > \frac{\log x}{\log 2}.$$

Nun betrachten wir $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p = \sum_{k\ge 1} \sum_{p^k \le x} \log p = \sum_{k\ge 1} \sum_{p \le x^{1/k}} \log p = \sum_{k\ge 1} \vartheta(x^{1/k}).$$

Nach der Vorbemerkung ist $\vartheta(x^{1/k}) = 0$ für $k > \frac{\log x}{\log 2}$. Daher erhalten wir weiter:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{\log x}{\log 2} \rfloor} \vartheta(x^{1/k}).$$

(b) Die Verwendung der anderen Summationsreihenfolge führt auf folgende Gleichung:

$$\psi(x) = \sum_{p^k \le x} \log p = \sum_{p} \sum_{\substack{k\ge 1 \\ p^k \le x}} \log p = \sum_{p} \sum_{1 \le k \le \frac{\log x}{\log p}} \log p = \sum_{p} \log p \sum_{1 \le k \le \frac{\log x}{\log p}} 1,$$

wobei wir

$$p^k \le x \quad \Longleftrightarrow \quad k \log p \le \log x \quad \Longleftrightarrow \quad k \le \frac{\log x}{\log p}$$

benutzt haben. Nun sieht man sofort, dass für $x \ge 1$

$$\sum_{1 \le k \le \frac{\log x}{\log p}} 1 = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor$$

unabhängig davon gilt, ob $p \le x$ oder $p > x$ ist. (Für $0 < x < 1$ stimmt dies nicht mehr, da die linke Seite 0 ist, die rechte Seite aber nicht notwendig.) Damit folgt

$$\psi(x) = \sum_{p} \lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor \log p = \sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p,$$

wie behauptet.

(3) Die Gleichung

$$e^{\vartheta(x)} = e^{\sum_{p\le x} \log p} = \prod_{p \le x} p$$

ist klar. Die zweite Gleichung ist natürlich richtig für $x < 2$, sodass wir uns auf den Fall $x \ge 2$ beschränken können. Da die Primfaktorzerlegung einer natürlichen Zahl zwischen 1 und x nur Primfaktoren $\le x$ hat, gilt

$$\mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, \lfloor x \rfloor) = \prod_{p \le x} p^{\max(v_p(1), v_p(2), \ldots, v_p(\lfloor x \rfloor))}.$$

Nun können wir charakterisieren:

$$p^a \le x \quad \Longleftrightarrow \quad a \log p \le \log x \quad \Longleftrightarrow \quad a \le \frac{\log x}{\log p} \quad \Longleftrightarrow \quad a \le \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor.$$

Die größte p-Potenz $\le x$ ist also $p^{\lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor}$, was sofort

$$\max(v_p(1), v_p(2), \ldots, v_p(\lfloor x \rfloor)) = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor$$

liefert. Also erhalten wir

$$\log \mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, \lfloor x \rfloor) = \log \prod_{p \le x} p^{\lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor} = \sum_{p \le x} \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \log p = \psi(x),$$

was zu zeigen war. ■

In den nächsten Schritt vergleichen wir die drei Funktionen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$.

SATZ. *Für $x \geq 1$ gilt*

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \pi(x) \log x.$$

Beweis: Trivial ist die (bereits erwähnte) Ungleichung $\vartheta(x) \leq \psi(x)$. Aus der vorangegangenen Darstellung für $\psi(x)$ erhält man

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \lfloor \frac{\log x}{\log p} \rfloor \log p \leq \sum_{p \leq x} \frac{\log x}{\log p} \log p = \sum_{p \leq x} \log x = \pi(x) \log x,$$

wie behauptet. ■

LEMMA. *Für $0 < \alpha < 1$ und $x \geq 1$ gilt:*

$$\alpha \frac{\pi(x) \log x}{x} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \leq \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x}.$$

Beweis: Sei $0 < \alpha < 1$ und $x \geq 1$. Es gilt wegen $x^\alpha \leq x$ mit $\pi(x) \leq x$

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &= \sum_{p \leq x} \log p \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log p \geq \sum_{x^\alpha < p \leq x} \log x^\alpha = \alpha \log x \sum_{x^\alpha < p \leq x} 1 = \\ &= \alpha \log x \cdot (\pi(x) - \pi(x^\alpha)) \geq \alpha \log x \cdot (\pi(x) - x^\alpha) = \alpha \pi(x) \log x - \alpha x^\alpha \log x. \end{aligned}$$

Division durch x liefert

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \geq \alpha \frac{\pi(x) \log x}{x} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}}.$$

Aus dem letzten Satz folgt

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x},$$

was dann zusammen mit der vorangegangenen Ungleichung die Behauptung liefert. ■

Die gerade gezeigten Ungleichungen führen sofort zu einem Vergleich des asymptotischen Verhaltens von $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$.

LEMMA. *Es gilt*

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}$$

und

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Beweis: Das vorangegangene Lemma besagt für $0 < \alpha < 1$ und $x \geq 1$

$$\alpha \frac{\pi(x) \log x}{x} - \alpha \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} \leq \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\psi(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x}.$$

Nun ist

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x^{1-\alpha}} = 0.$$

Wir bilden jetzt den Limes superior und erhalten

$$\alpha \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x}.$$

Da die Ungleichungskette für jedes α mit $0 < \alpha < 1$ gilt, gilt sie auch für $\alpha = 1$, sodass wir Gleichheitszeichen erhalten:

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \limsup_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x}.$$

Auf gleiche Weise zeigt man auch

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x},$$

womit die Behauptung bewiesen wäre. ■

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt bekanntlich:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ existiert} \quad \Longleftrightarrow \quad -\infty < \liminf_{x\to\infty} f(x) = \limsup_{x\to\infty} f(x) < \infty.$$

Nun wissen wir zwar noch nicht, ob die Grenzwerte von $\frac{\pi(x)\log x}{x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\frac{\psi(x)}{x}$ für $x \to \infty$ existieren. Aber mit dem letzten Lemma erhalten wir sofort folgenden Satz:

SATZ. (1) *Existiert für $x \to \infty$ der Grenzwert einer der Funktionen $\frac{\pi(x)\log x}{x}$, $\frac{\vartheta(x)}{x}$ oder $\frac{\psi(x)}{x}$, so existieren alle Grenzwerte, und die Grenzwerte sind gleich.*

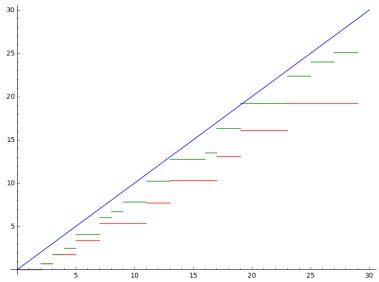
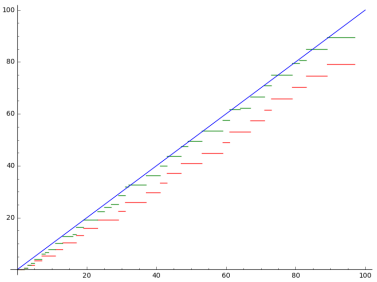
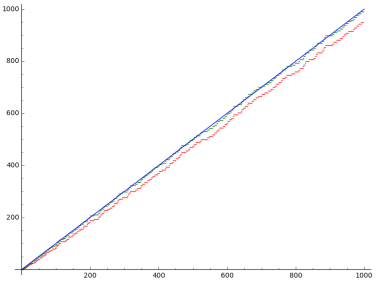
(2) *Äquivalent sind die Aussagen:*

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad \Longleftrightarrow \quad \vartheta(x) \sim x \quad \Longleftrightarrow \quad \psi(x) \sim x.$$

Die folgende Tabelle soll einen gewissen Eindruck vom numerischen Verhalten von $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ geben.

x	$\vartheta(x)$	$\frac{\vartheta(x)}{x}$	$\vartheta(x)-x$	$\psi(x)$	$\frac{\psi(x)}{x}$	$\psi(x)-x$
10	5.35	0.5347	-4.65	7.83	0.7832	-2.17
20	16.09	0.8044	-3.91	19.27	0.9633	-0.73
30	22.59	0.7530	-7.41	28.48	0.9492	-1.52
40	29.64	0.7409	-10.36	36.21	0.9054	-3.79
50	40.96	0.8192	-9.04	49.49	0.9897	-0.51
60	49.01	0.8168	-10.99	57.53	0.9589	-2.47
70	57.32	0.8189	-12.68	66.54	0.9506	-3.46
80	70.25	0.8781	-9.75	79.46	0.9933	-0.54
90	79.15	0.8795	-10.85	89.47	0.9941	-0.53
100	83.73	0.8373	-16.27	94.05	0.9405	-5.95
200	188.56	0.9428	-11.44	206.15	1.0307	6.15
300	277.02	0.9234	-22.97	299.23	0.9974	-0.77
400	370.73	0.9268	-29.27	397.83	0.9946	-2.17
500	474.55	0.9491	-25.45	501.65	1.0033	1.65
600	562.98	0.9383	-37.02	593.91	0.9898	-6.09
700	666.47	0.9521	-33.53	699.00	0.9986	-1.00
800	759.09	0.9489	-40.91	792.73	0.9909	-7.27
900	860.23	0.9558	-39.77	897.23	0.9969	-2.77
1000	956.25	0.9562	-43.75	996.68	0.9967	-3.32
2000	1939.84	0.9699	-60.16	1994.45	0.9972	-5.55
3000	2932.36	0.9775	-67.64	3001.09	1.0004	1.09
4000	3911.15	0.9778	-88.85	3989.68	0.9974	-10.32
5000	4911.70	0.9823	-88.30	4997.96	0.9996	-2.04
6000	5893.30	0.9822	-106.70	5988.11	0.9980	-11.88
7000	6920.42	0.9886	-79.58	7028.07	1.0040	28.07
8000	7875.15	0.9844	-124.85	7987.29	0.9984	-12.71
9000	8870.37	0.9856	-129.62	8983.21	0.9981	-16.79
10000	9895.99	0.9896	-104.01	10013.40	1.0013	13.40

Hier sind graphische Darstellungen von x (blau), $\vartheta(x)$ (rot) und $\psi(x)$ (grün) in den Intervallen $[0, 30]$, $[0, 100]$ und $[0, 1000]$:

Insbesondere $\psi(x)$ scheint durch x verhältnismäßig gut approximiert zu werden, was wir aber hier nicht weiter verfolgen können. (Tabelle und Skizzen legen die Frage nahe, ob $\vartheta(x) < x$ für alle $x > 0$ gilt. Dies ist aber nicht der Fall, wie im Anhang kurz ausgeführt wird.)

Der folgende Satz gibt einen anderen wichtigen Zusammenhang zwischen $\pi(x)$ und $\vartheta(x)$:

SATZ. *Für $x \geq 2$ gilt*

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt \quad \text{und} \quad \vartheta(x) = \pi(x) \log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt.$$

Beweis[2]*:*

(1) Wir bemerken zunächst, dass

$$\left(\frac{1}{\log t}\right)' = -\frac{1}{t(\log t)^2}$$

gilt. Sei $2 \leq a < b$ und $\vartheta(t)$ konstant im Innern des Intervalls $[a, b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt = \int_a^b \frac{\vartheta(a)}{t(\log t)^2} dt = \vartheta(a) \cdot \left[-\frac{1}{\log t}\right]_a^b = \vartheta(a) \left(\frac{1}{\log a} - \frac{1}{\log b}\right).$$

Sei nun $x \geq 2$ und $l = \pi(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt &= \sum_{n=1}^{l-1} \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt + \int_{p_l}^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt = \\
&= \sum_{n=1}^{l-1} \vartheta(p_n) \left(\frac{1}{\log p_n} - \frac{1}{\log p_{n+1}}\right) + \vartheta(p_l) \left(\frac{1}{\log p_l} - \frac{1}{\log x}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{l-1} \frac{\vartheta(p_n)}{\log p_n} - \sum_{n=1}^{l-1} \frac{\vartheta(p_n)}{\log p_{n+1}} + \frac{\vartheta(p_l)}{\log p_l} - \frac{\vartheta(x)}{\log x} = \\
&= \sum_{n=1}^{l} \frac{\vartheta(p_n)}{\log p_n} - \sum_{n=2}^{l} \frac{\vartheta(p_{n-1})}{\log p_n} - \frac{\vartheta(x)}{\log x} = \\
&= \frac{\vartheta(p_1)}{\log p_1} + \sum_{n=2}^{l} \frac{\vartheta(p_n) - \vartheta(p_{n-1})}{\log p_n} - \frac{\vartheta(x)}{\log x} = \\
&= \frac{\log 2}{\log 2} + \sum_{n=2}^{l} \frac{\log p_n}{\log p_n} - \frac{\vartheta(x)}{\log x} = l - \frac{\vartheta(x)}{\log x} = \pi(x) - \frac{\vartheta(x)}{\log x},
\end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte.

[2]Die Aussagen ergeben sich auch aus der Formel für die *partielle Summation*, die in Kapitel 3 behandelt wird.

(2) Sei $x \geq 2$ und $l = \pi(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt &= \sum_{n=1}^{l-1}\int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{\pi(t)}{t}dt + \int_{p_l}^{x}\frac{\pi(t)}{t}dt = \sum_{n=1}^{l-1}\int_{p_n}^{p_{n+1}}\frac{ndt}{t} + \int_{p_l}^{x}\frac{ldt}{t} = \\
&= \sum_{n=1}^{l-1} n(\log p_{n+1} - \log p_n) + l(\log x - \log p_l) = \\
&= \sum_{n=1}^{l-1} n\log p_{n+1} - \sum_{n=1}^{l-1} n\log p_n - l\log p_l + \pi(x)\log x = \\
&= \sum_{n=2}^{l}(n-1)\log p_n - \sum_{n=1}^{l} n\log p_n + \pi(x)\log x = \\
&= \sum_{n=1}^{l}(n-1)\log p_n - \sum_{n=1}^{l} n\log p_n + \pi(x)\log x = \\
&= -\sum_{n=1}^{l}\log p_n + \pi(x)\log x = -\vartheta(x) + \pi(x)\log x,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

Bemerkung: Ist man mit dem Riemann-Stieltjes-Integral vertraut, so sieht man leicht, dass man

$$\vartheta(x) = \int_{2-0}^{x} \log t \cdot d\pi(t) \quad \text{und} \quad \pi(x) = \int_{2-0}^{x}\frac{d\vartheta(t)}{\log t}$$

schreiben kann. Die Aussagen des letzten Satzes ergeben sich dann mit den Formeln für die partielle Integration.

2. Die Zahl $M = \binom{2m+1}{m}$

LEMMA. *Für $m \geq 1$ sei*

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}.$$

Dann gilt

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \mid M \quad \textit{und} \quad M < 4^m.$$

Beweis: Es ist

$$M = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!} = \frac{(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+3)(m+2)}{m!}.$$

Jede Primzahl p mit $m+1 < p \leq 2m+1$ teilt $(2m+1)(2m)(2m-1)\ldots(m+3)(m+2)$, aber nicht $m! = m\cdot(m-1)\cdot\ldots 2\cdot 1$, also teilt p die Zahl M, was sofort

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p \mid M$$

liefert. Wir schätzen jetzt M ab:

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{i=0}^{2m+1}\binom{2m+1}{i} = 1 + \cdots + \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} + \cdots + 1 > 2M,$$

also $M < 2^{2m}$, was zu zeigen war. ■

Beispiele: Die folgende Tabelle illustriert das vorangegangene Lemma. Es ist $\log 4 \approx 1.3863$.

m	$M = \binom{2m+1}{m}$	$\frac{\log M}{m}$
1	$3 = 3$	1.0986
2	$10 = 2 \cdot 5$	1.1513
3	$35 = 5 \cdot 7$	1.1851
4	$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$	1.2091
5	$462 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	1.2271
6	$1716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	1.2413
7	$6435 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	1.2528
8	$24310 = 2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	1.2623
9	$92378 = 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	1.2704
10	$352716 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	1.2773
11	$1352078 = 2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2834
12	$5200300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2887
13	$20058300 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2934
14	$77558760 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	1.2976
15	$300540195 = 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.3014
16	$1166803110 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.3048
17	$4537567650 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.3080
18	$17672631900 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$	1.3108
19	$68923264410 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$	1.3135
20	$269128937220 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41$	1.3159

LEMMA. *Es gilt für $m \geq 1$*

$$\vartheta(2m+1) - \vartheta(m+1) < m \log 4.$$

Beweis: Es gilt mit den Aussagen des letzten Lemmas

$$\vartheta(2m+1) - \vartheta(m+1) = \sum_{m+1<p\leq 2m+1} \log p = \log \prod_{m+1<p\leq 2m+1} p < \log M \leq m \log 4,$$

was die Behauptung beweist. ■

SATZ. *Für alle $x > 0$ gilt*

$$\vartheta(x) < \log 4 \cdot x \leq 1.3863\, x.$$

In multiplikativer Schreibweise lautet dies

$$\prod_{p\leq x} p < 4^x.$$

Beweis:

(1) Wir beweisen zunächst $\vartheta(n) < n \log 4$ für alle natürlichen Zahlen durch Induktion, wobei $n = 1$ und $n = 2$ trivial sind. Sei jetzt $n \geq 3$ und die Behauptung bereits für alle kleineren natürlichen Zahlen bewiesen. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall n gerade: Dann gilt $\vartheta(n) = \vartheta(n-1) < (n-1)\log 4 < n \log 4$ mit der Induktionsannahme.
Fall n ungerade: Wir schreiben $n = 2m+1$ mit $m \geq 1$ und haben wegen $m+1 < n$ durch Induktionsannahme $\vartheta(m+1) < (m+1)\log 4$ und nach dem zuvor Gezeigten $\vartheta(2m+1) - \vartheta(m+1) < m \log 4$, was durch Addition sofort

$$\vartheta(n) = \vartheta(2m+1) < (2m+1)\log 4 = n \log 4$$

zeigt. Damit ist die Aussage durch Induktion bewiesen.

(2) Ist x eine reelle Zahl ≥ 1, so folgt nun

$$\vartheta(x) = \vartheta(\lfloor x \rfloor) < \lfloor x \rfloor \log 4 \leq \log 4 \cdot x,$$

was zu zeigen war. Die Aussage ist trivial für $0 < x < 1$.

(3) Wegen
$$\prod_{p\le x} p = e^{\vartheta(x)} < e^{\log 4\cdot x} = 4^x$$
folgt auch die letzte Aussage. ■

3. Abschätzung von $\pi(x)$ nach oben

Das folgende Lemma kombiniert zwei zuvor gezeigte Aussagen:

LEMMA. *Für $x \ge 2$ gilt.*
$$\pi(x) \le \frac{x}{\log x}\cdot\left(\log 4 + \log 4\cdot\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}\right).$$

Beweis: Wir haben gezeigt:
$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt \text{ (für } x\ge 2) \text{ und } \vartheta(x) \le \log 4\cdot x \text{ (für } x\ge 0).$$
Daraus ergibt sich für $x \ge 2$
$$\begin{aligned}\pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2}dt \le \frac{\log 4\cdot x}{\log x} + \int_2^x \frac{\log 4\cdot t}{t(\log t)^2}dt = \frac{x}{\log x}\cdot\log 4 + \log 4\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = \\ &= \frac{x}{\log x}\cdot\left(\log 4 + \log 4\cdot\frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}\right),\end{aligned}$$
wie behauptet. ■

LEMMA. *Für die für $x \ge 2$ definierte Funktion*
$$f(x) = \frac{\log x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}$$
definierte Funktion gilt:

(1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
(2) *Für $x \ge 9$ ist $f(x)$ streng monoton fallend.*
(3) $\log 4\cdot(1+f(x)) \le 2$ *für* $x \ge 125$.
(4) $\log 4\cdot(1+f(x)) \le 1.5$ *für* $x \ge 2000000$.
(5) $\log 4\cdot(1+f(x)) \le 1.4$ *für* $x \ge 10^{50}$.

Beweis:

(1) Mit der Regel von l'Hospital findet man
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}}{\frac{x}{\log x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(\log x)^2}}{\frac{1}{\log x} - \frac{1}{(\log x)^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x - 1} = 0.$$

(2) Wir bilden die Ableitung von $f(x)$:
$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\log x}{x}\right)\cdot\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + \frac{\log x}{x}\cdot\frac{d}{dx}\left(\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}\right) = \\ &= \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x\cdot 1}{x^2}\cdot\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + \frac{\log x}{x}\cdot\frac{1}{(\log x)^2} = \\ &= \frac{1-\log x}{x^2}\cdot\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + \frac{1}{x\log x}.\end{aligned}$$
Es gilt:
$$\begin{aligned}f'(x) < 0 &\iff \frac{1}{x\log x} < \frac{\log x - 1}{x^2}\cdot\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \iff \\ &\iff \frac{x}{\log x(\log x - 1)} < \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2}.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$g : (e, \infty) \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} - \frac{x}{\log x(\log x - 1)}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{(\log x)^2} - \frac{1 \cdot ((\log x)^2 - \log x) - x \cdot (2 \log x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x})}{(\log x)^2 (\log x - 1)^2} = \\ &= \frac{(\log x - 1)^2 - ((\log x)^2 - \log x) + (2 \log x - 1)}{(\log x)^2 (\log x - 1)^2} = \\ &= \frac{(\log x)^2 - 2 \log x + 1 - (\log x)^2 + \log x + 2 \log x - 1}{(\log x)^2 (\log x - 1)^2} = \\ &= \frac{\log x}{(\log x)^2 (\log x - 1)^2} = \frac{1}{\log x (\log x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $g'(x) > 0$ für alle $x > e$, also ist $g(x)$ streng monoton steigend. Es ist

$$g(8) \approx -0.3173, \quad g(9) \approx 0.0441,$$

sodass $g(x) > 0$ für $x \geq 9$ und damit

$$\frac{x}{\log x(\log x - 1)} < \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \text{ für } x \geq 9$$

gilt. Es folgt $f'(x) < 0$ für $x \geq 9$ und damit die Behauptung.

(3), (4) und (5) folgen mit (2) durch numerische Berechnungen, die wir mit Maple und Sage durchgeführt haben. ■

Satz.

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x} \leq \log 4 \leq 1.3863$$

Beweis: Dies folgt aus den beiden letzten Lemmatas mit $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. ■

Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq 2 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für} \quad x \geq 125, \\ \pi(x) &\leq 1.5 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für} \quad x \geq 2000000, \\ \pi(x) &\leq 1.4 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für} \quad x \geq 10^{50}. \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus den beiden vorangegangenen Lemmatas. ■

Wir werden später noch genauer anschauen, was für kleine x mit $\pi(x)$ passiert.

4. $v_p(n!)$ - Wie oft geht p in $n!$ auf?

Bevor wir weitere Abschätzungen herleiten, müssen wir noch eine wichtige Formel beweisen:

Lemma. *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Beweis: Sei $k \geq 1$. Die Zahlen $1 \cdot p^k$, $2 \cdot p^k$, $3 \cdot p^k$, ... sind durch p^k teilbar. Nun gilt

$$lp^k \leq n \quad \Longleftrightarrow \quad l \leq \frac{n}{p^k} \quad \Longleftrightarrow \quad l \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .$$

Also sind unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ genau $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ Zahlen, nämlich

$$1 \cdot p^k, \quad 2 \cdot p^k, \quad \ldots, \quad \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \cdot p^k$$

durch p^k teilbar. Daher sind genau $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$ unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$ genau durch p^k teilbar, d.h. durch p^k aber nicht durch p^{k+1}. Somit gilt

$$\begin{aligned}
v_p(n!) &= \sum_{1 \leq m \leq n} v_p(m) = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ v_p(m) = k}} v_p(m) = \sum_{k \geq 1} \sum_{\substack{1 \leq m \leq n \\ v_p(m) = k}} k = \\
&= \sum_{k \geq 1} k \cdot \#\{1 \leq m \leq n : v_p(m) = k\} = \sum_{k \geq 1} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) = \\
&= \sum_{k \geq 1} k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k \geq 1} k \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k \geq 1} k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k \geq 2} (k-1) \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \\
&= \sum_{k \geq 1} k \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k \geq 1} (k-1) \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor .
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt aus der Tatsache, dass gilt

$$k > \left\lfloor \frac{\log n}{\log p} \right\rfloor \quad \Longrightarrow \quad k > \frac{\log n}{\log p} \quad \Longrightarrow \quad \log p^k > \log n \quad \Longrightarrow \quad p^k > n \quad \Longrightarrow \quad \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Beispiel: Wieviele Nullen hat 1000! in der Dezimaldarstellung? Wir haben

$$\begin{aligned}
v_2(1000!) &= \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{1000}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{32} \right\rfloor + \\
&\quad + \left\lfloor \frac{1000}{64} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{128} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{256} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{512} \right\rfloor = 994, \\
v_5(1000!) &= \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{1000}{5^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{125} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{625} \right\rfloor = 249.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$10^{249} \mid 1000!, \quad \text{aber} \quad 10^{250} \nmid 1000!.$$

Also hat 1000! genau 249 Nullen am Schluss.

5. Die Zahl $N = \binom{2n}{n}$

LEMMA. *Für $n \geq 1$ sei*

$$N = \binom{2n}{n}.$$

Dann gilt

$$N \mid \mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, 2n) \quad \textit{und} \quad N \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Beweis:

(1) Um die Teilbarkeitsbeziehung zu zeigen, müssen wir

$$v_p(N) \leq v_p(\mathrm{kgV}(1,2,3,\ldots,2n))$$

für jede Primzahl p nachweisen. Nun ist

$$\mathrm{kgV}(1,2,3,\ldots,2n) = e^{\psi(2n)} = e^{\sum_p \left\lfloor \frac{\log(2n)}{\log p} \right\rfloor \log p} = \prod_p p^{\left\lfloor \frac{\log(2n)}{\log p} \right\rfloor},$$

also folgt

$$v_p(\mathrm{kgV}(1,2,3,\ldots,2n) = \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor.$$

Wir müssen uns nun nur noch um $v_p(N)$ kümmern.

(2) Mit der Formel für $v_p(n!)$ gilt

$$\begin{aligned} v_p(N) &= v_p(\binom{2n}{n}) = v_p(\frac{(2n)!}{(n!)^2}) = v_p((2n!) - 2v_p(n!) = \sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\sum_{k\geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \\ &= \sum_{k\geq 1} (\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor). \end{aligned}$$

Wir haben die Implikationen

$$k > \frac{\log 2n}{\log p} \Longrightarrow \log p^k > \log 2n \Longrightarrow p^k > 2n \Longrightarrow 0 < \frac{n}{p^k} < \frac{2n}{p^k} < 1 \Longrightarrow \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0,$$

also gilt

$$v_p(N) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

(3) Sei x eine reelle Zahl. Wir zerlegen $x = m + \varepsilon$ mit $m = \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ und $0 < \varepsilon < 1$.
Fall $0 \leq \varepsilon < \frac{1}{2}$*:* Dann ist $2x = 2m + 2\varepsilon$ mit $0 \leq 2\varepsilon < 1$, also $\lfloor 2x \rfloor = 2m = 2\lfloor x \rfloor$ und somit

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0.$$

Fall $\frac{1}{2} \leq \varepsilon < 1$*:* Dann ist $2\varepsilon = 1+\delta$ mit $0 \leq \delta < 1$, also $2x = 2m+1+\delta$, $\lfloor 2x \rfloor = 2m+1 = 2\lfloor x \rfloor + 1$ und somit

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 1.$$

Somit haben wir gezeigt, dass für jede reelle Zahl x

$$\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \in \{0,1\}$$

gilt.

(4) Die gerade gezeigte Aussage liefert

$$\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor 2 \cdot \frac{n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \in \{0,1\},$$

sodass wir weiter abschätzen können

$$v_p(N) = \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor} 1 \leq \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor = v_p(\mathrm{kgV}(1,2,3,\ldots,2n)),$$

was für die Teilbarkeitsrelation zu zeigen war.

(5) $N = \binom{2n}{n}$ ist der größte der Binomialkoeffizienten $\binom{2n}{i}$ für $0 \leq i \leq 2n$, also folgt

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} \leq \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n} = (2n+1)N,$$

was die Behauptung liefert. ■

Beispiele: Die folgende Tabelle zeigt die ersten Zahlen $N = \binom{2n}{n}$:

n	$N = \binom{2n}{n}$	$\frac{\log N}{n}$
1	$2 = 2$	0.6931
2	$6 = 2 \cdot 3$	0.8959
3	$20 = 2^2 \cdot 5$	0.9986
4	$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$	1.0621
5	$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	1.1059
6	$924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	1.1381
7	$3432 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	1.1630
8	$12870 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	1.1828
9	$48620 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$	1.1991
10	$184756 = 2^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	1.2127
11	$705432 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$	1.2242
12	$2704156 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2342
13	$10400600 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2429
14	$40116600 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$	1.2505
15	$155117520 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$	1.2573
16	$601080390 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.2634
17	$2333606220 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.2689
18	$9075135300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$	1.2738
19	$35345263800 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$	1.2783
20	$137846528820 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$	1.2825

LEMMA. *Für $n \geq 1$ gilt*

$$2n \log 2 - \log(2n+1) \leq \psi(2n).$$

Beweis: Mit den Aussagen $\frac{2^{2n}}{2n+1} \leq N$ und $N \mid \mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, 2n)$ des letzten Lemmas folgt aus $\mathrm{kgV}(1, 2, 3, \ldots, 2n) = e^{\psi(2n)}$ durch Logarithmieren sofort

$$2n \log 2 - \log(2n+1) \leq \log N \leq \psi(2n),$$

was zu zeigen war. ■

LEMMA. *Für $x \geq 0$ gilt*

$$\psi(x) \geq (x-2) \log 2 - \log(x+1).$$

Beweis: Für $0 \leq x < 2$ ist die Aussage trivial, weil die rechte Seite < 0 ist. Sei also $x \geq 2$. Wir setzen $n = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. Dann gilt $n \leq \frac{x}{2} < n+1$, also $2n \leq x < 2n+2$. Wir erhalten mit der letzten Abschätzung

$$\psi(x) \quad \geq \quad \psi(2n) \geq 2n \log 2 - \log(2n+1) \geq (x-2) \log 2 - \log(x+1),$$

was zu zeigen war. ■

SATZ. *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\geq \left(\log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x} \right) \cdot x \text{ für } x > 0, \\
\psi(x) &\geq \frac{1}{2} \cdot x \text{ für } x \geq 30, \\
\psi(x) &\geq 0.6 \cdot x \text{ für } x \geq 100, \\
\psi(x) &\geq 0.69 \cdot x \text{ für } x \geq 5000.
\end{aligned}$$

Beweis:

(1) Das letzte Lemma liefert für $x > 0$

$$\begin{aligned}\psi(x) &\geq (x-2)\log 2 - \log(x+1) = \log 2 \cdot x - \log 4 - \log(x+1) = \\ &= \log 2 \cdot x - \log(4x+4) = \left(\log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x}\right) \cdot x.\end{aligned}$$

(2) Wir betrachten jetzt die Funktion

$$f(x) = \log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x},$$

sodass also $\psi(x) \geq f(x) \cdot x$ gilt. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{\frac{1}{4x+4} \cdot 4 \cdot x - \log(4x+4)}{x^2} = \frac{\log(4x+4) - \frac{4x}{4x+4}}{x^2} > \frac{\log(4x+4) - \frac{4x+4}{4x+4}}{x^2} = \\ &= \frac{\log(4x+4) - 1}{x^2} = \frac{\log \frac{4x+4}{e}}{x^2} \geq \frac{\log \frac{4}{e}}{x^2} > 0,\end{aligned}$$

also ist $f(x)$ streng monoton steigend. Aus

$$f(30) = 0.5324711284, \quad f(100) = 0.6331330318, \quad f(5000) = 0.6911664431,$$

folgen dann die Behauptungen. ■

6. Abschätzungen von $\pi(x)$ nach unten

Satz. *Es gilt*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \log 2 \geq 0.6931.$$

Beweis: Aus den bereits gezeigten Ungleichungen

$$\psi(x) \leq \pi(x)\log x \quad \text{und} \quad \psi(x) \geq \left(\log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x}\right) \cdot x$$

folgt

$$\frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \frac{\psi(x)}{x} \geq \log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x}.$$

Wegen $\lim_{x\to\infty}(2\log 2 + \log(x+1))/x = 0$ folgt

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} \geq \log 2,$$

was gezeigt werden sollte. ■

Satz. *Es gilt*

$$\begin{aligned}\pi(x) &\geq \left(\log 2 - \frac{\log(4x+4)}{x}\right) \cdot \frac{x}{\log x}, \\ \pi(x) &\geq \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \geq 30, \\ \pi(x) &\geq 0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \geq 100, \\ \pi(x) &\geq 0.69 \cdot \frac{x}{\log x} \quad \textit{für } x \geq 5000.\end{aligned}$$

Beweis: Dies ergibt sich aus $\psi(x) \leq \pi(x)\log x$ und den Abschätzungen für $\psi(x)$. ■

7. Das Verhalten der Funktion $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ im Intervall $[p_n, p_{n+1})$

Wir wollen nun noch untersuchen, wie sich $\pi(x)$ für kleine x verhält.

LEMMA. (1) *Für $x < 2$ ist $\frac{\pi(x)\log x}{x} = 0$.*

(2) *Für $2 \le x < 3$ ist $\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{\log x}{x}$ mit Minimum $\frac{\log 2}{2} \ge 0.3466$ und Maximum $\frac{1}{e} \le 0.3679$.*

(3) *Für $n \ge 2$ ist $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ im Intervall $[p_n, p_{n+1})$ streng monoton fallend und*

$$\inf_{x\in[p_n,p_{n+1})} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{n\log p_{n+1}}{p_{n+1}}, \qquad \sup_{x\in[p_n,p_{n+1})} \frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{n\log p_n}{p_n}.$$

Beweis:

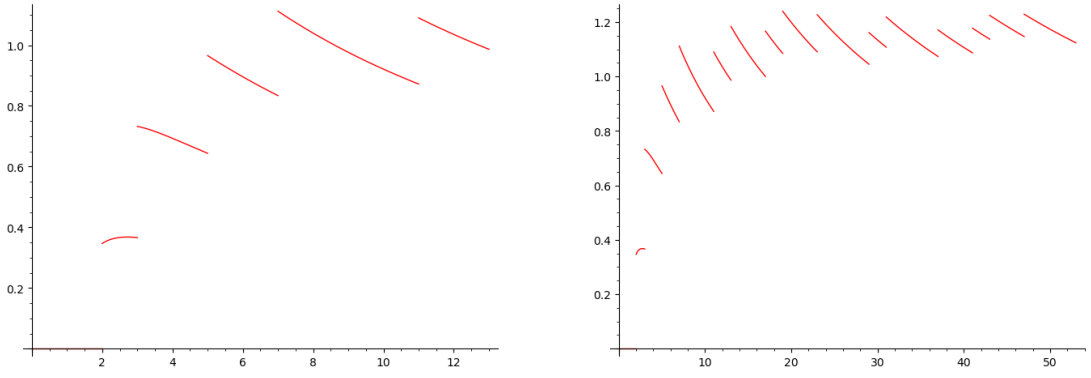
(1) Für $f(x) = \frac{\log x}{x}$ gilt

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2} = \frac{\log e - \log x}{x^2},$$

also ist $f(x)$ für $x \ge e = 2.7183$ streng monoton fallend. Die Aussagen (1) und (2) folgen mit $\frac{\log 3}{3} = 0.3662$ dann sofort.

(2) Sei jetzt $x \ge 3$ und $n \ge 2$ mit $p_n \le x < p_{n+1}$. Dann ist $\frac{\pi(x)\log x}{x} = \frac{n\log x}{x} = n\cdot f(x)$. Mit der strengen Monotonie von $f(x)$ folgt dann sofort die Behauptung. ■

In den folgenden Abbildungen ist die Funktion $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ skizziert:



Insbesondere gilt

$$0.3466\cdot\frac{x}{\log x} \overset{2\le x<3}{\le} \pi(x) \overset{1<x<3}{\le} 0.3679\cdot\frac{x}{\log x}$$

und für $x \ge 3$

$$n = \pi(x) \quad\Longrightarrow\quad \frac{n\log p_{n+1}}{p_{n+1}} \le \frac{\pi(x)\log x}{x} \le \frac{n\log p_n}{p_n}.$$

Um $\frac{\pi(x)\log x}{x}$ für kleine x abzuschätzen, haben wir mit Maple die folgenden beiden Tabellen erstellt:

n	p_n	p_{n+1}	$\frac{n\log p_{n+1}}{p_{n+1}}$	$\frac{n\log p_n}{p_n}$
2	3	5	0.643775	0.732408
3	5	7	0.833961	0.965663
4	7	11	0.871962	1.111949
5	11	13	0.986519	1.089952
6	13	17	0.999958	1.183823
7	17	19	1.084793	1.166617
8	19	23	1.090607	1.239764
9	23	29	1.045023	1.226933
10	29	31	1.107738	1.161136
11	31	37	1.073516	1.218512
12	37	41	1.086899	1.171109
13	41	43	1.137107	1.177474
14	43	47	1.146852	1.224577
15	47	53	1.123668	1.228771
16	53	59	1.105773	1.198579
17	59	61	1.145653	1.174884
18	61	67	1.129619	1.213045
19	67	71	1.140717	1.192376
20	71	73	1.175468	1.200755
21	73	79	1.161499	1.234242
22	79	83	1.171259	1.216808
23	83	89	1.159985	1.224498
24	89	97	1.131887	1.210419
25	97	101	1.142357	1.179049

Intervall	$\min \frac{n\log p_{n+1}}{p_{n+1}}$	$\max \frac{n\log p_n}{p_n}$
$2 \le n \le 25$	0.643775	1.239764
$3 \le n \le 25$	0.833961	1.239764
$10 \le n \le 100$	1.073516	1.255059
$100 \le n \le 1000$	1.127227	1.188720
$1000 \le n \le 10000$	1.102811	1.135271
$10000 \le n \le 100000$	1.083113	1.103889
$100000 \le n \le 200000$	1.078272	1.083256
$200000 \le n \le 300000$	1.075810	1.078477
$300000 \le n \le 400000$	1.073988	1.075895
$400000 \le n \le 500000$	1.072917	1.074079
$500000 \le n \le 600000$	1.071900	1.073000
$600000 \le n \le 700000$	1.070961	1.071951
$700000 \le n \le 800000$	1.070346	1.071050
$800000 \le n \le 900000$	1.069682	1.070395
$900000 \le n \le 1000000$	1.069052	1.069770
$1000000 \le n \le 1100000$	1.068712	1.069145

Nun gilt

$$p_{1100000} = 17144489 \quad \text{und} \quad p_{1100001} = 17144507.$$

Damit ergibt sich das folgende Ergebnis:

Satz. *Es gilt*

$$0.6437 \le \frac{\pi(x)\log x}{x} \le 1.2551 \quad \textit{für} \quad 3 \le x < 17144507.$$

Zusammen mit den früher gezeigten Abschätzungen für große x folgt dann:

SATZ. *Es gilt*

$$0.6 \cdot \frac{x}{\log x} \overset{x\geq 3}{\leq} \pi(x) \overset{x>1}{\leq} 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}.$$

(Natürlich hätten wir die Konstanten 0.6 und 1.5 etwas verbessern können, der einfacheren Darstellung halber haben wir aber darauf verzichtet.)

8. Abschätzungen für die n-te Primzahl p_n

Die eben hergeleiteten Ungleichungen für $\pi(x)$ wollen wir nun benutzen, um eine Abschätzung für die n-te Primzahl p_n herzuleiten.

SATZ. *Für die n-te Primzahl p_n gilt im Fall $n \geq 2$*

$$0.666\, n \log n \leq p_n \leq 2.165\, n \log n.$$

Beweis:

(1) Für $x > 1$ gilt $\pi(x) \leq 1.5\frac{x}{\log x}$. Setzen wir hier $x = p_n$ ein, so folgt $n = \pi(p_n) \leq 1.5\frac{p_n}{\log p_n}$ und damit $p_n \geq \frac{1}{1.5} n \log p_n = 0.666 n \log p_n$. Da natürlich $n \leq p_n$ gilt, ergibt sich

$$0.666\, n \log n \leq p_n,$$

wie behauptet.

(2) Die zweite Ungleichung ist mit etwas mehr Aufwand verbunden.

(a) Für $x \geq 3$ gilt $0.6\frac{x}{\log x} \leq \pi(x)$. Setzen wir hier $x = p_n$ (mit $n \geq 2$) ein, so ergibt sich $\frac{3}{5}\frac{p_n}{\log p_n} \leq \pi(p_n) = n$ und somit (für $n \geq 2$)

$$p_n \leq \frac{5}{3} n \log p_n.$$

(b) Etwas vorauseilend betrachten wir für $x > 1$ die Funktion

$$f(x) = \frac{\log\frac{5}{3} + \log\log x}{\log x} \quad \text{mit} \quad f'(x) = \frac{1 - \log\frac{5}{3} - \log\log x}{x(\log x)^2}$$

Es ist $f'(x) < 0$ für $x \geq e^e = 15.15\ldots$, d.h. die Funktion ist für $x \geq 16$ streng monoton fallend. Aus $f(800000) \leq 0.23$ folgt dann $f(x) \leq 0.23$ für $x \geq 800000$.

(c) Logarithmieren wir die Ungleichung aus (a)

$$\log p_n \leq \log\frac{5}{3} + \log\log p_n + \log n = \frac{\log\frac{5}{3} + \log\log p_n}{\log p_n} \log p_n + \log n = f(p_n)\log p_n + \log n,$$

so folgt aus (b) für $p_n \geq 800000$

$$\log p_n \leq 0.23 \log p_n + \log n,$$

also $0.77 \log p_n \leq \log n$ und damit

$$\log p_n \leq \frac{1}{0.77} \log n \quad \text{für} \quad p_n \geq 800000.$$

(d) Aus (a) und (c) ergibt sich

$$p_n \leq \frac{5}{3} n \cdot \frac{1}{0.77} \log n = 2.1645\ldots n \log n \leq 2.165\, n \log n \quad \text{für} \quad p_n \geq 800000.$$

(e) Durch einfaches Ausprobieren mit Maple findet man die folgenden Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
1.107 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 2.165 \text{ für } 2 \leq n \leq 9999,\\
1.133 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.139 \text{ für } 10000 \leq n \leq 19999,\\
1.132 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.136 \text{ für } 20000 \leq n \leq 29999,\\
1.131 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.134 \text{ für } 30000 \leq n \leq 39999,\\
1.130 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.133 \text{ für } 40000 \leq n \leq 49999,\\
1.130 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.132 \text{ für } 50000 \leq n \leq 59999,\\
1.130 &\leq \tfrac{p_n}{n\log n} \leq 1.132 \text{ für } 60000 \leq n \leq 64000.
\end{aligned}$$

Wegen $p_{64000} = 800573$ ergibt sich insbesondere

$$1.107 \leq \frac{p_n}{n\log n} \leq 2.165 \text{ für } 3 \leq p_n \leq 800000.$$

Zusammen mit (d) folgt dann

$$p_n \leq 2.165\, n\log n \text{ für alle } n \geq 2,$$

womit auch die zweite Ungleichung bewiesen wäre. ■

Hier sind nochmals die ersten Werte von $\frac{p_n}{n\log n}$:

n	p_n	$\frac{p_n}{n\log n}$	n	p_n	$\frac{p_n}{n\log n}$
2	3	2.164043	14	43	1.163835
3	5	1.517065	15	47	1.157044
4	7	1.262358	16	53	1.194732
5	11	1.366937	17	59	1.224965
6	13	1.209240	18	61	1.172475
7	17	1.248039	19	67	1.197619
8	19	1.142134	20	71	1.185019
9	23	1.163083	21	73	1.141785
10	29	1.259454	22	79	1.161715
11	31	1.175273	23	83	1.150918
12	37	1.240825	24	89	1.166857
13	41	1.229594	25	97	1.205390

Im Blick auf diese Werte sei daran erinnert, dass der Primzahlsatz $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$ zur Grenzwertaussage $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{n\log n} = 1$ führt.

9. Die Zahl $N = \binom{2n}{n}$ und das Bertrandsche Postulat

Bertrand hatte 1845 in einer gruppentheoretischen Arbeit Aussagen unter der (ungefähren) Voraussetzung bewiesen, dass zwischen n und $2n$ immer eine Primzahl liegt. Er konnte diese Annahme nicht beweisen, die jetzt unter dem Namen „Bertrandsches Postulat“ bekannt ist. Um diese Aussage zu beweisen, schauen wir uns die Zahl $N = \binom{2n}{n}$ etwas genauer an.

Beispiel:

$$\begin{aligned}
\binom{200}{100} = {} & 2^3\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0\cdot 11^1\cdot 13^2\cdot 17^1\cdot 19^0\cdot 23^0\cdot 29^0\cdot 31^0\cdot 37^1\cdot 41^0\cdot 43^0\cdot 47^0\cdot 53^1\cdot 59^1\cdot 61^1\cdot\\
&\cdot 67^0\cdot 71^0\cdot 73^0\cdot 79^0\cdot 83^0\cdot 89^0\cdot 97^0\cdot\\
&\cdot 101^1\cdot 103^1\cdot 107^1\cdot 109^1\cdot 113^1\cdot 127^1\cdot 131^1\cdot 137^1\cdot 139^1\cdot 149^1\cdot 151^1\cdot 157^1\cdot\\
&\cdot 163^1\cdot 167^1\cdot 173^1\cdot 179^1\cdot 181^1\cdot 191^1\cdot 193^1\cdot 197^1\cdot 199^1.
\end{aligned}$$

LEMMA. *Für die Zahl*

$$N = \binom{2n}{n} = \prod_p p^{\alpha_p}$$

mit $\alpha_p = v_p(N)$ *gilt:*

(1) $\log N \geq (\log 4)n - \log(2n+1)$.
(2) $\alpha_p = \sum_k (\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor)$.
(3) $\alpha_p \leq \left\lfloor \frac{\log 2n}{\log p} \right\rfloor$ *und damit* $\alpha_p \log p \leq \log 2n$.
(4) *Ist* $\alpha_p \geq 2$, *so ist* $p \leq \sqrt{2n}$.
(5) *Es ist*

$$\sum_{\alpha_p \geq 2} \alpha_p \log p \leq 3.2\sqrt{2n}$$

(6) *Für* $n < p \leq 2n$ *ist* $\alpha_p = 1$.
(7) *Für* $n \geq 3$ *und* $\frac{2}{3}n < p \leq n$ *ist* $\alpha_p = 0$.
(8) *Für* $n \geq 3$ *gilt*

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p > \frac{\log 4}{3} n - \log(2n+1) - 3.2\sqrt{2n}.$$

(9) *Es ist*

$$\sum_{n<p\leq 2n} \log p > 0 \quad \textit{für} \quad n \geq 119.$$

Beweis:

(1), (2) und (3) wurden bereits bewiesen, als die Zahl N das erste Mal betrachtet wurde.
(4) Ist $\alpha_p \geq 2$, so liefert die Abschätzung $\alpha_p \log p \leq \log 2n$ aus (3) sofort $2\log p \leq \log 2n$, also $p^2 \leq 2n$ und damit $p \leq \sqrt{2n}$.
(5) Aus den letzten Abschätzungen erhält man mit $\pi(x) \leq 1.6\frac{x}{\log x}$

$$\sum_{\alpha_p \geq 2} \alpha_p \log p \overset{(4)}{\leq} \sum_{p \leq \sqrt{2n}} \alpha_p \log p \overset{(3)}{\leq} \sum_{p \leq \sqrt{2n}} \log 2n = \pi(\sqrt{2n}) \log 2n \leq$$

$$\leq 1.6 \frac{\sqrt{2n}}{\log \sqrt{2n}} \log 2n = 3.2\sqrt{2n}.$$

(6) Sei $n < p \leq 2n$. Wegen

$$\frac{n}{p} < 1 \quad \text{und} \quad \frac{2n}{p^2} = \frac{2}{p} \cdot \frac{n}{p} < 1$$

folgt

$$\alpha_p = \sum_{k \geq 1} (\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor) = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor,$$

wegen $n < p \leq 2n < 2p$ dann mit $1 \leq \frac{2n}{p} < 2$ schließlich $\alpha_p = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 1$.
(7) Sei nun $\frac{2}{3}n < p \leq n$. Es gilt

$$\frac{2}{3}n < p \leq n \implies 2p \leq 2n < 3p \implies 2 \leq \frac{2n}{p} < 3 \implies \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor = 2,$$

außerdem

$$\frac{2}{3}n < p \leq n \implies p \leq n < \frac{3}{2}p \implies 1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2} \implies \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 1.$$

Weiter gilt wegen $p^2 > \frac{4}{9}n^2$

$$\frac{2n}{p^2} < \frac{2n}{\frac{4}{9}n^2} = \frac{9}{2n}.$$

Im Fall $n \geq 5$ gilt also $\left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor = 0$ und damit natürlich auch $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = 0$ für alle $k \geq 2$. Es folgt

$$\alpha_p = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Diese Aussage gilt auch für $n = 3$ und $n = 4$, wie nachfolgende Tabelle zeigt.

n	N	$\frac{2}{3}n$	n
1	$2 = 2$	0.666667	1.000000
2	$6 = 2 \cdot 3$	1.333333	2.000000
3	$20 = 2^2 \cdot 5$	2.000000	3.000000
4	$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$	2.666667	4.000000
5	$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	3.333333	5.000000
6	$924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$	4.000000	6.000000
7	$3432 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13$	4.666667	7.000000
8	$12870 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	5.333333	8.000000

(8) Sei nun $n \geq 3$. Ist $\alpha_p = 1$, so folgt also $p \leq \frac{2}{3}n$ oder $n < p \leq 2n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\log N &= \sum_p \alpha_p \log p = \sum_{\alpha_p \geq 2} \alpha_p \log p + \sum_{\alpha_p = 1} \alpha_p \log p \leq \\
&= 3.2\sqrt{2n} + \sum_{\substack{\alpha_p = 1 \\ p \leq \frac{2}{3}n}} \log p + \sum_{\substack{\alpha_p = 1 \\ n < p \leq 2n}} \log p \leq \\
&\leq 3.2\sqrt{2n} + \sum_{p \leq \frac{2}{3}n} \log p + \sum_{n < p \leq 2n} \log p = 3.2\sqrt{2n} + \vartheta(\frac{2}{3}n) + \sum_{n < p \leq 2n} \log p < \\
&< 3.2\sqrt{2n} + (\log 4)\frac{2}{3}n + \sum_{n < p \leq 2n} \log p.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{n < p \leq 2n} \log p &> \log N - 3.2\sqrt{2n} - (\log 4)\frac{2}{3}n \geq \\
&\geq (\log 4)n - \log(2n+1) - 3.2\sqrt{2n} - (\log 4)\frac{2}{3}n = \\
&= \frac{\log 4}{3}n - \log(2n+1) - 3.2\sqrt{2n}
\end{aligned}$$

(9) Für

$$f(x) = \frac{\log 4}{3}x - \log(2x+1) - 3.2\sqrt{2x}$$

gilt

$$f'(x) = \frac{\log 4}{3} - \frac{2}{2x+1} - \frac{3.2}{\sqrt{2x}}.$$

Es ist $f'(29) > 0$, also $f'(x) > 0$ für $x \geq 29$, also $f(x)$ monoton steigend für $x \geq 29$. Wegen $f(119) > 0$ gilt dann $f(x) > 0$ für $n \geq 119$. Damit folgt aus (8)

$$\sum_{n < p \leq 2n} \log p > f(n) > 0 \quad \text{für alle } n \geq 119.$$

Damit sind alle behaupteten Aussagen bewiesen. ■

Satz (Bertrandsches Postulat). *Zu jeder Zahl $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$.*

Beweis: Nach dem letzten Lemma ist

$$\sum_{n < p \leq 2n} \log p > 0 \quad \text{für} \quad n \geq 119,$$

also stimmt die Behauptung sicher für $n \geq 119$. Die restlichen Fälle werden durch folgende Tabelle abgedeckt, in der zu jeder natürlichen Zahl n zwischen 1 und 118 eine Primzahl p mit $n < p \leq 2n$ angegeben ist:

n	p
1	2
2	3
3	5
$4 \leq n \leq 5$	7
$6 \leq n \leq 9$	11
$10 \leq n \leq 18$	19
$19 \leq n \leq 33$	37
$34 \leq n \leq 63$	67
$64 \leq n \leq 118$	127

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Eine einfache Folgerung ist folgender Satz:

SATZ. *Ist $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots$ die Folge der Primzahlen, so gilt für alle r*

$$p_{r+1} < 2p_r, \qquad \textit{d.h.} \qquad p_{r+1} - p_r < p_r.$$

Beweis: Wir wählen $n = p_r$ im letzten Satz und erhalten eine Primzahl p mit $p_r < p \leq 2p_r$. Dann gilt auch $p_r < p_{r+1} \leq p \leq 2p_r$. Da $2p_r$ zusammengesetzt ist, folgt $p_{r+1} < 2p_r$, was zu zeigen war. ■

Bemerkung: Tatsächlich ist das Bertrandsche Postulat gleichwertig mit der Aussage $p_{r+1} < 2p_r$. Die eine Richung ist Inhalt des vorangegangenen Satzes. Es gelte umgekehrt $p_{r+1} < 2p_r$. Für $n = 1$ ist die Bertrandsche Aussage richtig. Sei also $n \geq 2$. Sei p_r die größte Primzahl $\leq n$. Dann ist $p_{r+1} > n$. Wir haben dann

$$p_r \leq n < p_{r+1} < 2p_r \leq 2n,$$

sodass die Bertrandsche Aussage mit $p = p_{r+1}$ folgt.

10. Ungleichungen für $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$

SATZ. *Es gilt für $x \geq 0$*

$$\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \vartheta(x) + 3\sqrt{x}.$$

Insbesondere impliziert dies $\psi(x) = \vartheta(x) + O(\sqrt{x})$.

Beweis: Für $0 \leq x < 2$ sind die Ungleichungen klar. Daher können wir nun $x \geq 2$ annehmen.

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{p^k \leq x} \log p = \sum_{p \leq x} \log p + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \vartheta(x) + \sum_{\substack{p \leq \sqrt{x} \\ p^k \leq x \\ k \geq 2}} \log p = \\
&= \vartheta(x) + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \sum_{2 \leq k \leq \frac{\log x}{\log p}} \log p = \vartheta(x) + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \left(\left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor - 1 \right) \leq \\
&\leq \vartheta(x) + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \cdot \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \leq \vartheta(x) + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log x = \vartheta(x) + \pi(\sqrt{x}) \log x.
\end{aligned}$$

Mit

$$\pi(\sqrt{x}) \leq 1.5 \frac{\sqrt{x}}{\log \sqrt{x}} = 3 \frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

folgt dann sofort

$$\psi(x) \leq \vartheta(x) + 3\sqrt{x},$$

wie behauptet. ■

Die folgende Tabelle illustriert nochmals das vorangegangene Lemma:

x	$\vartheta(x)$	$\psi(x)$	$\frac{\psi(x)-\vartheta(x)}{\sqrt{x}}$
10	5.35	7.83	0.785796
20	16.09	19.27	0.710634
30	22.59	28.48	1.074651
40	29.64	36.21	1.040271
50	40.96	49.49	1.205640
60	49.01	57.53	1.100594
70	57.32	66.54	1.101799
80	70.25	79.46	1.030638
90	79.15	89.47	1.087499
100	83.73	94.05	1.031692
200	188.56	206.15	1.243260
300	277.02	299.23	1.282140
400	370.73	397.83	1.354884
500	474.55	501.65	1.211845
600	562.98	593.91	1.262561
700	666.47	699.00	1.229736
800	759.09	792.73	1.189154
900	860.23	897.23	1.233389
1000	956.25	996.68	1.278687
1000	956.25	996.68	1.278687
2000	1939.84	1994.45	1.221170
3000	2932.36	3001.09	1.254932
4000	3911.15	3989.68	1.241720
5000	4911.70	4997.96	1.219962
6000	5893.30	5988.11	1.224088
7000	6920.42	7028.07	1.286649
8000	7875.15	7987.29	1.253735
9000	8870.37	8983.21	1.189339
10000	9895.99	10013.40	1.174053

Um $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ für kleine x numerisch zu untersuchen, brauchen wir das folgende, unmittelbar einsichtige Lemma.

LEMMA. (1) *Für $x < 2$ ist $\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\psi(x)}{x} = 0$.*
(2) *Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt*

$$\inf_{x\in[n,n+1)} \frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\vartheta(n)}{n+1}, \quad \sup_{x\in[n,n+1)} \frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\vartheta(n)}{n}$$

und

$$\inf_{x\in[n,n+1)} \frac{\psi(x)}{x} = \frac{\psi(n)}{n+1}, \quad \sup_{x\in[n,n+1)} \frac{\psi(x)}{x} = \frac{\psi(n)}{n}.$$

Die folgende Tabelle enthält Abschätzungen für $\frac{\vartheta(x)}{x}$ und $\frac{\psi(x)}{x}$ für $2 \leq x < 1000$.

x	$\inf \frac{\vartheta(x)}{x}$	$\sup \frac{\vartheta(x)}{x}$	$\inf \frac{\psi(x)}{x}$	$\sup \frac{\psi(x)}{x}$
$2 \le x < 3$	0.231049	0.346574	0.231049	0.346574
$3 \le x < 4$	0.447940	0.597253	0.447940	0.597253
$4 \le x < 5$	0.358352	0.447940	0.496981	0.621227
$5 \le x < 7$	0.485885	0.680239	0.584906	0.818869
$7 \le x < 8$	0.668388	0.763872	0.755032	0.862894
$8 \le x < 11$	0.486101	0.668388	0.712001	0.870224
$11 \le x < 20$	0.595769	0.846716	0.786916	1.013982
$20 \le x < 100$	0.662865	0.902421	0.837637	1.029370
$10 \le x < 100$	0.486101	0.902421	0.712001	1.029370
$100 \le x < 256$	0.828994	0.947555	0.931142	1.038821
$100 \le x < 1000$	0.828994	0.969819	0.931142	1.038821

SATZ. *Es gelten die Ungleichungen*

$$0.4x \overset{(x\ge 11)}{\le} \vartheta(x) \overset{(x\ge 0)}{\le} 1.4x \quad \textit{und} \quad 0.6x \overset{(x\ge 7)}{\le} \psi(x) \overset{(x\ge 0)}{\le} 1.5x.$$

Beweis:

(1) Wir haben gezeigt, dass $\vartheta(x) < \log 4 \cdot x$ für $x > 0$ gilt, was wegen $\log 4 = 1.3863$ die Behauptung zeigt.

(2) Wir wissen, dass für alle $x > 1$ die Abschätzung

$$\pi(x) \le 1.5 \cdot \frac{x}{\log x}$$

gilt. Wegen $\psi(x) \le \pi(x) \log x$ impliziert dies sofort $\psi(x) \le 1.5x$ für alle $x > 1$.

(3) Wir haben gesehen, dass

$$\psi(x) \ge 0.6 \cdot x \text{ für } x \ge 100$$

gilt. Aus der Tabelle ersieht man, dass dies dann für alle $x \ge 7$ gilt.

(4) Für $x \ge 7$ ist $\psi(x) \ge 0.6x$. Außerdem wissen wir, dass $\psi(x) \le \vartheta(x) + 3\sqrt{x}$ gilt. Daher erhalten wir für $x \ge 7$

$$\vartheta(x) \ge \psi(x) - 3\sqrt{x} \ge 0.6x - 3\sqrt{x} = 0.5x(1.2 - \frac{6}{\sqrt{x}}).$$

Wir haben die Äquivalenzen

$$1.2 - \frac{6}{\sqrt{x}} \ge 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 0.2 \ge \frac{6}{\sqrt{x}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{x} \ge 30 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ge 900.$$

Also gilt für $x \ge 900$ die Ungleichung

$$\vartheta(x) \ge 0.5x.$$

Für kleine Zahlen gilt die Ungleichung für $x \ge 11$, wie man der Tabelle entnimmt. ■

11. Verbesserte Abschätzungen für $\pi(x)$

Wir haben in diesem Kapitel mit elemenataren Methoden gezeigt, dass

$$0.6 \frac{x}{\log x} \overset{x\ge 3}{\le} \pi(x) \overset{x>1}{\le} 1.5 \frac{x}{\log x}$$

gilt. Rosser und Schoenfeld[3] haben unter anderem folgende Ungleichungen bewiesen:

$$\frac{x}{\log x}\left(1+\frac{1}{2\log x}\right) \overset{x\geq 59}{<} \pi(x) \overset{x>1}{<} \frac{x}{\log x}\left(1+\frac{3}{2\log x}\right),$$
$$\frac{x}{\log x-\frac{1}{2}} \overset{x\geq 67}{<} \pi(x) \overset{x>e^{1.5}=4.48\ldots}{<} \frac{x}{\log x-\frac{3}{2}},$$
$$\frac{x}{\log x} \overset{x\geq 17}{<} \pi(x) \overset{x>1}{<} 1.25506\frac{x}{\log x}.$$

Von Dusart[4] stammt folgendes Ergebnis

$$\frac{x}{\log x-1} \overset{x\geq 5393}{\leq} \pi(x) \overset{x\geq 60184}{\leq} \frac{x}{\log x-1.1}$$

gilt. (Bei Rosser/Schoenfeld und Dusart finden sich weitere Ergebnisse, auch für $\vartheta(x)$, $\psi(x)$ und p_n.)

12. Anhang: Erinnerung an Binomialkoeffizienten

Wir wollen in diesem Abschnitt kurz an ein paar Eigenschaften der Binomialkoeffizienten erinnern.

Binomialkoeffizienten kann man mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks einführen: Außen wird jeweils die Zahl 1 angeschrieben, im Innern ist eine Zahl die Summe der darüber stehenden Zahlen:

									1													
								1		1												
							1		2		1											
						1		3		3		1										
					1		4		6		4		1									
				1		5		10		10		5		1								
			1		6		15		20		15		6		1							
		1		7		21		35		35		21		7		1						
	1		8		28		56		70		56		28		8		1					
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1				
1	10		45		120		210		252		210		120		45		10		1			

Beginnen wir die Nummerierung der Zeilen mit $n=0$, so stehen in der n-ten Zeile $n+1$ Zahlen, die als „Binomialkoeffizienten“ $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, …, $\binom{n}{n}$ bezeichnet werden. Daher gilt nach Konstruktion

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m} \text{ für } 1\leq m\leq n-1.$$

Insbesondere gilt $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}$.

Satz (Binomischer Lehrsatz).

$$(x+y)^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m}.$$

Beweis: Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n, wobei die Fälle $n=0$ und $n=1$ klar sind:

$$(x+y)^0=1=\binom{0}{0}x^0y^0, \quad (x+y)^1=\binom{1}{0}x^0y^1+\binom{1}{1}x^1y^0.$$

[3] Siehe [**Rosser/Schoenfeld 1962**].
[4] Siehe [**Dusart 1998**].

Der Induktionsschluss geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} = (x+y)\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}x^m y^{n-1-m} = \\
&= \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}x^{m+1}y^{n-(m+1)} + \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}x^m y^{n-m} = \\
&= \sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}x^m y^{n-m} + \sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}x^m y^{n-m} = \\
&= x^n + \sum_{m=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}\right)x^m y^{n-m} + y^n = \\
&= x^n + \sum_{m=1}^{n-1}\binom{n}{m}x^m y^{n-m} + y^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}x^m y^{n-m},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. ■

SATZ. *Für $0 \le m \le n$ gilt*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{\prod_{i=0}^{m-1}(n-i)}{m!}$$

und

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Beweis: Wir beweisen die erste Gleichheit durch Induktion nach n, wobei die Fälle $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{0!n!} = 1$ klar sind. Sei jetzt $n \ge 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\binom{n}{m} &= \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m} = \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} + \frac{(n-1)!}{m!(n-m-1)!} = \\
&= \frac{m\cdot(n-1)!}{m!(n-m)!} + \frac{(n-m)\cdot(n-1)!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},
\end{aligned}$$

was die Behauptung durch Induktion beweist. Aus

$$\frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(n-m)!(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-1)n}{(n-m)!} = n(n-1)\dots(n-m+2)(n-m+1) = \prod_{i=0}^{m-1}(n-i)$$

folgt dann auch die zweite Gleichheit. Die erste Formel liefert auch die Symmetrie:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \binom{n}{n-m},$$

womit alles gezeigt wäre. ■

Um die Binomialkoeffizienten einer Zeile des Pascalschen Dreiecks der Größe nach zu vergleichen, zeigen wir das folgende Lemma:

LEMMA. *Für $1 \le k \le n$ gilt*

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} &\iff k < \frac{n+1}{2}, \\
\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k} &\iff k > \frac{n+1}{2}, \\
\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} &\iff k \text{ ungerade und } k = \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Beweis: Es ist

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} = \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n-k+1}{k},$$

woraus sofort

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k} &\iff \frac{n-k+1}{k} > 1 \iff n-k+1 > k \iff k < \frac{n+1}{2},\\
\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k} &\iff \frac{n-k+1}{k} < 1 \iff n-k+1 < k \iff k > \frac{n+1}{2},\\
\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k} &\iff \frac{n-k+1}{k} = 1 \iff n-k+1 = k \iff k = \frac{n+1}{2},
\end{aligned}$$

wobei $k = \frac{n+1}{2}$ natürlich nur möglich ist, wenn n ungerade ist. ■

Aus dem angegebenen Lemma folgt sofort folgender Satz:

SATZ. *Für $m \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 < \binom{2m}{1} < \binom{2m}{2} < \cdots < \binom{2m}{m-1} < \binom{2m}{m} > \binom{2m}{m+1} > \cdots > \binom{2m}{2m-2} > \binom{2m}{2m-1} > 1$$

und

$$1 < \binom{2m+1}{1} < \cdots < \binom{2m+1}{m-1} < \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1} > \binom{2m+1}{m+2} > \cdots > \binom{2m+1}{2m} > 1.$$

Anhang: Gilt $\vartheta(x) \leq x$ für alle $x > 0$?

Unsere Tabellen und Skizzen zeigen, dass in den untersuchten Intervallen stets $\vartheta(x) < x$ (für $x > 0$) gilt. Ist dies immer der Fall? Wir zeigen zunächst ein Lemma:

LEMMA. *Sei $x_0 \in \mathbb{R}_{\geq 2}$ so, dass gilt*

$$\vartheta(x) \leq x \text{ für alle } 0 < x < x_0.$$

Dann gilt auch

$$\pi(x) < \mathrm{li}(x) + 2.89 \text{ für alle } 2 \leq x \leq x_0.$$

Beweis: Wir haben gesehen, dass für $x \geq 2$ die Aussage

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt$$

gilt. Mit $\vartheta(x) \leq x$ für alle $0 < x < x_0$ folgt für $2 \leq x \leq x_0$

$$\begin{aligned}
\pi(x) &= \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\log t)^2} dt \leq \\
&\leq \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{t}{t(\log t)^2} dt = \frac{x}{\log x} - \int_2^x \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\log t}\right) \cdot t \cdot dt \overset{\text{partielle Integration}}{=} \\
&= \frac{x}{\log x} - \left(\left[\frac{t}{\log t}\right]_{t=2}^{x} - \int_2^x \frac{dt}{\log t}\right) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + \frac{2}{\log 2} < \mathrm{li}(x) + 2.89,
\end{aligned}$$

was gezeigt werden sollte. ■

FOLGERUNG. *Es gilt*

$$\{x \in (0, \infty) : \vartheta(x) > x\} \neq \emptyset.$$

Beweis: Wir haben in der Einführung bereits erwähnt, dass Littlewood [**Ingham 1932**, S.103] gezeigt hat, dass es eine Folge z_n reeller Zahlen und eine Zahl $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty \quad \text{und} \quad \mathrm{li}(z_n) + c\frac{\sqrt{z_n}\cdot \log\log\log z_n}{\log z_n} < \pi(z_n) \text{ für alle } n.$$

Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$c\frac{\sqrt{z_n}\cdot \log\log\log z_n}{\log z_n} \geq 2.89 \text{ für alle } n \geq N,$$

sodass folgt

$$\mathrm{li}(z_n) + 2.89 \leq \mathrm{li}(z_n) + c\frac{\sqrt{z_n}\cdot \log\log\log z_n}{\log z_n} < \pi(z_n) \text{ für alle } n \geq N.$$

Daher kann die Voraussetzung des Lemmas nicht für $x_0 = z_n$ (mit $n \geq N$) erfüllt sein, was die Behauptung beweist. ■

Natürlich wäre es schöner, wenn man etwas mehr sagen könnte.

Literaturverzeichnis

[Apostol 1974] T. M. Apostol. Mathematical Analysis. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.

[Apostol 1976] T. M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 1976.

[Axer 1910] A. Axer. Beitrag zur Kenntnis der zahlentheoretischen Funktionen $\mu(n)$ und $\lambda(n)$. Prace Matematyczno-Fizyczne 21 (1910), 65-95.

[Bach/Shallit 1996] E. Bach, J. Shallit. Algorithmic Number Theory. Volume 1: Efficient Algorithmus. The MIT Press, 1996.

[Baker/Harman/Pintz 2001] R. C. Baker, G. Harman and J. Pintz. The difference between consecutive primes, II. Proc. London Math. Soc. (3) 83 (2001) 532-562.

[Bateman/Horn 1962] P. T. Bateman, R. A. Horn. A Heuristic Asymptotic Formula Concerning the Distribution of Prime Numbers. Math. Comp. **16** (1962), 363-367.

[Bouniakowsky 1857] V. Bouniakowsky. Nouveaux théorèmes relatifs à la distinction des nombres premiers et à la décomposition des entiers en facteurs. Mém. Acad. Sci. St. Petersbourg (6), Sci. Math. Phys. **6** (1857), 305-329.

[Brüdern 1995] J. Brüdern. Einführung in die analytische Zahlentheorie. Springer-Verlag, 1995.

[Chandrasekharan 1968] K. Chandrasekharan. Introduction to Analytic Number Theory. Springer-Verlag, 1968.

[Cohen 2007II] H. Cohen. Number Theory. Volume II: Analytic and Modern Tools. Graduate Texts in Mathematics 240. Springer-Verlag, 2007.

[Cramér 1920] H. Cramér. Some theorems concerning prime numbers. Ark. Mat. Astr. Fys. **15** (5) (1920), 1-33. Oder: Collected Works I, S.138-170.

[Cramér 1936] H. Cramér. On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. Acta Arith. **2** (1) (1936), 23-46. Oder: Collected Works II, S.871-894.

[Crandall/Pomerance 2005] R. Crandall, C. Pomerance. Prime Numbers, A Computational Perspective. Second Edition. Springer-Verlag, 2005.

[Dirichlet 1849] P. G. L. Dirichlet. Über die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie. Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von 1849, 69-83. Oder: Werke II, 49-66.

[Dusart 1998] P. Dusart. Sharper bounds for ψ, ϑ, π, p_k. Laboratoire d'Arithmétique, de Calcul formel et d'Optimisation. Rapport de recherche n^0 1998-06.

[Edwards 1974] H. M. Edwards. Riemann's Zeta Function. Dover Publications, Inc., 1974.

[Ellison/Ellison 1985] W. Ellison, F. Ellison. Prime Numbers. John Wiley and Sons, 1985.

[Ford/Green/Konyagin/Tao 2014] K. Ford, B. Green, S. Konyagin, T. Tao. Large gaps between consecutive prime numbers. arXiv:1408.4505v1 [math.NT].

[Hardy/Littlewood III] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. Some problems of 'partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. 44 (1923), pp. 1-70.

[Hardy/Riesz] G. H. Hardy, M. Riesz. The general theory of Dirichlet series. Cambridge University Press, 1915.

[Hardy/Wright 1979] G. H. Hardy, E. M. Wright. An Introduction to the Theory of Numbers. Fifth Edition. Clarendon Press, Oxford, 1979.

[Helfgott 2014] H. A. Helfgott. The ternary Goldbach conjecture is true. arXiv:1312.7748v2 [math.NT].

[Hensley/Richards 1974] D. Hensley, I. Richards. Primes in Intervals. Acta Arithmetica **25** (1974), 375-391.

[Ingham 1932] A. E. Ingham. The distribution of prime numbers. Cambridge University Press, 1932.

[Jameson 2003] G. J. O. Jameson. The Prime Number Theorem. London Mathematical Society Student Texts **53**, Cambridge University Press, 2003.

[Korevaar 1982] J. Korevaar. On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem. The Mathematical Intelligencer **4** (1982), 108–115.

[Landau 1909] E. Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Erster Band. Second Edition. Chelsea Publishing Company, New York, 1953.

[Landau 1910] E. Landau. Über die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herren Hardy und Axer. Prace Matematyczno-Fizyczne 21 (1910), 97-177.

[Maynard 2013] J. Maynard. Small gaps between primes. arXiv:1311.4600v2 [math.NT].

[Maynard 2014] J. Maynard. Large gaps between primes. arXiv:1408.5110v1 [math.NT].

[Montgomery/Vaughan 2006] H. L. Montgomery, R. C. Vaughan. Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory. Cambridge studies in advanced mathematics **97**, Cambridge University Press, 2006.

[Narkiewicz 2000] W. Narkiewicz. The Development of Prime Number Theory. Springer-Verlag, 2000.

[Nathanson 2000] M. B. Nathanson. Elementary Methods in Number Theory. Graduate Texts in Mathematics **195**. Springer-Verlag, 2000.

[Newman 1980] D. J. Newman. Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem. American Mathematical Monthly **87** (1980), 693–696.

[Ramaré 1995] O. Ramaré. On S'nirel'man's constant. Annali dela Scuola Superiore di Pisa, vol. 21, no. 4 (1995), pages 645-705.

[Ribenboim 2006] P. Ribenboim. Die Welt der Primzahlen. Aktualisierte Übersetzung der englischen Ausgabe 'The Little Book of Bigger Primes' (2. Auflage, Springer-Verlag, 2004). Springer-Verlag, 2006.

[Riesel 1985] H. Riesel. Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Birkhäuser, 1985.

[Rosser/Schoenfeld 1962] J. B. Rosser, L. Schoenfeld. Approximate Formulas for Some Functions of Prime Numbers. Illinois J. Math. **6** (1962), 64-94.

[Ruppert 2005] W. Ruppert. Analytische Zahlentheorie II. Vorlesungsskript zu einer Vorlesung im Sommersemester 2005.

[Schinzel/Sierpiński 1958] A. Schinzel, W. Sierpiński. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Acta Arith. **4** (1958), 185-208. Erratum: **5** (1959), 259.

[Soundararajan 2007] K. Soundararajan. Small gaps between prime numbers: the work of Goldston-Pintz-Yildirim. Bull. AMS **44** (2007), 1-18.

[Tenenbaum, Mendès France 2000] G. Tenenbaum, M. Mend'es France. The Prime Numbers and Their Distribution. AMS, 2000.

[Titchmarsh 1986] E. C. Titchmarsh. The Theory of the Riemann Zeta-Function. Second Edition. Revised by D. R. Heath-Brown. Clarendon Press, Oxford, 1986.

[Zhang 2014] Y. Zhang. Bounded gaps between primes. Annals of Mathematics. Volume 179 (2014), Issue 3, Pages 1121-1174.