KAPITEL 4

Lineare Differentialgleichungssysteme

1. Allgemeines

Unter einem **linearen Differentialgleichungssystem** versteht man ein System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned}$$

wo $a_{ij}(t)$ und $b_i(t)$ auf einem Intervall definierte und stetige Funktionen sind. Gesucht sind (differenzierbare) Funktionen $x_1, \ldots, x_n$, die die Gleichungen erfüllen. Schreibt man

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \ldots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \ldots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix},$$

so wird aus dem Gleichungssystem die Gleichung

$$x' = A(t)x + b(t),$$

weswegen man manchmal auch einfach von einer **linearen Differentialgleichung** spricht.
Eine Lösung ist eine stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n,$$

für die gilt

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \text{ für alle } t \in I,$$

oder in ausführlicher Schreibweise

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) &= a_{11}(t)\varphi_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\varphi_n(t) + b_1(t) \\ &\vdots \\ \varphi_n'(t) &= a_{n1}(t)\varphi_1(t) + \cdots + a_{nn}(t)\varphi_n(t) + b_n(t). \end{aligned}$$

Ist $b(t) = 0$, so spricht man von einem **homogenen linearen Differentialgleichungssystem** bzw. von einer **homogenen linearen Differentialgleichung**:

$$x' = A(t)x.$$

Beispiele:

(1) Wir betrachten eine chemische Reaktion, bei der Moleküle vom Typ A_1, A_2, A_3 beteiligt sind. Die Konzentration von A_i zum Zeitpunkt t sei $x_i(t)$. Die Ableitung $x_i'(t)$ beschreibt dann die Konzentrationsänderung von A_i zur Zeit t. Dabei mögen folgende Eigenschaften gelten:

- Es gibt eine Zahl $k_1 > 0$, sodass gilt

$$x_1'(t) = -k_1 x_1(t).$$

Datei: al_dgl4.tex. Version vom 2.12.2019

- A_2 nimmt zu, so wie A_1 abnimmt, gleichzeitig wird aber auch noch A_2 in A_3 umgewandelt, sodass sich folgende Gleichung ergibt (mit einer Zahl $k_2 > 0$):
$$x_2'(t) = \lambda x_1(t) - k_2 x_2(t).$$
- A_3 nimmt zu, so wie A_2 abnimmt:
$$x_3'(t) = k_2 x_2(t).$$

Wir erhalten also ein lineares Differentialgleichungssystem:
$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$
Man beachte, dass $x_1'(t) + x_2'(t) + x_3'(t) = 0$ gilt, dass also die Summe $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ konstant ist.

(2) Das Differentialgleichungssystem
$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$
lässt sich auch in der Form
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
schreiben. Offensichtlich sind
$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$
Lösungen.

(3) Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:
$$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t).$$
Setzt man $y = x'$, so folgt
$$y' = x'' = -p(t)x' - q(t)x + r(t) = -p(t)y - q(t)x + r(t),$$
sodass man dies nun als lineares Differentialgleichungssytem schreiben kann:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ r(t) \end{pmatrix}.$$
Das Beispiel lässt sich leicht verallgemeinern:

(4) **Umwandlung einer linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung in ein lineares Differentialgleichungssystem:** Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung:
$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t).$$
Wir führen Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ ein durch
$$x_1(t) = x(t), \quad x_2(t) = x'(t), \quad x_3(t) = x''(t), \quad \ldots, \quad x_n(t) = x^{(n-1}(t),$$
also
$$x_j(t) = x^{(j-1)}(t) \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$
Dann ist
$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) &= x''(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) &= x'''(t) = x_4(t) \\ &\vdots \\ x_{n-1}'(t) &= (x^{(n-2)})'(t) = x^{(n-1)}(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) &= y^{(n)}(t) = -a_1(x)x_n(t) - \cdots - a_{n-1}(t)x_2(t) - a_n(t)x_1(t) + b(t) \end{aligned}$$

Dies lässt sich bequem in Matrizenform schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & -a_{n-3}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen mit einfachen mathematischen Überlegungen:

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem*

$$x' = A(t)x.$$

Sei

$$\mathcal{L} = \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \text{ für alle } t \in I\}$$

die Menge der auf ganz I definierten Lösungen. Dann gilt:

(1) *$\mathcal{L}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(2) *Ist $t_0 \in I$, so ist die Auswertungsabbildung*

$$\mathcal{L} \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi \mapsto \varphi(t_0)$$

eine injektive lineare Abbildung. (Insbesondere gilt $\dim \mathcal{L} \leq n$.)

(3) *Seien $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{L}$. (Hier sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vektorwertige Funktionen.) Sei $\Phi(t)$ die Matrix, die man erhält, wenn man $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ spaltenweise in eine Matrix schreibt:*

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)|\varphi_2(t)| \dots |\varphi_n(t)).$$

Dann sind äquivalent:

(a) *$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bilden eine Basis von $\mathcal{L}$.*

(b) *Es gibt ein $t_0 \in I$ mit $\det \Phi(t_0) \neq 0$.*

(c) *Für alle $t_0 \in I$ ist $\det \Phi(t_0) \neq 0$.*

In diesem Fall nennt man $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein **Lösungsfundamentalsystem** *oder* **Fundamentalsystem** *und $\Phi(t)$ eine* **Fundamentalmatrix** *oder* **Wronski-Matrix**.

Beweis:

(1) Sind $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$, so gilt

$$\varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t), \quad \varphi_2'(t) = A(t)\varphi_2(t)$$

und für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)'(t) = c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) = c_1 A(t)\varphi_1(t) + c_2 A(t)\varphi_2(t) = A(t)\left(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2\right)(t),$$

sodass also $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \in \mathcal{L}$ gilt. Da die 0-Funktion trivialerweise in $\mathcal{L}$ liegt, zeigt dies, dass $\mathcal{L}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(2) Die Auswertungsabbildung $\mathcal{L} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \mapsto \varphi(t_0)$ ist eine lineare Abbildung. Wir zeigen die Injektivität, indem wir zeigen, dass der Kern 0 ist. Sei also φ im Kern, d.h. $\varphi \in \mathcal{L}$ mit $\varphi(t_0) = 0$.

- Wir definieren

$$\sigma : I \to \mathbb{R} \text{ mit } \sigma(t) = \|\varphi(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t)^2,$$

wobei hier $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ die Komponenten von φ sind. Dann gilt:

$$\sigma'(t) \quad = \quad \sum_{i=1}^n 2\varphi_i(t)\varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^n 2\varphi_i(t) \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\varphi_j(t) = 2 \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t).$$

- Es gilt
$$0 \le (\varphi_i(t) \pm \varphi_j(t))^2 = \pm 2\varphi_i(t)\varphi_j(t) + \varphi_i(t)^2 + \varphi_j(t)^2 \le \pm 2\varphi_i(t)\varphi_j(t) + 2\sigma(t),$$
also
$$\mp\varphi_i(t)\varphi_j(t) \le \sigma(t),$$
und damit
$$|\varphi_i(t)\varphi_j(t)| \le \sigma(t).$$
- Damit ergibt sich
$$|\sigma'(t)| \le \left(2 \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}(t)|\right) \cdot \sigma(t).$$
- Sei nun $J \subseteq I$ ein beliebiges kompaktes Intervall mit $t_0 \in J$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $A(t)$ gibt es eine Zahl K_J mit
$$2 \sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}(t)| \le K_J \text{ für alle } t \in J.$$
Damit folgt
$$|\sigma'(t)| \le K_J \cdot \sigma(t) \text{ für alle } t \in J.$$
Wegen $\sigma(t_0) = 0$ liefert ein früheres Lemma nun
$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in J.$$
Da das Intervall I durch kompakte Intervalle überdeckt werden kann, folgt
$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in I,$$
und damit $\varphi_1(t) = \cdots = \varphi_n(t) = 0$, also
$$\varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Dies zeigt, dass der Kern der Auswertungsabbildung nur aus der 0 besteht. Daher ist die Auswertungsabbildung injektiv.

(3)
- (b)$\Longrightarrow$(a): Ist $\det\Phi(t_0) \ne 0$, so sind die Vektoren $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ linear unabhängig. Dann müssen natürlich auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sein, bilden also wegen $\dim\mathcal{L} \le n$ eine Basis von $\mathcal{L}$.
- (a)$\Longrightarrow$(c): Sei $t_0 \in I$ beliebig. Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig, so wegen der Injektivität der Auswertungsabbildung auch die Bilder $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$. Dann gilt aber $\det\Phi(t_0) \ne 0$.
- (c)$\Longrightarrow$(b): Klar. ■

Beispiel: Für das homogene lineare Differentialgleichungssystem
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
hatten wir die Lösungen
$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$
gefunden. Wir bilden
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}.$$
Wegen
$$\det\Phi(t) = -2$$
bilden φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem und $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix.

Satz. *Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung*
$$x' = A(t)x$$
mit Lösungsmenge $\mathcal{L}$. Wir nehmen an, dass $\dim\mathcal{L} = n$ gilt. Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem und $\Phi(t) = (\varphi_1(t)|\dots|\varphi_n(t))$ die zugehörige Fundamentalmatrix. Dann gilt:

(1)
$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t).$$
(2)
$$\mathcal{L} = \{\Phi(t)c : c \in \mathbb{R}^n\}.$$
(3) *Jedes Anfangswertproblem $x' = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$ ist eindeutig lösbar. Die Lösung ist*
$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0.$$

Beweis:

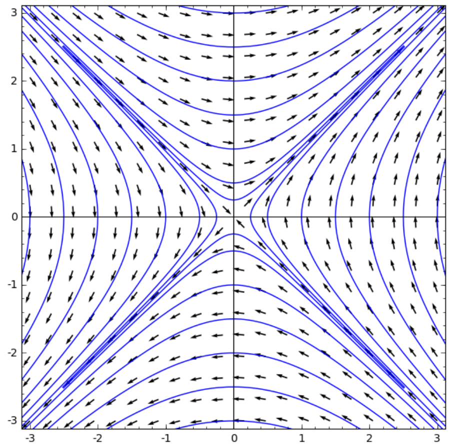
(1) Es gilt
$$\Phi'(t) = (\varphi_1'(t)|\dots|\varphi_n'(t)) = (A(t)\varphi_1(t)|\dots|A(t)\varphi_n(t)) = A(t)(\varphi_1(t)|\dots|\varphi_n(t)) = A(t)\Phi(t).$$

(2) Da $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ eine Basis von $\mathcal{L}$ ist, folgt die Behauptung aus
$$c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t) = (\varphi_1(t)|\dots|\varphi_n(t)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

(3) Sei $\varphi \in \mathcal{L}$. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(t) = \Phi(t)c$. Wann löst φ das Anfangswertproblem?
$$\varphi(t_0) = x_0 \iff \Phi(t_0)c = x_0 \iff c = \Phi(t_0)^{-1}x_0 \iff \varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0.$$
Das Anfangswertproblem ist also eindeutig lösbar und hat die angegebene Form. ■

Beispiel: (nach H2019/1/5a) Für das homogene lineare Differentialgleichungssystem
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
hatten wir die Fundamentalmatrix
$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$
bestimmt. (In den Spalten von $\Phi(t)$ steht ein Lösungsfundamentalsystem.) Es gilt
$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Phi(t),$$
wie es sein soll. Wir wollen für $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem
$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0$$
lösen. Wir wenden dafür einfach die Formel des Satzes an:
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t) \\ x_0 \sinh(t) + y_0 \cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Schreibt man $\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, so gilt also
$$x(t) = x_0 \cosh(t) + y_0 \sinh(t) \quad \text{und} \quad y(t) = x_0 \sinh(t) + y_0 \cosh(t).$$
Weiter hat man
$$\begin{aligned} x(t)^2 - y(t)^2 &= \left(x_0^2 \cosh(t)^2 + 2x_0y_0 \cosh(t)\sinh(t) + y_0^2 \sinh(t)^2\right) - \\ &\quad -\left(x_0^2 \sinh(t)^2 + 2x_0y_0 \sinh(t)\cosh(t) + y_0^2 \cosh(t)^2\right) = \\ &= x_0^2 \left(\cosh(t)^2 - \sinh(t)^2\right) + y_0^2 \left(\sinh(t)^2 - \cosh(t)^2\right) = \\ &= x_0^2 - y_0^2. \end{aligned}$$

Die Lösungskurven $\varphi(t)$ liegen also auf Hyperbeln. (Für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ist $\varphi(t)$ konstant 0.)



Natürlich Ist eine Fundamentalmatrix durch ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem nicht eindeutig bestimmt. Man kann aber genau sagen, wie Fundamentalmatrizen auseinander hervorgehen:

Lemma. *Sei $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$, definiert auf einem offenen Intervall I.*

(1) *Ist $\widetilde{\Phi}(t)$ eine (weitere) Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems, so gibt es eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(C) \neq 0$ und*
$$\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(t)C.$$
(2) *Ist $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det(C) \neq 0$, so ist auch*
$$\Phi(t)C$$
eine Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems.

(3) *Ist $t_0 \in I$, so ist*
$$\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$$
eine Fundamentalmatrix mit
$$\widetilde{\Phi}(t_0) = I,$$
der Einheitsmatrix. Man nennt $\widetilde{\Phi}(t)$ die **Hauptfundamentalmatrix** *in t_0 oder zum Zeitpunkt t_0. (Sie ist eindeutig bestimmt.)*

Beweis:

(1) Wegen $\det \Phi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ können wir eine Matrix $C(t)$ durch
$$C(t) = \Phi(t)^{-1}\widetilde{\Phi}(t)$$
definieren. Dann gilt also
$$\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(t)C(t).$$
Da $\widetilde{\Phi}(t)$ Fundamentalmatrix sein soll, gilt $\widetilde{\Phi}'(t) = A(t)\widetilde{\Phi}(t)$, also
$$\Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t).$$
Wegen $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ bleibt
$$\Phi(t)C'(t) = 0, \qquad \text{also} \qquad C'(t) = 0,$$
d.h. $C(t)$ ist konstant, was die Behauptung beweist.

(2) Wegen $\det(\Phi(t)C) = \det(\Phi(t)) \det(C) \neq 0$ für alle $t \in I$ und
$$(\Phi C)'(t) = \Phi'(t)C = A(t)\Phi(t)C$$
ist $\Phi(t)C$ eine Fundamentalmatrix.

(3) Dies folgt aus (2) und $\widetilde{\Phi}(t_0) = I$. ■

Beispiel: Für das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

haben wir die Fundamentalmatrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

gefunden. Die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$ ist

$$\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Ist $\Phi(t)$ die Hauptfundamentalmatrix des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$ zum Zeitpunkt t_0, so ist die Lösung des Anfangswertproblems $x(t_0) = x_0$ einfach

$$\varphi(t) = \Phi(t)x_0.$$

Satz. *Ist $\Phi(t)$ Fundamentalmatrix des homogenen linearen Differentialgleichungssystems $x' = A(t)x$, so erfüllt $\det(\Phi(t))$ die homogene lineare Differentialgleichung*

$$\det(\Phi)'(t) = \operatorname{sp}(A(t)) \cdot \det(\Phi)(t).$$

Beweis:

- Sei t_0 aus dem Definitionsintervall. Dann ist
$$\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$$
die Hauptfundamentalmatrix in t_0. Wir schreiben
$$\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1} = (\varphi_1(t)|\dots|\varphi_n(t)).$$
Dann sind $\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ einfach die Einheitsvektoren. Es gilt natürlich auch $\varphi_i'(t) = A(t)\varphi_i(t)$.
- Wir erinnern zunächst an das Differenzieren von Determinanten:
$$\begin{aligned} (\det(\varphi_1(t)|\dots|\varphi_n(t)))' &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t)|\dots|\varphi_i'(t)|\dots|\varphi_n(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t)|\dots|A(t)\varphi_i(t)|\dots|\varphi_n(t)). \end{aligned}$$
Nun setzen wir $t = t_0$ ein:
$$\begin{aligned} (\det(\Phi(t)\Phi(t_0)^{-1})'(t_0) &= \sum_{i=1}^n \det(\varphi_1(t_0)|\dots|A(t)\varphi_i(t_0)|\dots|\varphi_n(t_0)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{1i}(t_0) & \dots & 0 \\ 0 & \dots & a_{2i}(t_0) & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & a_{ni}(t_0) & \dots & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}(t_0) = \operatorname{sp}(A(t_0)). \end{aligned}$$
Die linke Seite ist einfach
$$(\det\Phi)'(t_0) \cdot \det\Phi(t_0)^{-1},$$
woraus nun sofort
$$(\det\Phi)'(t_0) = \operatorname{sp}(A(t_0)) \cdot (\det\Phi)(t_0)$$
folgt, die Behauptung. ■

Beispiel: Für das System $x' = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

war

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix mit $\det \Phi(t) = -2$. Die Differentialgleichung für $\det \Phi(t)$ ist hier trivial, da auch $\operatorname{sp}(A) = 0$ gilt.

Es ist kein allgemeines Verfahren bekannt, um für eine homogene lineare Differentialgleichung $x' = A(t)x$ ein Lösungsfundamentalsystem zu bestimmen. Eine wichtige Ausnahme bildet der Fall, wenn $A(t)$ eine konstante Matrix ist. Es gibt aber auch noch andere Fälle, in denen man leicht Lösungen finden kann, beispielsweise wenn $A(t)$ Dreiecksgestalt hat. Der folgende Satz zeigt dies für 2×2-Matrizen:

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $A : I \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ stetig mit*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ 0 & a_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Ist $t_0 \in I$, ist $A_{11}(t)$ eine Stammfunktion von $a_{11}(t)$ und $A_{22}(t)$ eine Stammfunktion von $a_{22}(t)$, d.h. $A'_{11}(t) = a_{11}(t)$ und $A'_{22}(t) = a_{22}(t)$, so bilden die Funktionen

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{A_{11}(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{A_{11}(t)} \int_{t_0}^t a_{12}(u) e^{A_{22}(u) - A_{11}(u)} du \\ e^{A_{22}(t)} \end{pmatrix}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung

$$x' = A(t)x.$$

Beweis: Natürlich kann man einfach nachrechnen, dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichung lösen. Wir wollen aber sehen, wie man auf die Lösung kommt.

- Für die zweite Komponente gilt die Bedingung
  $$x'_2(t) = a_{22}(t) x_2(t).$$
  Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung für x_2, die für lösen können:
  $$x_2(t) = c_2 e^{A_{22}(t)} \text{ mit } c_2 \in \mathbb{R}.$$
- Für die erste Komponente ergibt sich:
  $$x'_1(t) = a_{11}(t) x_1(t) + c_2 a_{12}(t) e^{A_{22}(t)}.$$
  Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung für x_1, die wir ebenfalls lösen können:
  $$x_1(t) = c_1 e^{A_{11}(t)} + c_2 e^{A_{11}(t)} \int_{t_0}^t a_{12}(u) e^{A_{22}(u) - A_{11}(u)} du \text{ mit } c_1 \in \mathbb{R}.$$
- Aus den Darstellungen für $x_1(t)$ und $x_2(t)$ kann man sofort $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ablesen. Da $\varphi_1(t)$ in der zweiten Komponente 0 ist, $\varphi_2(t)$ in der zweiten Komponente aber $\neq 0$ ist, sind φ_1, φ_2 linear unabhängig, bilden also ein Lösungsfundamentalsystem. ■

Beispiel: Wir betrachten das homogene lineare Differentialgleichungssystem

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x.$$

Mit den Bezeichnungen des Satzes gilt $a_{11}(t) = 1$, $a_{12}(t) = 2$, $a_{22}(t) = 3$. Wir wählen $A_{11}(t) = t$, $A_{22}(t) = 3t$ und erhalten mit $t_0 = 0$

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^t \int_0^t 2e^{3u-u} du \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \left(e^{2t} - 1\right) \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} - e^t \\ e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Zugehörige Fundamentalmatrix ist

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} - e^t \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix},$$

die sogar Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$ ist.

Wir betrachten nun die inhomogene Gleichung

$$x' = A(t)x + b(t)$$

mit stetigen Funktionen $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$. Wir nehmen an, wir kennen eine Fundamentalmatrix $\Phi(t)$. Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung sind

$$\Phi(t)c \text{ mit } c \in \mathbb{R}^n.$$

Wir versuchen es wieder mit **Variation der Konstanten**, d.h. wir machen den Ansatz

$$\varphi(t) = \Phi(t)c(t)$$

mit einer noch unbekannten Funktion $c : I \to \mathbb{R}$. Wann löst φ die inhomogene lineare Differentialgleichung?

$$\begin{aligned} \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Phi'(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t) \quad \overset{\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)}{\Longleftrightarrow} \\ &\Longleftrightarrow \quad A(t)\Phi(t)c(t) + \Phi(t)c'(t) = A(t)\Phi(t)c(t) + b(t) \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \Phi(t)c'(t) = b(t) \quad \Longleftrightarrow \quad c'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t). \end{aligned}$$

Zusammengefasst: Ist $c(t)$ eine Stammfunktion von $\Phi(t)^{-1}b(t)$, so ist $\varphi(t) = \Phi(t)c(t)$ eine (spezielle) Lösung der Differentialgleichung $x' = A(t)x + b(t)$.

Beispiel: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir haben gesehen, dass

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

eine Fundamentalmatrix der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist. Wir brauchen $c(t)$ mit

$$c'(t) = \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t)e^{-t} \\ \frac{1}{2}\cos(t)e^t \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung ist beispielsweise

$$c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-\cos(t) + \sin(t))e^{-t} \\ \frac{1}{4}(\cos(t) + \sin(t))e^t \end{pmatrix},$$

woraus sich die (spezielle) Lösung

$$\varphi_s(t) = \Phi(t)c(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(t) \\ -\frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}$$

ergibt.

Der folgende Satz beschreibt die Struktur der Lösungsmenge einer linearen Differentialgleichung $x' = A(t)x + b(t)$:

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{R}^n$ stetige Funktionen. Sei $\mathcal{L}$ der Lösungsraum der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$x' = A(t)x.$$

Wir nehmen an, dass $\dim \mathcal{L} = n$ *gilt. Sei $\Phi(t)$ eine zugehörige Fundamentalmatrix, sodass also gilt*

$$\mathcal{L} = \{\Phi(t)c : c \in \mathbb{R}^n\}.$$

Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$x' = A(t)x + b(t)$$

mit zugehöriger Lösungsmenge

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \{\varphi : I \to \mathbb{R}^n \text{ stetig differenzierbar} : \varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t) \text{ für alle } t \in I\}.$$

Dann gilt:

(1) *Ist $\varphi_s : I \to \mathbb{R}$ eine (spezielle) Lösung der Differentialgleichung, so ist*

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \varphi_s + \mathcal{L} = \{\varphi_s + \varphi : \varphi \in \mathcal{L}\} = \{\Phi(t)c + \varphi_s(t) : c \in \mathbb{R}^n\}.$$

(2) *Ist $\widetilde{c} : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der (vektorwertigen) Funktion $\Phi(t)^{-1}b(t)$, d.h.*

$$\widetilde{c}'(t) = \Phi(t)^{-1}b(t),$$

dann ist

$$\varphi_s(t) = \Phi(t)\widetilde{c}(t)$$

eine spezielle Lösung der (inhomogenen) Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist dann

$$\varphi(t) = \Phi(t)(c + \widetilde{c}(t)) \text{ mit } c \in \mathbb{R}^n.$$

(3) *Für $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ hat das Anfangswertproblem*

$$x' = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung.

Beweis:

(1) Dies sieht man genauso wie bei den früheren linearen Differentialgleichungen.
(2) Dies haben wir bereits in den Vorüberlegungen gezeigt.
(3) Die allgemeine Lösung der (inhomogenen) Gleichung ist

$$\varphi(t) = \Phi(t)c + \varphi_s(t) \text{ mit } c \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

$$\varphi(t_0) = x_0 \iff \Phi(t_0)c + \varphi_s(t_0) = x_0 \iff \Phi(t_0)c = x_0 - \varphi_s(t_0) \iff c = \Phi(t_0)^{-1}(x_0 - \varphi_s(t_0)).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}(x_0 - \varphi_s(t_0)) + \varphi_s(t).$$

Dies beweist die Behauptung. ■

Wir betrachten noch ein Beispiel eines Differentialgleichungssystems mit nicht konstanten Koeffizienten:

Beispiel: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

- Anders als bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten ist kein Verfahren bekannt, mit dem man systematisch ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen Systems $x' = A(t)x$ erhält, wenn die Matrix $A(t)$ nicht konstant ist. In unserem Fall ist

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$

- Wir haben Lösungen des homogenen Systems gefunden, beispielsweise durch Probieren:

$$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die Matrix

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)|\varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen nochmals, ob tatsächlich $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ gilt:

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A(t)\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & -\frac{1}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{t^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung ist also erfüllt. Außerdem gilt

$$\det \Phi(t) = 1 \quad \text{und} \quad \Phi(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix und φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem.

- Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung mit rechter Seite $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ zu bestimmen, suchen wir eine Funktion $\widetilde{c}(t)$, für die gilt:

$$\widetilde{c}'(t) = \Phi(t)^{-1} b(t) = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{t} \\ -t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können also

$$\widetilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

wählen. Als spezielle Lösung erhalten wir dann

$$\varphi_s(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

- Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems wird damit

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \varphi_s(t) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2\frac{1}{t} + t \\ c_1 t + 2c_2 + t^2 \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Wir betrachten noch das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ y(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für die allgemeine Lösung gilt

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + 1 \\ c_1 + 2c_2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung

$$\varphi(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

führt dann auf $c_1 = 2$, $c_2 = -1$, sodass wir als Lösung

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{t} + t \\ 2t - 2 + t^2 \end{pmatrix}$$

erhalten.

2. Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Im Folgenden betrachten wir homogene lineare Differentialgleichungen

$$x' = Ax \text{ mit einer Matrix } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Zwar gibt es eine allgemeine Lösungsformeln, wir beginnen aber mit Verfahren, mit denen man praktisch oft Lösungen bestimmen kann.

Überlegung: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir wollen das Differentialgleichungssystem

$$x' = Ax$$

lösen. Wir machen den Ansatz

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v \text{ mit einer Zahl } \lambda \text{ und einem Vektor } v \neq 0.$$

Es gilt:

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda v = Av.$$

Die Gleichung $Av = \lambda v$ ist eine Eigenwertgleichung mit Eigenwert λ und zugehörigem Eigenvektor v. Wir fassen die so zusammen: *Ist λ ein Eigenwert der Matrix A und v ein zugehöriger Eigenvektor, so löst die Funktion*

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v$$

das Differentialgleichungssystem $x' = Ax$.

Erinnerung:

- Ist A eine (reelle oder komplexe) quadratische Matrix, so heißt $\lambda \in \mathbb{C}$ ein **Eigenwert** von A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ gibt mit
$$Av = \lambda v.$$
v heißt dann ein **Eigenvektor** von A. Der Kern $\operatorname{Kern}(A - \lambda I)$ heißt der zu λ gehörige **Eigenraum**. Die Elemente von $\operatorname{Kern}(A - \lambda I) \setminus \{0\}$ sind genau die zu λ gehörigen Eigenvektoren.
- Das Polynom
$$\chi_A(x) = \det(A - xI)$$
heißt das **charakteristische Polynom** der (quadratischen) Matrix A. Die Nullstellen von $\chi_A(x)$ sind genau die Eigenwerte von A.

Beispiel: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x' & = & -2x & + & y \\ y' & = & x & - & 2y \end{array},$$

das wir auch in der Form

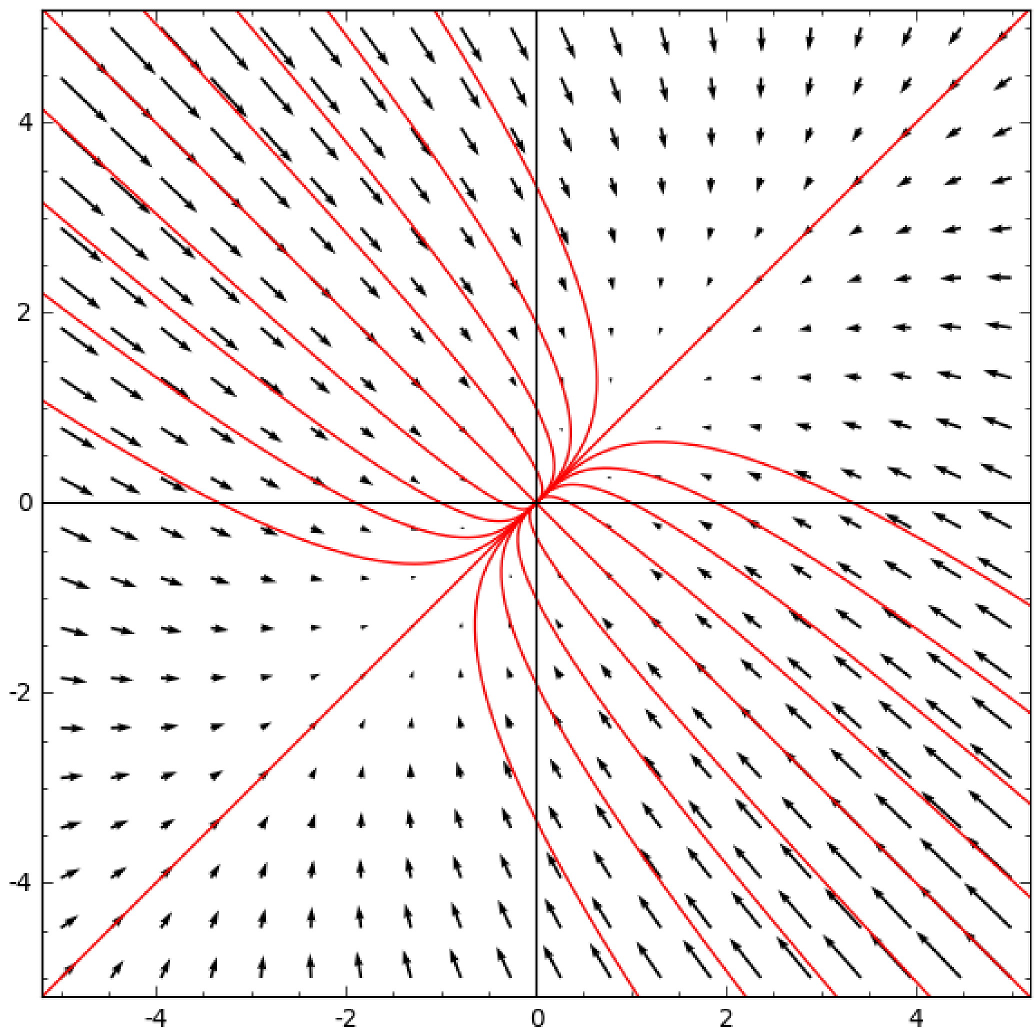
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

schreiben können.

- Um die Eigenwerte von A zu bestimmen, berechnen wir das charakteristische Polynom:
$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)^2 - 1 = 4 + 4\lambda + \lambda^2 - 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$
Die Eigenwerte als Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind
$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1, \quad \text{also} \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3.$$
- Wir bestimmen den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$:
$$\operatorname{Kern}(A - \lambda_1 I) \quad = \quad \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Also ist
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
ein zu $\lambda_1 = -1$ gehöriger Eigenvektor. Daher ist
$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$
eine Lösung des Differentialgleichungssystems.
- Wir bestimmen den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$:
$$\operatorname{Kern}(A - \lambda_2 I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -2-(-3) & 1 \\ 1 & -2-(-3) \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Also ist
$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = -3$ und
$$\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2 = e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

- Wir bilden
$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)|\varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-3t} \\ e^{-t} & -e^{-3t} \end{pmatrix}.$$
Es ist
$$\det \Phi(0) = \det(v_1|v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$
Daher ist $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix und φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem.
- Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist also
$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} \\ c_1e^{-t} - c_2e^{-3t} \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
Alle Lösungen konvergieren für $t \to \infty$ gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.



Reelle Matrizen können auch komplexe Eigenwerte haben. Auch diese führen zu Lösungen unserer Differentialgleichungssysteme:

Satz. *Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir das Differentialgleichungssystem*
$$x' = Ax.$$

(1) *Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A und $v \in \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so ist*

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(2) *Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein komplexer, nichtreeller Eigenwert von A und $v \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$ ein zugehöriger Eigenvektor, so sind*

$$\varphi_1(t) = \mathrm{Re}\,(e^{\lambda t} v) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \mathrm{Im}\,(e^{\lambda t} v)$$

linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems. (Auch $\overline{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor $\overline{v}$. Er liefert die Lösungen $\varphi_1(t), -\varphi_2(t)$, bringt also nichts Neues.) Man erhält eine explizite Darstellung, wenn man λ und v in Real- und Imaginärteil zerlegt: Ist

$$\lambda = \alpha + i\beta, \quad v = v_1 + iv_2 \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n,$$

so gilt

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2).$$

Beweis: Die erste Aussage wurde bereits gezeigt. Zur zweiten Aussage:

$$\begin{aligned} \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t) &= (\varphi_1(t) + \varphi_2(t))' = \left(e^{\lambda t} v\right)' = \lambda e^{\lambda t} v = e^{\lambda t} A v = A\left(e^{\lambda t} v\right) = \\ &= A\left(\varphi_1(t) + i\varphi_2(t)\right) = A\varphi_1(t) + iA\varphi_2(t). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil liefert

$$\varphi_1'(t) = A\varphi_1(t) \quad \text{und} \quad \varphi_2'(t) = A\varphi_2(t).$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) &= e^{i\lambda t} v = e^{(\alpha + i\beta)t}(v_1 + iv_2) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(v_1 + iv_2) = \\ &= e^{\alpha t}\Big((\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2) + i(\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2)\Big) = \\ &= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)v_1 - \sin(\beta t)v_2\right) + i \cdot e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)v_1 + \cos(\beta t)v_2\right). \end{aligned}$$

Vergleich von Real- und Imaginärteil beweist die angegebenen Darstellungen für φ_1 und φ_2. Wir wollen noch zeigen, dass $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ linear unabhängig sind. Angenommen, es gäbe ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_2(t) = c\varphi_1(t)$. Dann würde für $t = 0$ folgen

$$v = \mathrm{Re}\,(v) + i\mathrm{Im}\,(v) = \varphi_1(0) + i\varphi_2(0) = (1 + ic)\varphi_1(0).$$

Dann wäre auch $\varphi_1(0)$ ein Eigenvektor von A. Da aber $\varphi_1(0)$ reell ist, würde auch der zugehörige Eigenwert λ reell sein, ein Widerspruch. ■

Beispiel: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= -x - 2y \end{aligned}$$

Das Differentialgleichungssystem lässt sich auch in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

schreiben.

- Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$

mit den Nullstellen, also Eigenwerten von A

$$\lambda_{1/2} = -2 \pm i.$$

- Wir bestimmen den (komplexen) Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 + i$:

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2-(-2+i) & 1 \\ -1 & -2-(-2+i) \end{pmatrix} \quad = \quad \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 + i$ ist daher

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Nun bilden wir

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} v_1 \quad &= \quad e^{(-2+i)t}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-2t} \cdot e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ (\cos(t) + i\sin(t)) \cdot i \end{pmatrix} = \\ &= \quad e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) \\ -\sin(t) + i\cos(t) \end{pmatrix} = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + ie^{-2t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also sind

$$\varphi_1(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(t) \\ -e^{-2t}\sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{-2t}\begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2t}\sin(t) \\ e^{-2t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

Lösungen des Differentialgleichungssystems.
- Wir bilden die Matrix:

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t)|\varphi_2(t)) = \begin{pmatrix} e^{-2t}\cos(t) & e^{-2t}\sin(t) \\ -e^{-2t}\sin(t) & e^{-2t}\cos(t) \end{pmatrix}.$$

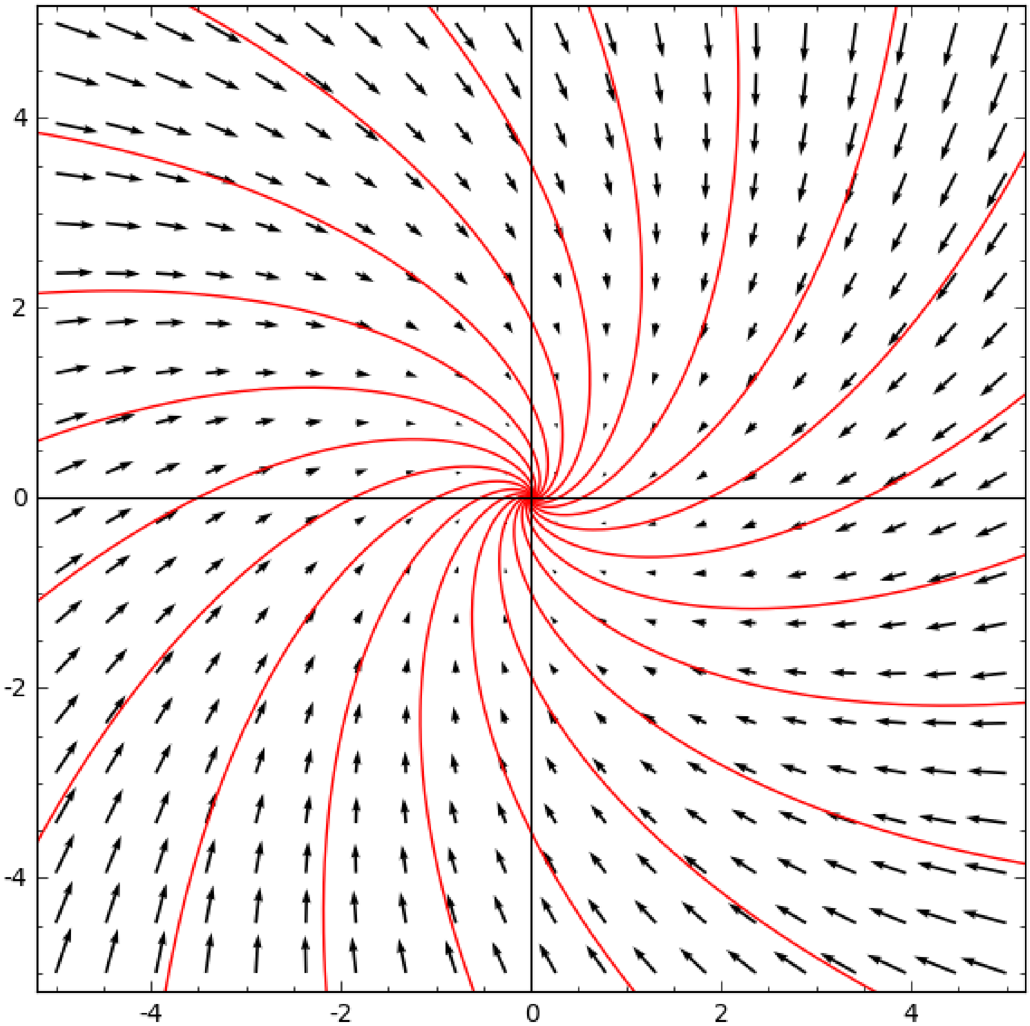
Es ist

$$\det\Phi(t) = e^{-4t}(\cos(t)^2 + \sin(t)^2) = e^{-4t} \neq 0.$$

Daher bilden $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ ein Lösungsfundamentalsystem und $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix.
- (Wie im vorangegangenen Satz bemerkt würde der konjugiert-komplexe Eigenwert $\lambda_2 = -2 - i$ zu den Lösungen $\varphi_1(t), -\varphi_2(t)$ führen.)
- Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems ist also

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t)) \\ e^{-2t}(-c_1\sin(t) + c_2\cos(t)) \end{pmatrix} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für $t \to \infty$ laufen die Lösungen spiralförmig auf $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu.



Beispiel: Wir hatten am Anfang dieses Kapitels eine chemische Rekation betrachtet, bei der Moleküle vom Typ A_1, A_2, A_3 beteiligt sind. Die Konzentration von A_i zum Zeitpunkt t sei $x_i(t)$. Wir hatten folgendes Differentialgleichungssystem aufgestellt:

$$x' = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir hatten $k_1 > 0$ und $k_2 > 0$ vorausgesetzt. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} -k_1 - t & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 - t & 0 \\ 0 & k_2 & -t \end{vmatrix} = (-t - k_1)(-t - k_2)(-t) = -(t + k_1)(t + k_2)t.$$

Wir wollen noch $k_1 \neq k_2$ voraussetzen. Dann hat die Matrix die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -k_1, \quad \lambda_2 = -k_2, \quad \lambda_3 = 0.$$

Wir berechnen zugehörige Eigenvektoren:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(A+k_1I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ k_1 & k_1-k_2 & 0\\ 0 & k_2 & k_1\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}k_1-k_2\\ -k_1\\ k_2\end{pmatrix},\\
\operatorname{Kern}(A+k_2I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}k_2-k_1 & 0 & 0\\ k_1 & 0 & 0\\ 0 & k_2 & k_2\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix},\\
\operatorname{Kern}(A-0I) &= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}-k_1 & 0 & 0\\ k_1 & -k_2 & 0\\ 0 & k_2 & 0\end{pmatrix} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wir wählen also

$$v_1 = \begin{pmatrix}k_1-k_2\\ -k_1\\ k_2\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Der Eigenwert λ_i führt zur Lösung $\varphi_i(t) = e^{\lambda_i t}v_i$, sodass wir die Lösungen

$$\varphi_1(t) = e^{-k_1t}\begin{pmatrix}k_1-k_2\\ -k_1\\ k_2\end{pmatrix}, \quad \varphi_2(t) = e^{-k_2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}, \quad \varphi_3(t) = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

erhalten. Die allgemeine Lösung ist also

$$\varphi(t) = c_1e^{-k_1t}\begin{pmatrix}k_1-k_2\\ -k_1\\ k_2\end{pmatrix} + c_2e^{-k_2t}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Wir nehmen an, am Anfang gibt es nur das Molekül A_1, d.h. wir wollen das Anfangswertproblem

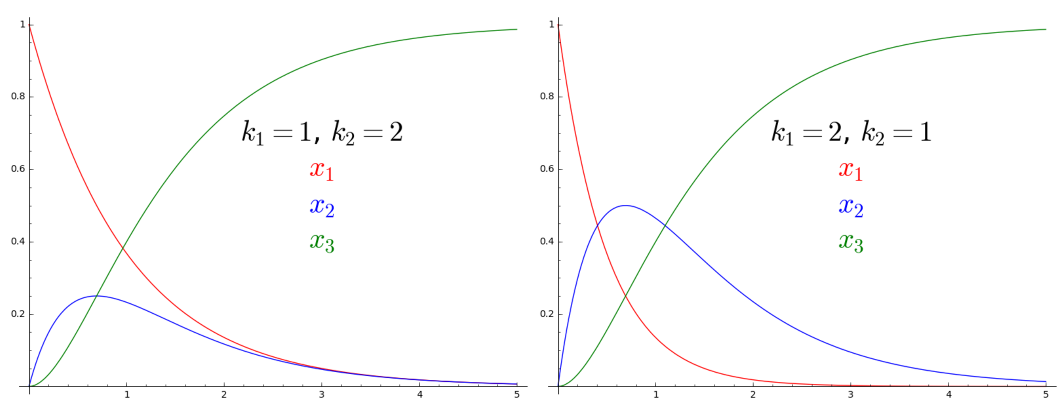
$$\varphi(0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

lösen. Es gilt:

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}c_1(k_1-k_2)\\ -c_1k_1+c_2\\ c_1k_2-c_2+c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \iff c_1 = \frac{1}{k_1-k_2}, c_2 = \frac{k_1}{k_1-k_2}, c_3 = 1.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$\varphi(t) = e^{-k_1t}\begin{pmatrix}1\\ -\frac{k_1}{k_1-k_2}\\ \frac{k_2}{k_1-k_2}\end{pmatrix} + e^{-k_2t}\begin{pmatrix}0\\ \frac{k_1}{k_1-k_2}\\ -\frac{k_1}{k_1-k_2}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$



Es kann passieren, dass die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts größer als die geometrische Vielfachheit ist. In diesem Fall gibt es noch einen anderen Typ von Lösungen. Wir behandeln nur einen Spezialfall:

Satz. *Zu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ betrachten wir die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x' = Ax.$$

Wir nehmen an, A besitzt einen Eigenwert λ mit algebraischer Vielfachheit 2, d.h. das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ hat eine Darstellung

$$\chi_A(t) = (t-\lambda)^2 \cdot g(t) \text{ mit einem Polynom } g(t) \text{ und } g(\lambda) \neq 0.$$

Dann lassen sich folgende Fälle unterscheiden:

(1) *Gilt* $\dim \operatorname{Kern}(A - \lambda I) = 2$, *ist v_1, v_2 eine Basis von* $\operatorname{Kern}(A-\lambda I)$, *so sind*
$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v_1, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t} v_2$$
linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung.

(2) *Gilt* $\dim \operatorname{Kern}(A - \lambda I) = 1$, *so ist* $\dim \operatorname{Kern}(A - \lambda I) = 2$. *Wählt man*
$$w \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I))^2 \setminus \operatorname{Kern}(A-\lambda I),$$
setzt man
$$v = (A - \lambda I)w,$$
so sind
$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}(w + tv)$$
linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung. Weiter gilt
$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(I + t(A - \lambda I))w.$$
Alternativ kann man $v \in \operatorname{Kern}(A - \lambda I)\setminus\{0\}$ wählen und $w \in \mathbb{R}^n$ bestimmen mit $(A-\lambda I)w = v$.

(3) *Im Fall $n = 2$ ist*
$$\Phi(t) = e^{\lambda t}(I + t(A - \lambda I))$$
eine Fundamentalmatrix, sogar die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$.

Beweis:

(1) Dass φ_1, φ_2 die Differentialgleichung lösen, haben wir bereits gesehen, dass die Lösungen linear unabhängig sind, folgt daraus, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.

(2) Aus $w \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^2)$ folgt $(A-\lambda I)^2 w = 0$, also $0 = (A-\lambda I)(A-\lambda I)w = (A-\lambda I)v$, d.h. $Av = \lambda v$. Wegen $w \notin \operatorname{Kern}(A-\lambda I)$ ist $v \neq 0$. Der Vektor v ist also Eigenvektor zum Eigenwert λ. Wir haben schon gesehen, dass dann $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}v$ die Differentialgleichung löst. Für
$$\varphi_2(t) = e^{\lambda t}(w + tv) = e^{\lambda t}(w + t(A-\lambda I)w) = e^{\lambda t}(I + t(A - \lambda I))w$$
gilt
$$\varphi_2'(t) = \lambda e^{\lambda t}(I + t(A-\lambda I))w + e^{\lambda t}(A - \lambda I)w = e^{\lambda t}(A + \lambda t(A - \lambda I))w,$$
und damit
$$\begin{aligned}
\varphi_2'(t) = A\varphi_2(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{\lambda t}(A + \lambda t(A-\lambda I))w = e^{\lambda t}A(I + t(A-\lambda I))w \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad (A + \lambda t(A-\lambda I))w = A(I + t(A-\lambda I))w \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda(A-\lambda I)w = A(A-\lambda I)w \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad (A-\lambda I)(A-\lambda I)w = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (A-\lambda I)^2 w = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad w \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^2).
\end{aligned}$$
Da $w \in \operatorname{Kern}((A-\lambda I)^2)$ vorausgesetzt war, löst also auch $\varphi_2(t)$ die Differentialgleichung. Wären $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ linear abhängig, so gäbe es eine (konstante) Zahl c mit $\varphi_2(t) = c\varphi_1(t)$, also $e^{\lambda t}(w + tv) = ce^{\lambda t}v$. Für $t = 0$ würde sich $w = cv$ ergeben, und damit $w = cv \in \operatorname{Kern}(A - \lambda I)$, ein Widerspruch. Also sind φ_1, φ_2 linear unabhängig.

(3) Wir überprüfen, ob $\Phi(t)$ die Differentialgleichung löst:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t}(I + t(A-\lambda I)) + e^{\lambda t}(A-\lambda I) = e^{\lambda t}A(I + t(A-\lambda I)) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda I + \lambda t(A-\lambda I) + (A-\lambda I) = A + tA(A-\lambda I) \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda t(A-\lambda I) = tA(A-\lambda I) \quad \Longleftrightarrow \quad (A-\lambda I)(A-\lambda I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
&\Longleftrightarrow \quad (A-\lambda I)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Im Fall $n = 2$ ist $\chi_A(t) = (t-\lambda)^2$, sodass nach dem Satz von Cayley-Hamilton $(A-\lambda I)^2 = 0$ gilt. Damit erfüllt $\Phi(t)$ die Differentialgleichung. Nun ist

$$\Phi(0) = I,$$

sodass $\Phi(t)$ Hauptfundamentalmatrix ist. ■

Bemerkung: Ist λ ein Eigenwert von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit algebraischer Vielfachheit 2, so hat der sogenannte „Hauptraum“ $\mathrm{Kern}((A-\lambda I)^2)$ Dimension 2. Der Eigenraum $\mathrm{Kern}(A-\lambda I)$ hat mindestens Dimension 1 und trivialerweise gilt

$$\mathrm{Kern}(A-\lambda I) \subseteq \mathrm{Kern}((A-\lambda I)^2),$$

sodass $\dim \mathrm{Kern}(A-\lambda I)$ - die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts - nur die Werte 1 oder 2 annehmen kann.

Beispiel: Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$x' = Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A hat das charakteristische Polynom

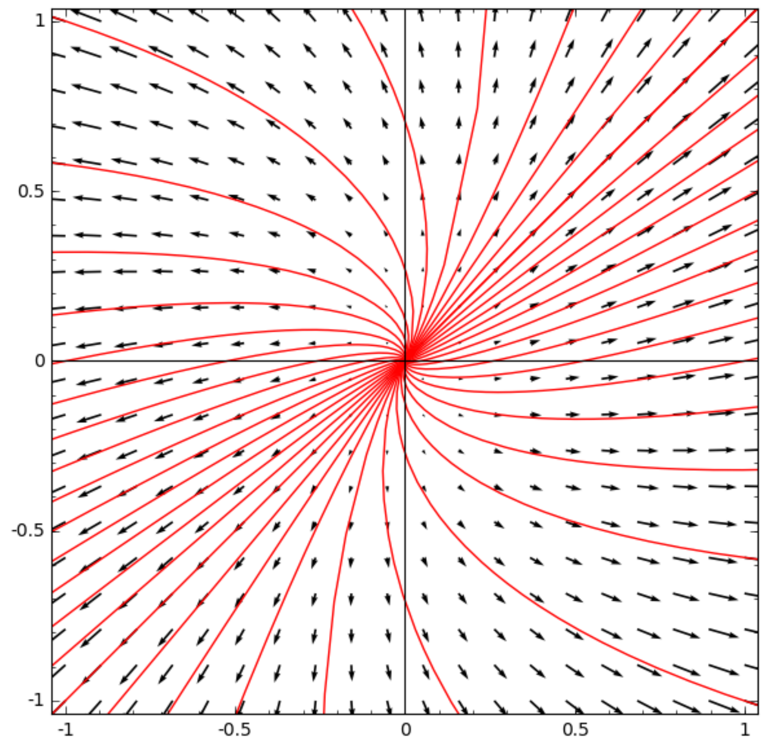
$$\chi_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -1 \\ 1 & 3-t \end{vmatrix} = (5-t)(3-t) + 1 = 15 - 8t + t^2 + 1 = t^2 - 8t + 16 = (t-4)^2,$$

also den (einzigen) Eigenwert $\lambda = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Da wir im Fall $n = 2$ sind, können wir sofort eine Fundamentalmatrix mit Hilfe des vorangegangenen Satzes angeben:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= e^{\lambda t}(I + t(A-\lambda I)) = \\
&= e^{4t}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5-4 & -1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix}\right) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\varphi(t) = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{4t}\begin{pmatrix} c_1(1+t) - c_2 t \\ c_1 t + c_2(1-t) \end{pmatrix}.$$



Wir fassen nochmals zusammen:

Vorgehensweise zur Bestimmung eines Lösungsfundamentalsystems für ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten $x' = Ax$:

(1) Bestimme das charakteristische Polynom $\chi_A(t) = \det(A - tI)$ der Matrix A.

(2) Bestimme die (reellen und komplexen) Eigenwerte von A, also die Nullstellen λ von $\chi_A(x)$ zusammen mit der algebraischen Vielfachheit.

(3) Für jeden Eigenwert λ führe man folgendes Verfahren durch, wenn möglich:

   (a) **Falls λ ein reeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 ist:** Bestimme einen zugehörigen Eigenvektor v. Dann ist

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} v$$

   eine Lösung des Differentialgleichungssystems.

   (b) **Falls λ ein komplexer, nichtreeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 ist:** Dann ist auch die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert. Bestimme einen komplexen Eigenvektor v zu λ. Dann lösen

$$\varphi_1(t) = \mathrm{Re}\,(e^{\lambda t} v) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \mathrm{Im}\,(e^{\lambda t} v)$$

   das Differentialgleichungssystem. (Der Eigenwert $\overline{\lambda}$ muss nicht mehr betrachtet werden, da er nichts Neues liefert.)

   (c) **Falls λ ein reeller Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1 ist:** Bestimme einen zugehörigen Eigenvektor v und einen Vektor w mit

$$(A - \lambda I)w = v.$$

   (Man kann auch $w \in \mathrm{Kern}((A - \lambda I)^2) \setminus \mathrm{Kern}(A - \lambda I)$ wählen und dann $v = (A - \lambda I)w$ setzen.) Dann lösen

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} v \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda t}(w + tv)$$

   das Differentialgleichungssystem.

(4) Kommen nur Eigenwerte vor, die sich in die Fälle (a), (b), (c) einordnen, so bilden die gefundenen Funktionen ein Lösungsfundamentalsystem.

Bemerkung: Mit der angegebenen Vorgehensweise kommt man in der Praxis meist zum Ziel. Im Folgenden zeigen wir noch einen eleganten Weg, der allerdings zunächst nicht gleich auf explizite Lösungen führt.

3. Die Matrix-Exponentialfunktion

In Dimension 1 sieht man sofort, dass für $a \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $x' = ax$ durch die Funktion $e^{at} = \exp(at)$ gelöst wird. Wir werden sehen, dass in Dimension n für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die homogene lineare Differentialgleichung $x' = Ax$ durch die Funktion

$$e^{tA} = \exp(tA)$$

gelöst wird, die wir aber erst noch definieren müssen.

3.1. Konvergenz in $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{m\times n}$. Hier stellen wir zunächst einige wichtige Aussagen zur Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}^n$ und $\mathbb{C}^{m\times n}$ zusammen.

Eine Folge $(a_\ell)_{\ell\geq 0}$ von Elementen aus $\mathbb{C}^n$ wird gegeben durch n Folgen $(a_{\ell,j})_{\ell\geq 0}$ komplexer Zahlen:

$$a_\ell = \begin{pmatrix} a_{\ell,1} \\ a_{\ell,2} \\ \vdots \\ a_{\ell,n} \end{pmatrix}, \quad \ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Die Folge $(a_\ell)_{\ell\geq 0}$ konvergiert gegen

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

wenn für die Folgen komplexer Zahlen $(a_{\ell,j})_{\ell\geq 0}$ konvergieren, d.h. wenn gilt

$$\lim_{\ell\to\infty} a_{\ell,j} = a_j \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Wir erinnern an die euklidische Norm auf $\mathbb{C}^n$:

$$\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \text{mit} \quad \|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

Die Norm hat folgende Eigenschaften (für $a, b \in \mathbb{C}^n$):

(1) $\|a\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(2) $\|a\| = 0 \iff a = 0$.
(3) $\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.
(4) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ (Dreiecksungleichung).

Mit Hilfe der Norm lässt sich nun die Konvergenz einer Folge $(a_\ell)_{\ell\geq 0}$ mit $a_\ell \in \mathbb{C}^n$ wie folgt charakterisieren:

$$(a_\ell)_{\ell\geq 0} \text{ konvergiert gegen } a \iff \lim_{\ell\to\infty} \|a_\ell - a\| = 0$$

Das **Cauchy-Kriterium** für die Konvergenz von Folgen aus $\mathbb{C}$ überträgt sich auf die Konvergenz von Folgen in $\mathbb{C}^n$: Eine Folge $(a_\ell)_{\ell\geq 0}$ mit $a_\ell \in \mathbb{C}^n$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ existiert, sodass gilt:

$$\ell, \ell' \geq \ell_\varepsilon \implies \|a_\ell - a_{\ell'}\| < \varepsilon.$$

($\mathbb{C}^n$ ist also ein vollständiger normierter Raum.)

Eine **Reihe** $\sum_{k\geq 0} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{C}^n$ konvergiert, wenn die Folge ihrer Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^{\ell} a_k\right)_{\ell\geq 0}$ konvergiert. In diesem Fall setzt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} a_k.$$

Die Menge der Matrizen

$$\mathbb{C}^{m\times n} = \{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{jk} \in \mathbb{C}\}$$

können wir mit einem $\mathbb{C}^{mn}$ identifizieren und daher obige Begriffsbildungen auf $\mathbb{C}^{m\times n}$ übertragen. Wir wiederholen dies kurz: Eine Folge von Matrizen $(A_\ell)_{\ell\geq 0}$ mit $A_\ell = (a_{\ell,jk})$ konvergiert gegen eine Matrix $A = (a_{jk})$, wenn gilt $\lim_{\ell\to\infty} a_{\ell,jk} = a_{jk}$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ und $k \in \{1, \dots, n\}$.

Beispiel: Für eine reelle (oder komplexe) Zahlen x wird definiert

$$e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Wir betrachten jetzt für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$$

die durch

$$S_\ell = \sum_{j=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + \dots + \frac{1}{\ell!}A^\ell$$

definierte Folge $(S_\ell)_{\ell\geq 0}$ von Matrizen in $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Wir erhalten

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 7 \\ \frac{21}{2} & 16 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} \frac{35}{3} & 16 \\ 24 & \frac{107}{3} \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} \frac{479}{24} & \frac{337}{12} \\ \frac{337}{8} & \frac{745}{12} \end{pmatrix}, \quad \dots,$$

und numerisch

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 2.00 & 2.00 \\ 3.00 & 5.00 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 5.50 & 7.00 \\ 10.50 & 16.00 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 11.67 & 16.00 \\ 24.00 & 35.67 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 19.96 & 28.08 \\ 42.12 & 62.08 \end{pmatrix}, \quad S_5 = \begin{pmatrix} 28.87 & 41.07 \\ 61.60 & 90.47 \end{pmatrix}, \quad S_6 = \begin{pmatrix} 36.84 & 52.69 \\ 79.04 & 115.88 \end{pmatrix}, \quad S_7 = \begin{pmatrix} 42.96 & 61.61 \\ 92.42 & 135.38 \end{pmatrix},$$

$$S_8 = \begin{pmatrix} 47.08 & 67.60 \\ 101.41 & 148.48 \end{pmatrix}, \quad S_9 = \begin{pmatrix} 49.53 & 71.18 \\ 106.77 & 156.30 \end{pmatrix}, \quad S_{10} = \begin{pmatrix} 50.85 & 73.10 \\ 109.65 & 160.50 \end{pmatrix}, \quad S_{11} = \begin{pmatrix} 51.49 & 74.04 \\ 111.06 & 162.55 \end{pmatrix},$$

$$S_{12} = \begin{pmatrix} 51.78 & 74.46 \\ 111.69 & 163.47 \end{pmatrix}, \quad S_{13} = \begin{pmatrix} 51.90 & 74.63 \\ 111.95 & 163.85 \end{pmatrix}, \quad S_{14} = \begin{pmatrix} 51.94 & 74.70 \\ 112.05 & 164.00 \end{pmatrix}, \quad S_{15} = \begin{pmatrix} 51.96 & 74.72 \\ 112.09 & 164.05 \end{pmatrix},$$

$$S_{16} = \begin{pmatrix} 51.97 & 74.73 \\ 112.10 & 164.07 \end{pmatrix}, \quad S_{17} = \begin{pmatrix} 51.97 & 74.74 \\ 112.10 & 164.07 \end{pmatrix}, \quad S_{18} = \begin{pmatrix} 51.97 & 74.74 \\ 112.10 & 164.07 \end{pmatrix}, \quad S_{19} = \begin{pmatrix} 51.97 & 74.74 \\ 112.10 & 164.07 \end{pmatrix},$$

Dies schaut nach Konvergenz aus. Wir werden das Beispiel später noch genauer betrachten.

Die oben definierte Norm wird für $A = (a_{jk})$ durch

$$\|A\| = \|\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2}$$

definiert. Die Norm wird auch als Frobenius-Norm bezeichnet. Sie hat folgende Eigenschaften ($A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$):

(1) $\|A\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
(2) $\|A\| = 0 \iff A = 0$.
(3) $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.
(4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Dreiecksungleichung).

Darüber hinaus besitzt die Norm noch folgende Eigenschaft ($A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$):

(4) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$ (Submultiplikativität).

(Ein Beweis für die Submultiplikativität folgt weiter hinten.) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $v \in \mathbb{C}^n$ wird die letzte Eigenschaft zu $\|Av\| \le \|A\|\|v\|$.

Wir formulieren nun die Konvergenz einer Matrizenfolge $(A_\ell)_{\ell\ge 0}$ mit $A_\ell \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gegen $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ mit der Norm:

$$\lim_{\ell\to\infty} A_\ell = A \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{\ell\to\infty} \|A_\ell - A\| = 0.$$

Das Cauchy-Kriterium lautet: $(A_\ell)_{\ell\ge 0}$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass gilt:

$$\ell, \ell' \ge \ell_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \|A_\ell - A_{\ell'}\| < \varepsilon.$$

3.2. Die Matrix-Exponentialfunktion $\exp(A)$.

Lemma. *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\ell \in \mathbb{N}_0$ sei*

$$S_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}A^k = I + A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{6}A^3 + \cdots + \frac{1}{\ell!}A^\ell.$$

Dann gilt: Die Folge $(S_\ell)_{\ell\ge 0}$ konvergiert nach dem Cauchy-Kriterum, d.h. es existiert der Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}A^k.$$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $e^{\|A\|} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$ gibt es ein $\ell_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, sodass gilt

$$\ell \ge \ell_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad |e^{\|A\|} - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}\|A\|^k| < \varepsilon.$$

Seien $\ell, \ell' \ge \ell_\varepsilon$ und o.E. $\ell' \ge \ell$. Dann gilt (mit den Rechenregeln für die Norm):

$$\begin{aligned}
\|S_{\ell'} - S_\ell\| &= \|\sum_{k=0}^{\ell'} \frac{1}{k!}A^k - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}A^k\| = \|\sum_{k=\ell+1}^{\ell'} \frac{1}{k!}A^k\| \le \\
&\le \sum_{k=\ell+1}^{\ell'} \|\frac{1}{k!}A^k\| = \sum_{k=\ell+1}^{\ell'} \frac{1}{k!}\|A^k\| \le \sum_{k=\ell+1}^{\ell'} \frac{1}{k!}\|A\|^k = \sum_{k=0}^{\ell'} \frac{1}{k!}\|A\|^k - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k}\|A\|^k \le \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\|A\|^k - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}\|A\|^k = e^{\|A\|} - \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}\|A\|^k < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher folgt die Konvergenz von $(S_\ell)_{\ell\ge 0}$ mit dem Cauchy-Kriterium. ■

Das vorangegangene Lemma rechtfertigt folgende Definition:

Definition. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ wird die* **Matrix-Exponentialfunktion** $\exp(A)$ *durch*

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k = \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}A^k$$

definiert, wobei $A^0 = I$ sei.

Bemerkung: Bezeichnet kurz 0 die $n \times n$-Null-Matrix, so gilt

$$e^0 = I.$$

Beispiele:

(1) Für
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$
gilt
$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix},$$
woraus sofort
$$e^A = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}$$
folgt.

(2) Für
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
gilt $A^2 = 0$ und $B^2 = 0$, woraus sofort
$$e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
folgt. Nun gilt
$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e^B \cdot e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Man sieht hier, dass $e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A$ gilt.

Das erste Beispiel verallgemeinert sich sofort wie folgt:

SATZ. *Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und ist*
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
die zugehörige Diagonalmatrix, so ist
$$\exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$
Insbesondere gilt für $\lambda \in \mathbb{C}$ und die $n \times n$-Einheitsmatrix I:
$$\exp(\lambda I) = e^{\lambda} I.$$

Beweis: Für $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & & \\ & \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\lambda_2^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{k=0}^{\ell} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix},$$
woraus schnell die Behauptung folgt. ■

3.3. Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $t \mapsto \exp(tA)$. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{C}^n$ wird beschrieben durch

$$f(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) + ib_1(t) \\ a_2(t) + ib_2(t) \\ \vdots \\ a_n(t) + ib_n(t) \end{pmatrix},$$

also durch $2n$ reellwertige Funktionen

$$a_k : I \to \mathbb{R}, \quad b_k : I \to \mathbb{R} \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n.$$

f ist stetig in $t_0 \in I$, wenn alle a_k und alle b_k stetig in t_0 sind. f ist differenzierbar in $t_0 \in I$, wenn alle a_k und alle b_k differenzierbar in t_0 sind. Für die Ableitung gilt:

$$f'(t_0) = \begin{pmatrix} a_1'(t) + ib_1'(t) \\ a_2'(t) + ib_2'(t) \\ \vdots \\ a_n'(t) + ib_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Entsprechend wird die Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Abbildung

$$f : I \to \mathbb{C}^{m\times n}$$

definiert.

Wir erinnern an folgende Produktregel, die wir schon zuvor angewendet haben:

Lemma. *Sei I ein offenes Intervall und $A : I \to \mathbb{C}^{m\times n}$ differenzierbar in $t_0 \in I$ und $B : I \to \mathbb{C}^{n\times p}$ differenzierbar in $t_0 \in I$. Dann ist auch $AB : I \to \mathbb{C}^{m\times p}$ (mit $t \mapsto A(t)B(t)$) differenzierbar in t_0 und es gilt*

$$\frac{d(AB)}{dt}(t_0) = \frac{dA}{dt}(t_0)B(t_0) + A(t_0)\frac{dB}{dt}(t_0).$$

Beweis: Wir schreiben

$$A(t) = (a_{ij}(t)), \quad B(t) = (b_{jk}(t)), \quad A(t)B(t) = (c_{ik}(t)).$$

Dann gilt

$$c_{ik}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)b_{jk}(t).$$

Die Produktregel für das Differenzieren liefert

$$\frac{dc_{ik}}{dt}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{da_{ij}}{dt}(t_0)b_{jk}(t_0) + a_{ij}(t_0)\frac{db_{jk}}{dt}(t_0) \right),$$

was genau die oben angegebene Formel liefert. ■

Für die Differentialgleichung ist folgende Aussage wichtig:

Satz. *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist die Funktion*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n\times n}, \quad t \mapsto e^{tA}$$

differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A.$$

Beweis: Es ist

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k.$$

Sei

$$A^k = (a_{k,ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}.$$

Dann ist

$$e^{tA} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k,ij}}{k!} t^k \right)_{i,j}.$$

Für jedes Indexpaar (i,j) ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k,ij}}{k!} t^k$$

eine überall konvergente Potenzreihe, also gliedweise differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k,ij}}{k!} t^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,ij}}{k!} \cdot k \cdot t^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,ij}}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \cdot a_{k+1,ij}.$$

Dies ist aber genau der Eintrag (i,j) der Matrix

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1}.$$

Daher ist auch e^{tA} differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} = A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k \cdot A = \\ &= A \cdot e^{tA} = e^{tA} \cdot A. \end{aligned}$$

Dies war zu zeigen. ■

FOLGERUNG. *Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist e^A eine invertierbare Matrix und es gilt*

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}.$$

Beweis: Wir betrachten die Matrix-wertige Funktion

$$f(t) = e^{tA} \cdot e^{-tA},$$

die differenzierbar ist. Wir berechnen die Ableitung:

$$f'(t) = Ae^{tA} \cdot e^{-tA} + e^{tA} \cdot (-A) e^{-tA} = Ae^{tA} \cdot e^{-tA} - Ae^{tA} \cdot e^{-tA} = 0.$$

Also ist $f(t)$ konstant. Aus $f(0) = I$ folgt dann

$$e^{tA} \cdot e^{-tA} = I \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

insbesondere die Behauptung. ■

SATZ. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Für die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x' = Ax$$

ist e^{tA} die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A \cdot e^{tA},$$

der Invertierbarkeit von e^{tA} und $e^{0 \cdot I} = I$. ■

Wir geben sofort eine Anwendung:

Satz. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\Phi(t)$ eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung*

$$x' = Ax,$$

so gilt

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1}.$$

Beweis: Wir wissen, dass $\Phi(t)\Phi(0)^{-1}$ die Hauptfundamentalmatrix ist. Für die Hauptfundamentalmatrix haben wir im letzten Satz die Darstellung e^{tA} gefunden. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung: Der Satz besagt, dass die Berechnung von e^{tA} ungefähr gleichwertig mit der Berechnung einer Fundamentalmatrix $\Phi(t)$ der Differentialgleichung $x' = Ax$ ist.

Beispiele:

(1) Wir haben gesehen, dass wir

$$x' = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

die Hauptfundementalmatrix in $t = 0$ ist. Daher folgt sofort

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} = e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

(2) Wir betrachten für $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + \beta^2 = (\lambda - i\beta)(\lambda + i\beta).$$

Wir suchen einen Eigenvektor:

$$\text{Kern}(A - i\beta I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -i\beta & \beta \\ -\beta & -i\beta \end{pmatrix} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Als Lösung der Differentialgleichung $x' = Ax$ erhalten wir

$$\varphi(t) = e^{i\beta t} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) + i\cos(\beta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) \\ -\sin(\beta t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(\beta t) \\ \cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

also die Fundamentalmatrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\Phi(0) = I$ ist $\Phi(t)$ die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$, also

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}.$$

Wir haben zuvor ein Beispiel gesehen, in dem $e^A \cdot e^B \neq e^B \cdot e^A$ galt. Eine wichtige Ausnahme behandelt folgender Satz:

Satz. *Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ vertauschbare Matrizen, d.h. $AB = BA$. Dann gilt*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A.$$

Beweis:

- Aus $AB = BA$ folgt $A^2B = AAB = ABA = BAA = BA^2$ und durch Induktion $A^kB = BA^k$ für alle $k \geq 0$. Daher gilt
$$\left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k\right) B = B \left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!} A^k\right) \text{ für alle } \ell \geq 0.$$
Für $\ell \to \infty$ folgt
$$e^A \cdot B = B \cdot e^A.$$
- Wir betrachten nun die Funktion
$$\Phi(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$
und differenzieren sie:
$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= (A+B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} = \\ &= (A+B)e^{t(A+B)} - AetAe^{tB} - Be^{tA}e^{tB} = \\ &= (A+B)\left(e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}\right) = (A+B)\Phi(t). \end{aligned}$$
Also löst $\Phi(t)$ die Differentialgleichung $x' = (A+B)x$. Da $e^{t(A+B)}$ eine Fundamentalmatrix für diese Differentialgleichung ist, gibt es eine konstante Matrix C mit
$$\Phi(t) = e^{t(A+B)}C.$$
Für $t = 0$ erhalten wir
$$C = e^{0(A+B)}C = \Phi(0) = e^{0(A+B)} - e^{0A}e^{0B} = 0,$$
und damit $\Phi(t) = 0$, was zu
$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB},$$
und für $t = 1$ zur Behauptung führt. ∎

Eine wichtige Anwendung zeigt folgendes allgemeine Beispiel:

Beispiel: Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so ist $A = \alpha I$ natürlich mit B vertauschbar. Daher folgt
$$\exp(\alpha I + B) = \exp(\alpha I)\exp(B) = e^{\alpha}\exp(B).$$

Beispiel: Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ wollen wir
$$\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$
berechnen. Wir haben zuvor schon gesehen, dass
$$\exp\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$
gilt. Damit erhalten wir
$$\begin{aligned} \exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} &= \exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = e^{\alpha}\begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$
Der folgende Satz liefert eine Berechnungsmöglichkeit von e^{tA}, die ohne Eigenvektorberechnungen auskommt, falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nur einen (komplexen) Eigenwert hat.

SATZ. *Für das charakteristische Polynom $\chi_A(t)$ der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gelte*
$$\chi_A(t) = \pm(t-\lambda)^n,$$
d.h. λ ist einziger Eigenwert von A. (Dann ist die algebraische Vielfachheit n.) Dann gilt:
$$e^{tA} = e^{\lambda t}\left(I + t(A-\lambda I) + \frac{1}{2}t^2(A-\lambda I)^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}(A-\lambda I)^{n-1}\right).$$

Beweis: A ist nach Cayley-Hamilton Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. es gilt

$$(A-\lambda I)^n = 0.$$

Daher gilt nach Definition

$$e^{t(A-\lambda I)} = I + \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k!} t^k (A-\lambda I)^k = I + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k (A-\lambda I)^k.$$

Da die Matrizen $\lambda t I$ und $t(A-\lambda I)$ offensichtlich vertauschbar sind, folgt

$$e^{tA} = e^{\lambda t I + t(A-\lambda I} = e^{\lambda t I} e^{t(A-\lambda I)} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} t^k (A-\lambda I)^k,$$

also die Behauptung. ■

Beispiel: Wir betrachten

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = (t-2)^3$$

Daher gilt

$$e^{tA} = e^{2t} \left(I + t(A-2I) + \frac{1}{2} t^2 (A-2I)^2 \right) = e^{2t} \begin{pmatrix} -3t+1 & 2t & -t \\ -6t & 4t+1 & -2t \\ -3t & 2t & -t+1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Berechnung von $\exp(A)$ und $\exp(tA)$ mit Hilfe der Jordanschen Normalform. Im Folgenden wollen wir einen Weg aufzeigen, wie man für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $t \in \mathbb{C}$ die Matrizen $\exp(A)$ und $\exp(tA)$ systematisch berechnen kann. Kann man eine der früheren Methoden anwenden, geht dies aber vermutlich einfacher und schneller.

Wir erinnern zunächst an folgende Aussage: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ und ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \text{so gilt} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Diese Aussage verallgemeinert sich wie folgt:

Satz. *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ zerlegt in quadratische Matrizen:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{pmatrix},$$

so ist

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & & \\ & \exp(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \exp(A_m) \end{pmatrix}.$$

Beweis: Die angegebene Blockstruktur bleibt bei Multiplikation erhalten, woraus dann die Behauptung folgt. ■

Der folgende Typ von Matrizen taucht bei der Jordanschen Normalform auf:

Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und N die $n \times n$-Matrix*

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

(Ist e_j der j-te Einheitsvektor, so gilt $Ne_1 = 0$, $Ne_j = e_{j-1}$ für $2 \le j \le n$.) Dann gilt für $t \in \mathbb{C}$

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & & & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 & & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \\ & & & & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ & & & & & 1 & t \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis: Bei N stehen die Einsen in der ersten oberen Nebendiagonalen, bei N^2 in der zweiten oberen Nebendiagonalen, etc. Schließlich gilt $N^n = 0$, d.h. N ist eine nilpotente Matrix. Wegen

$$\exp(tN) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(tN)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(tN)^k = I + tN + \frac{1}{2}t^2N + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}N^{n-1}$$

folgt die Behauptung. ■

Satz. *Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt*

$$\exp(TAT^{-1}) = T\exp(A)T^{-1}.$$

Beweis: Wir müssen die Partialsummen

$$S_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}(TAT^{-1})^k$$

betrachten. Nun gilt

$$(TAT^{-1})^2 = TAT^{-1}TAT^{-1} = TA^2T^{-1}, \quad (TAT^{-1})^3 = TAT^{-1}TAT^{-1}TAT^{-1} = TA^3T^{-1}, \quad \ldots$$

Durch Induktion erhält man leicht

$$(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}.$$

Daher folgt

$$S_\ell = \sum_{k=0}^{\ell} \frac{1}{k!}TA^kT^{-1} = T\left(\sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}A^k\right)T^{-1}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|T\exp(A)T^{-1} - S_\ell\| &= \|T\exp(A)T^{-1} - T(\sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}A^k)T^{-1}\| = \\ &= \|T\cdot(\exp(A) - \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}A^k)\cdot T^{-1}\| \le \\ &\le \|T\|\cdot\|\exp(A) - \sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}A^k\|\cdot\|T^{-1}\|. \end{aligned}$$

Aus $\exp(A) = \lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}A^k$ folgt dann sofort

$$T\exp(A)T^{-1} = \lim_{\ell\to\infty} S_\ell = \lim_{\ell\to\infty}\sum_{k=0}^{\ell}\frac{1}{k!}(TAT^{-1})^k = \exp(TAT^{-1})$$

und damit die Behauptung. ■

Mit folgendem Satz kann man in vielen Fällen $\exp(A)$ und $\exp(tA)$ berechnen:

SATZ. *Die Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Sei v_j ein Eigenvektor zu λ_j und*

$$T = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{pmatrix}$$

die $n \times n$-Matrix, die entsteht, wenn man die Eigenvektoren spaltenweise in eine Matrix schreibt. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{C}$

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} T^{-1} \quad \textit{und} \quad \exp(tA) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} AT &= A\begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 & \ldots & Av_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1 & \ldots & \lambda_n v_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

was die erste Behauptung liefert. Die zweite Behauptung folgt mit dem vorangegangenen Satz:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= \exp(T \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} T^{-1}) = T \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{pmatrix} T^{-1} = \\ &= T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} T^{-1}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Beispiel: Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $x^2 - 5x - 2$, die Eigenwerte

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2};.$$

zugehörige Eigenvektoren sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3+\sqrt{33} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}.$$

Wir wählen also

$$T = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3+\sqrt{33} & 3-\sqrt{33} \end{pmatrix}$$

und haben dann

$$A = T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} &= \exp(T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1}) = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{pmatrix} T^{-1} = \ldots \\ &\approx \begin{pmatrix} 51.96895625 & 74.73656463 \\ 112.1048471 & 164.0738032 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ein ähnliches Ergebnis hatten wir zuvor durch Untersuchung der Partialsummen erhalten.

Beispiel: Wir hatten schon früher die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

betrachtet und

$$\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(B)\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnet. Andererseits gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} T^{-1} \text{ mit } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{2}T.$$

$$\exp(A+B) = T \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{pmatrix} T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) & \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) \\ \frac{1}{2}(e - \frac{1}{e}) & \frac{1}{2}(e + \frac{1}{e}) \end{pmatrix}.$$

Also gilt hier offensichtlich $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$.

Die folgenden Matrizentypen tauchen bei der Jordanschen Normalform auf:

Satz. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J_m(\lambda)$ folgende $m \times m$-Matrix*

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Dann gilt für $t \in \mathbb{C}$

$$\exp(tJ_m(\lambda)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & \dots & \frac{1}{(m-3)!}t^{m-3}e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Beweis: Es ist mit der zuvor betrachteten nilpotenten Matrix N_m

$$J_m(\lambda) = \lambda I + N_m \quad \text{und} \quad tJ_m(\lambda) = \lambda t I + tN_m.$$

Da die Matrizen $\lambda t I$ und tN_m (trivialerweise) kommutieren, können wir die Formel $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ anwenden und erhalten:

$$\exp(tJ_m(\lambda) = \exp(\lambda t I + tN_m) = \exp(\lambda t I)\exp(tN_m) = e^{\lambda t} I \exp(tN_m) = e^{\lambda t}\exp(tN_m).$$

Mit der zuvor gezeigten Beziehung

$$\exp(tN_m) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \dots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{1}{(m-3)!}t^{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

folgt dann die Behauptung. ■

Wir können jetzt $\exp(tA)$ berechnen, wenn wir die Jordansche Normalform von A bestimmen können:

Berechnung von $\exp(tA)$ mit Hilfe der Jordanschen Normalform:

(1) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C})$. Man bestimmt die Jordansche Normalform von A und eine zugehörige Transformationsmatrix T, sodass gilt

$$A = T \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} T^{-1},$$

wobei $J_{m_i}(\lambda_i)$ ein Jordan-Block ist:

$$J_{m_i}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

(2) Dann gilt

$$\exp(tA) = T \begin{pmatrix} \exp(tJ_{m_1}(\lambda_1)) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(tJ_{m_k}(\lambda_k)) \end{pmatrix} T^{-1}$$

mit

$$\exp(tJ_{m_i}(\lambda_i)) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{1}{(m_i-1)!} t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \dots & \frac{1}{(m_i-2)!} t^{m_i-2} e^{\lambda_i t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda_i t} & \dots & \frac{1}{(m_i-3)!} t^{m_i-3} e^{\lambda_i t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

Beispiel: Zu Beginn hatten wir ein Differentialgleichungssystem

$$x' = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} x$$

betrachtet (mit $k_1 > 0$ und $k_2 > 0$). Im Fall $k_1 \neq k_2$ haben wir eine Lösung hergeleitet. Nun wollen wir noch den Fall $k_1 = k_2 = k > 0$ untersuchen, also

$$x' = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} x.$$

Sei also

$$A = \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(t) = t(t+k)^2,$$

die Matrix A hat also den zweifachen Eigenwert $-k$ und den Eigenwert 0.

- Wir betrachten den Eigenwert $-k$. Es ist

$$A + kI = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & k & k \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A+kI)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k^2 & k^2 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Da $A + kI$ Rang 2 hat, ist der Eigenraum 1-dimensional. Wir wählen $w_1 \in \mathrm{Kern}((A+kI)^2) \setminus \mathrm{Kern}(A+kI)$, nämlich

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$v_1 = (A + kI)w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$Av = -kv \quad \text{und} \quad Aw = -kw + v.$$

- Wir betrachten den Eigenwert 0. Es ist

$$\operatorname{Kern}(A - 0I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -k & 0 & 0 \\ k & -k & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenvektor wählen wir

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt für

$$T = (v_1|w_1|v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k & -1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AT = A(v_1|w_1|v_2) = (Av_1|Aw_1|Av_2) = (-kv_1| -kw_1 + v_1|0v_2) = (v_1|w_1|v_2) \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$A = T \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \exp(tA) &= T \exp \begin{pmatrix} -tk & t & 0 \\ 0 & -tk & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} e^{-kt} & te^{-kt} & 0 \\ 0 & e^{-kt} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = \cdots = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-kt} & 0 & 0 \\ kte^{-kt} & e^{-kt} & 0 \\ 1 - (1+kt)e^{-kt} & 1 - e^{-kt} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.5. $x' = A(t)x$ **und die Matrixexponentialfunktion.** Im 1-dimensionalen Fall haben wir Folgendes gesehen: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, ist $a : I \to \mathbb{R}$ stetig und $A(t)$ eine Stammfunktion von $a(t)$, d.h. $A'(t) = a(t)$, so ist

$$e^{A(t)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$x' = a(t)x.$$

Dieses Ergebnis lässt sich nicht ohne Weiteres auf den n-dimensionalen Fall übertragen, wie an Beispielen zu sehen ist. Allerdings gilt folgender Satz:

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Ist*

$$B : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$$

eine differenzierbare Funktion, sodass gilt

$$B'(t) = A(t) \quad \text{und} \quad A(t)B(t) = B(t)A(t) \quad \text{für alle } t \in I,$$

so ist

$$\exp(B(t))$$

eine Fundamentalmatrix der Differentialgleichung $x' = A(t)x$.

Bemerkung: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine „konstante“ Matrix, wählt man $B(t) = tA$, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und es folgt (nochmals), dass e^{tA} eine Fundamentalmatrix für die Differentialgleichung $x' = Ax$ ist.

Anhang: Die Submultiplikativität der Frobenius-Norm

Lemma (Submultiplikativität der Norm). *Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ gilt*

$$\|AB\| \le \|A\|\|B\|.$$

Beweis: Wir schreiben

$$A = (a_{jk})_{\substack{j=1,\dots,m,\\ k=1,\dots,n}} \quad B = (b_{kl})_{\substack{k=1,\dots,n,\\ l=1,\dots,p}} \quad AB = (c_{jl})_{\substack{j=1,\dots,m\\ l=1,\dots,p}} \quad \text{mit} \quad c_{jl} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kl}.$$

Dann ist

$$\|A\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2, \quad \|B\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} |b_{kl}|^2, \quad \|AB\|^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} |c_{jl}|^2.$$

Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung besagt, dass für $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \le \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)\left(y_1^2 + \cdots + y_n^2\right),$$

oder mit Summenzeichen geschrieben

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_ky_k\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right).$$

Setzen wir $x_k = |a_{jk}|$ für $k = 1, \dots, n$ und $y_k = |b_{kl}|$ für $k = 1, \dots, n$, so erhalten wir

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}||b_{kl}|\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kl}|^2\right).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} |c_{jl}|^2 &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kl}\right|^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}||b_{kl}|\right)^2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} |b_{kl}|^2\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k'=1}^{n} |b_{k'l}|^2\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} |a_{jk}|^2\cdot|b_{k'l}|^2, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p} |c_{jl}|^2 \le \sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\sum_{k'=1}^{n} |a_{jk}|^2\cdot|b_{k'l}|^2 = \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2\right)\cdot\left(\sum_{k'=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} |b_{kl}|^2\right) = \\ &= \|A\|^2\cdot\|B\|^2, \end{aligned}$$

also $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$, was zu zeigen war. ∎