KAPITEL 10

Der Satz von Riemann-Roch

Sei im Folgenden C eine nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive Kurve, die über einem vollkommenen Körper K definiert ist.

Definition. *Für zwei Divisoren $D_1 = \sum m_P[P]$ und $D_2 = \sum n_P[P]$ auf C definiert man:*

$$D_1 \geq D_2 \quad \Longleftrightarrow \quad m_P \geq n_P \text{ für alle } P \in C.$$

Ein Divisor $D = \sum n_P[P] \in \mathrm{Div}(C)$ heißt **effektiv**, *falls $D \geq 0$ gilt, d.h. $n_P \geq 0$ für alle $P \in C$.*

Bemerkung: Für $D_1, D_2 \in \mathrm{Div}(C)$ gilt die Implikation

$$D_1 \geq D_2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{grad}(D_1) \geq \mathrm{grad}(D_2).$$

Beispiel: Wie kann man ausdrücken, dass eine Funktion $f \in \overline{K}(C)^*$ höchstens in P_0 eine Polstelle hat, und zwar höchstens von der Ordnung n?
Die Bedingungen lauten: $\mathrm{ord}_{P_0}(f) \geq -n$ und $\mathrm{ord}_P(f) \geq 0$ für alle $P \neq P_0$. Dies ist offensichtlich gleichwertig mit $\mathrm{div}(f) = \sum \mathrm{ord}_P(f)P \geq -n[P_0]$, was man auch in der Form

$$\mathrm{div}(f) + n[P_0] \geq 0$$

schreiben kann.

Definition. *Für $D \in \mathrm{Div}(C)$ sei*

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \overline{K}(C)^* : \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}.$$

Bemerkung: Sei $D = m_1[P_1] + \cdots + m_r[P_r] - n_1[Q_1] - \cdots - n_s[Q_s]$ mit paarweise verschiedenen Punkten $P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_s$ und $m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s \in \mathbb{N}$. Für $f \in \overline{K}(C)^*$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}(D) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}(f) + D \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}(f) + m_1[P_1] + \cdots + m_r[P_r] - n_1[Q_1] - \cdots - n_s[Q_s] \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{div}(f) \geq -m_1[P_1] - \cdots - m_r[P_r] + n_1[Q_1] + \cdots + n_s[Q_s] \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{ord}_{P_i}(f) \geq -m_i \text{ für } i = 1, \ldots, r, \quad \mathrm{ord}_{Q_j}(f) \geq n_j \text{ für } j = 1, \ldots, s \\ &\qquad\;\; \text{und } \mathrm{ord}_P(f) \geq 0 \text{ für } P \in C \setminus \{P_1, \ldots, P_r, Q_1, \ldots, Q_s\}. \end{aligned}$$

Zu $\mathcal{L}(D)$ gehören also die Funktionen, die in den Punkten P_i höchstens einen Pol der Ordnung m_i und in den Punkten Q_j mindestens eine Nullstelle der Ordnung n_j haben und in allen anderen Punkten definiert sind.

Beispiel: Was ist $\mathcal{L}(0)$, wo 0 hier den Nulldivisor bezeichnet? Ist $f \in \mathcal{L}(0) \setminus \{0\}$, so gilt $\mathrm{div}(f) \geq 0$, also hat f keine Polstellen. Dann muss aber f schon konstant sein. Damit haben wir

$$\mathcal{L}(0) = \overline{K}.$$

Lemma. *$\mathcal{L}(D)$ ist ein $\overline{K}$-Vektorraum.*

Datei: algku10.tex. Version vom 18.7.2021

Beweis: Sei $D = \sum n_P[P]$, $f, g \in \mathcal{L}(D)$ und $c \in \overline{K}$. Wir wollen zeigen, dass gilt

$$f + g \in \mathcal{L}(D) \quad \text{und} \quad cf \in \mathcal{L}(D).$$

O.E. können wir uns auf den Fall $f \neq 0$, $g \neq 0$, $f+g \neq 0$, $c \neq 0$ beschränken. Dann gilt $\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g) \geq -n_P$ und damit

$$\operatorname{ord}_P(f+g) \geq \min(\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g)) \geq -n \text{ und } \operatorname{ord}_P(cf) = \operatorname{ord}_P(f) \geq -n,$$

also $f + g \in \mathcal{L}(D)$ und $cf \in \mathcal{L}(D)$. ■

Definition. *Wir setzen $\ell(D) = \dim_{\overline{K}} \mathcal{L}(D)$.*

Eine fundamentale Aufgabe ist die Bestimmung von $\mathcal{L}(D)$ und die von $\ell(D)$.

Beispiel: Im Fall $\mathbb{P}^1$ haben wir die Vektorräume $\mathcal{L}(D)$ bereits bestimmt. Zur Wiederholung betrachten wir $D = n[\infty]$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist

$$\mathcal{L}(n \cdot [\infty)]) = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n : a_0, \ldots, a_n \in \overline{K}\}.$$

$\mathcal{L}(n[\infty])$ ist also der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Eine Basis ist $1, x, x^2, \ldots, x^n$, sodass insbesondere

$$\ell(n \cdot [\infty]) = n + 1 = \operatorname{grad}(n \cdot [\infty]) + 1$$

gilt.

Satz. *Seien D und D' Divisoren auf C. Dann gilt:*

(1) *Ist $\operatorname{grad}(D) < 0$, so ist $\mathcal{L}(D) = 0$ und $\ell(D) = 0$.*
(2) *Sind D und D' linear äquivalent, so gilt $\mathcal{L}(D) \simeq \mathcal{L}(D')$ und insbesondere $\ell(D) = \ell(D')$. Genauer: Ist $D' = D + \operatorname{div}(f)$, so gilt $\mathcal{L}(D') = \frac{1}{f}\mathcal{L}(D)$.*
(3) *Ist $D \leq D'$, so $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D')$ und $\ell(D) \leq \ell(D')$.*
(4) *Sei $P \in C$ und $D \in \operatorname{Div}(C)$. Gilt $\mathcal{L}(D) \subsetneq \mathcal{L}(D + [P])$ und ist $f \in \mathcal{L}(D + [P]) \setminus \mathcal{L}(D)$, so gilt bereits $\mathcal{L}(D + [P]) = \mathcal{L}(D) + \overline{K}f$.*
(5) *Ist $P \in C$, so gilt $\ell(D) \leq \ell(D + [P]) \leq \ell(D) + 1$.*
(6) *Für $\operatorname{grad}(D) \geq 0$ gilt $\ell(D) \leq \operatorname{grad}(D) + 1$.*

Beweis:

(1) Wäre $\mathcal{L}(D) \neq 0$, so gäbe es ein $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$. Dann wäre $D + \operatorname{div}(f) \geq 0$, also würde

$$\operatorname{grad}(D) = \operatorname{grad}(D) + \operatorname{grad}(\operatorname{div}(f)) = \operatorname{grad}(D + \operatorname{div}(f)) \geq 0$$

folgen, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

(2) Sei $D' = D + \operatorname{div}(f)$. Dann gilt für $g \in \overline{K}(C)^*$:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{L}(D') \quad &\iff \quad D' + \operatorname{div}(g) \geq 0 \quad \iff \quad D + \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g) \geq 0 \quad \iff \\ &\iff \quad D + \operatorname{div}(fg) \geq 0 \quad \iff \quad fg \in \mathcal{L}(D) \quad \iff \quad g \in \frac{1}{f}\mathcal{L}(D), \end{aligned}$$

also $\mathcal{L}(D') = \frac{1}{f}\mathcal{L}(D)$, woraus die Behauptung folgt.

(3) Sei $D \leq D'$ und $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$. Dann gilt $D' + \operatorname{div}(f) \geq D + \operatorname{div}(f) \geq 0$, also $f \in \mathcal{L}(D')$. D.h. $\mathcal{L}(D) \subseteq \mathcal{L}(D')$.

(4) Wir nehmen an, es existiert eine Funktion f mit $f \in \mathcal{L}(D + [P]) \setminus \mathcal{L}(D)$. Sei $D = n[P] + \ldots$, d.h. n ist die Multiplizität von D in P. Sei t uniformisierend in P. Dann ist $\operatorname{ord}_P(f) \geq -(n+1)$, aber $\operatorname{ord}_P(f) \not\geq -n$, und daher $\operatorname{ord}_P(f) = -(n+1)$. Dann ist $\operatorname{ord}_P(ft^{n+1}) = 0$, also $(ft^{n+1})(P) \neq 0$. Ist jetzt $g \in \mathcal{L}(D + [P])$, so gilt $\operatorname{ord}_P(gt^{n+1}) \geq 0$, also gibt es eine Konstante c mit $(gt^{n+1})(P) = c(ft^{n+1})(P)$, was $\operatorname{ord}_P(gt^{n+1} - cft^{n+1}) \geq 1$ und somit $\operatorname{ord}_P(g - cf) \geq -n$ liefert. Also gilt $g - cf \in \mathcal{L}(D)$ und damit $g \in \mathcal{L}(D) + \overline{K}f$ wie behauptet.

(5) Dies folgt sofort aus der letzten Aussage.

(6) Wir können $\mathrm{grad}(D) \geq 0$ und $\mathcal{L}(D) \neq 0$ voraussetzen. Dann gibt es ein f mit $D + \mathrm{div}(f) \geq 0$. Also ist $D' = D + \mathrm{div}(f)$ effektiv und $\ell(D') = \ell(D)$. Wir können uns also auf effektive Divisoren beschränken: $D' = [P_1] + \cdots + [P_n]$. Mit Hilfe der letzten Aussage ergibt sich

$$\ell([P_1] + \cdots + [P_n]) \leq \ell([P_1] + \cdots + [P_{n-1}]) + 1 \leq \cdots \leq \ell(0) + n = n + 1,$$

was zu zeigen war. ■

Beispiel: Wir betrachten $C = \mathbb{P}^1$ und einen Divisor

$$D = \sum_{\alpha \in \overline{K}} n_\alpha [\alpha] + n_\infty [\infty] \quad \text{mit} \quad \mathrm{grad}(D) \geq 0,$$

wobei natürlich $\{\alpha \in \overline{K} : n_\alpha \neq 0\}$ endlich sein soll. Für die Funktion

$$f = \prod_{\alpha \in \overline{K}} (x - \alpha)^{n_\alpha}$$

gilt dann

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\alpha \in \overline{K}} n_\alpha [\alpha] - (\sum_{\alpha \in \overline{K}} n_\alpha)[\infty].$$

Mit der zweiten Formel des vorangegangenen Satzes folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(D) &= \mathcal{L}(\mathrm{div}(f) + ((\sum_{\alpha \in \overline{K}} n_\alpha) + n_\infty)[\infty]) = \mathcal{L}(\mathrm{div}(f) + \mathrm{grad}(D)[\infty]) = \\
&= \frac{1}{f} \mathcal{L}(\mathrm{grad}(D)[\infty]) = \\
&= \frac{1}{f} \left(\overline{K} + \overline{K}x + \overline{K}x^2 + \cdots + \overline{K}x^{\mathrm{grad}(D)} \right).
\end{aligned}$$

Also ist

$$\frac{1}{f}, \quad \frac{x}{f}, \quad \frac{x^2}{f}, \quad \ldots \quad \frac{x^{\mathrm{grad}(D)}}{f}$$

eine Basis von $\mathcal{L}(D)$, und insbesondere $\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1$.
Ohne Beweis geben wir jetzt folgenden fundamentalen Satz an:

Satz (Riemann-Roch). *Ist C eine Kurve vom Geschlecht g und K_C ein kanonischer Divisor, so gilt für alle Divisoren $D \in \mathrm{Div}(C)$:*

$$\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 - g + \ell(K_C - D).$$

Beispiel: Im Fall $C = \mathbb{P}^1$ war $g = 0$ und $K_C = \mathrm{div}(dx) = -2[\infty]$ ein kanonischer Divisor. Der Satz von Riemann-Roch besagt dann

$$\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 + \ell(-2[\infty] - D).$$

Ist $\mathrm{grad}(D) \geq 0$, so ist $\mathrm{grad}(-2[\infty] - D) < 0$, also $\ell(-2[\infty] - D) = 0$, was zu

$$\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 \text{ für } \mathrm{grad}(D) \geq 0$$

führt. Diese Aussage haben wir bereits zuvor erhalten, wobei wir außerdem eine Basis für $\mathcal{L}(D)$ bestimmt haben.

Bemerkung: Wir wissen bereits, dass gilt

$$\mathcal{L}(0) = \overline{K}, \quad \text{und damit} \quad \ell(0) = 1.$$

Setzen wir dies in Riemann-Roch ($\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 - g + \ell(K_C - D)$) ein, so erhalten wir

$$1 = \ell(0) = \mathrm{grad}(0) + 1 - g + \ell(K_C - 0) = 1 - g + \ell(K_C),$$

und damit

$$\ell(K_C) = g.$$

Insbesondere bedeutet dies, dass das Geschlecht g eine ganze Zahl ≥ 0 ist.
Setzen wir jetzt $D = K_C$ in Riemann-Roch ein, so erhalten wir

$$g = \ell(K_C) = \operatorname{grad}(K_C) + 1 - g + \ell(K_C - K_C) = \operatorname{grad}(K_C) + 1 - g + 1,$$

also

$$\operatorname{grad}(K_C) = 2g - 2.$$

Über diese Formel hatten wir zuvor das Geschlecht einer Kurve definiert. Wir fassen nochmals zusammen:

Folgerung.

$$\ell(K_C) = g \quad \textit{und} \quad \operatorname{grad}(K_C) = 2g - 2.$$

Bemerkung: Sei $K_C = \operatorname{div}(\omega)$ mit einer Differentialform ω. Dann gilt für $f \in \overline{K}(C), f \neq 0$:

$$f \in \mathcal{L}(K_C) \iff \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega) \geq 0 \iff \operatorname{div}(f\omega) \geq 0,$$

also

$$\mathcal{L}(K_C) \simeq \{\text{holomorphe Differentialformen auf } C\}.$$

Man deutet daher $\mathcal{L}(K_C)$ oft auch als $\overline{K}$-Vektorraum der holomorphen Differentialformen auf C.

Der Satz von Riemann-Roch

$$\ell(D) = \operatorname{grad}(D) + 1 - g + \ell(K_C - D)$$

berechnet zunächst nicht $\ell(D)$ in Abhängigkeit von $\operatorname{grad}(D)$, denn ein Korrekturterm $\ell(K_C - D)$ ist erforderlich. Gilt aber $\operatorname{grad}(K_C - D) < 0$, d.h. $\operatorname{grad}(D) > 2g - 2$, so ist $\ell(K_C - D) = 0$ und Riemann-Roch ergibt $\ell(D) = \operatorname{grad}(D) + 1 - g$. Damit haben wir gezeigt:

Folgerung. *Für einen Divisor $D \in \operatorname{Div}(C)$ gilt*

$$\operatorname{grad}(D) > 2g - 2 \quad \Rightarrow \quad \ell(D) = \operatorname{grad}(D) + 1 - g.$$

Beispiele:

$g = 0$	$\operatorname{grad}(D) \geq -1$	$\Longrightarrow$	$\ell(D) = \operatorname{grad}(D) + 1$
$g = 1$	$\operatorname{grad}(D) \geq 1$	$\Longrightarrow$	$\ell(D) = \operatorname{grad}(D)$
$g = 2$	$\operatorname{grad}(D) \geq 3$	$\Longrightarrow$	$\ell(D) = \operatorname{grad}(D) - 1$
$g = 3$	$\operatorname{grad}(D) \geq 5$	$\Longrightarrow$	$\ell(D) = \operatorname{grad}(D) - 2$

Beispiel: Sei $P \in C$. Für alle $n \geq 2g - 1$ gilt $\ell(n[P]) = n + 1 - g$, d.h. es gibt Funktionen, die nur in P eine Polstelle haben.

Beispiel: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ definiert durch die affine Gleichung $y^2 = (x - e_1)(x - e_2)(x - e_3)$ mit drei verschiedenen Zahlen $e_1, e_2, e_3 \in \overline{K}$ (in Charakteristik $\neq 2$). Die Kurve C hat genau einen Punkt im Unendlichen, nämlich $\infty = (0 : 0 : 1)$. Es gilt

$$\operatorname{ord}_\infty(x) = -2, \quad \operatorname{ord}_\infty(y) = -3.$$

Wir haben $K_C = \operatorname{div}(\frac{dx}{y}) = 0$ berechnet, sodass C Geschlecht $g = 1$ hat.
Was ist $\mathcal{L}(n[\infty])$ für $n \geq 1$? Riemann-Roch liefert

$$\ell(n[\infty]) = \operatorname{grad}(n[\infty]) + 1 - g + \ell(K_C - n[\infty]) = n + \ell(-n[\infty]) = n.$$

Da die Funktionen x und y außerhalb von ∞ definiert sind, da wir $\operatorname{ord}_\infty(x) = -2$ und $\operatorname{ord}_\infty(y) = -3$ wissen, können wir leicht die Räume $\mathcal{L}(n[\infty])$ gut beschreiben. (y^2 kann dabei als Linearkombination von $1, x, x^2, x^3$ dargestellt werden.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}([\infty]) &= \overline{K} \\
\mathcal{L}(2[\infty]) &= \overline{K} + \overline{K}x \\
\mathcal{L}(3[\infty]) &= \overline{K} + \overline{K}x + \overline{K}y \\
\mathcal{L}(4[\infty]) &= \overline{K} + \overline{K}x + \overline{K}y + \overline{K}x^2 \\
\mathcal{L}(5[\infty]) &= \overline{K} + \overline{K}x + \overline{K}y + \overline{K}x^2 + \overline{K}xy \\
\mathcal{L}(6[\infty]) &= \overline{K} + \overline{K}x + \overline{K}y + \overline{K}x^2 + \overline{K}xy + \overline{K}x^3
\end{aligned}$$

Induktiv sieht man schnell, dass

$$1, x, x^2, , x^2, \dots, x^{[\frac{n}{2}]}, y, xy, x^2y, \dots, x^{[\frac{n-3}{2}]}y$$

eine Basis von $\mathcal{L}(n[\infty])$ ist.

Bemerkung: Es gibt Verfahren, wie man explizit eine Basis von $\mathcal{L}(D)$ bestimmen kann.

Für uns ist folgende Aussage von Bedeutung:

SATZ. *Ist $D \in \mathrm{Div}_K(C)$ ein über K definierter Divisor, so besitzt $\mathcal{L}(D)$ eine Basis aus $K(C)$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen: Jedes Element aus $\mathcal{L}(D)$ ist Linearkombination von Elementen von $\mathcal{L}(D) \cap K(C)$. Sei also $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$. Dann gibt es eine endliche galoissche Körpererweiterung L von K mit $f \in L(C)$. Sei $G = \mathrm{Gal}(L|K) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ (mit $\sigma_1 = \mathrm{id}_L$) und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine K-Basis von L. Wir definieren

$$g_i = \sigma_1(\alpha_i f) + \dots + \sigma_n(\alpha_i f).$$

Da g_i invariant unter G ist, folgt $g_i \in K(C)$. Aus $f \in \mathcal{L}(D)$ folgt $\mathrm{div}(f) + D \geq 0$, und damit wegen $\mathrm{div}(\sigma_i(f)) = \sigma_i(\mathrm{div}(f))$ und $\sigma_i(D) = D$ auch $\mathrm{div}(\sigma_i(f)) + D \geq 0$, also $\sigma_i(f) \in \mathcal{L}(D)$, und damit auch $g_i \in \mathcal{L}(D)$. Insgesamt gilt $g_i \in \mathcal{L}(D) \cap K(C)$. Nun haben wir

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1\alpha_1 & \sigma_2\alpha_1 & \dots & \sigma_n\alpha_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_1\alpha_n & \sigma_2\alpha_n & \dots & \sigma_n\alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 f \\ \dots \\ \sigma_n f \end{pmatrix}.$$

Die Matrix werde mit M bezeichnet. Dann ist $\det(M)^2$ die/eine Diskriminante von L über K, also $\neq 0$. Mithin ist $f = \sigma_1 f$ $\overline{K}$-Linearkombination von $g_1, \dots, g_n$, was wir zeigen wollten. ■

Beispiel: Wir betrachten die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{P}^2$, die affin durch die Gleichung

$$y + ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

mit $a \neq 0$ definiert wird. (Wegen $a \neq 0$ ist die Kurve nichtsingulär - in jeder Charakteristik.) Der Grad ist 2, also hat Q Geschlecht 0. Wir haben den K-rationalen Punkt $P = (0, 0)$ und wollen $\mathcal{L}([P])$ bestimmen. Nach Riemann-Roch ist $\ell([P]) = 2$. Natürlich ist $\overline{K} \subseteq \mathcal{L}([P])$.
Im Endlichen: Im Funktionenkörper gilt $ax^2 = -y(1 + bx + cy)$. Wir betrachten folgende Funktion f und geben verschiedene Darstellungen an:

$$f = \frac{x}{y} = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1 + bx + cy}{x}.$$

f hat höchstens für $x = y = 0$ eine Polstelle, also in P. Andererseits ist x uniformisierend in P, also sieht man aus der zweiten Darstellung $\mathrm{ord}_P(f) = -1$.
Im Unendlichen: Wir haben projektiv $x_0x_2 + ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$, also im Unendlichen die Punkte mit $x_0 = 0$ und $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = 0$. Für sie gilt $x_2 \neq 0$. Wir führen also affine Koordinaten r, s mit $(r : s : 1) = (x_0 : x_1 : x_2) = (1 : x : y) = (\frac{1}{y} : \frac{x}{y} : 1)$ ein. Also ist $f = s$, insbesondere hat f keine Polstelle im Unendlichen.
Also hat f genau eine Polstelle, nämlich in P, woraus sofort

$$\mathcal{L}([P]) = \overline{K} + \overline{K}\frac{x}{y}$$

folgt. Wir behandeln den Spezialfall

$$y + 2x^2 + 3xy + 4y^2 = 0 \quad \text{über} \quad \mathbb{F}_{11}$$

mit SAGE:

```
Proj.<x0,x1,x2>=ProjectiveSpace(GF(11),2)
f=x0*x2+2*x1^2+3*x1*x2+4*x2^2
C=Curve(f,Proj)
P=C.point([1,0,0])
D=C.divisor([(1,P)])
L=C.riemann_roch_basis(D)
```

SAGE liefert als Basis von $\mathcal{L}(D)$

$$1, \quad \frac{3x_0 + x_2}{x_1},$$

während wir zuvor $\mathcal{L}([P]) = \overline{K} + \overline{K}\,\frac{x_1}{x_2}$ erhalten haben. Tatsächlich überprüft man, dass gilt

$$\frac{3x_0 + x_2}{x_1} = 2 + 5 \cdot \frac{x_1}{x_2},$$

sodass die Ergebnisse übereinstimmen. (Mir ist nicht klar, ob man mit SAGE im Funktionenkörper rechnen kann.)

LEMMA. *Ist D ein Divisor vom Grad d und $d \geq g_C$, so gibt es Punkte $P_1, \ldots, P_d \in C$ mit $D \sim [P_1] + \cdots + [P_d]$. D.h. Divisoren mit einem Grad $\geq g_C$ sind linear äquivalent zu effektiven Divisoren. (Die Punkt $P_1, \ldots, P_d$ müssen nicht paarweise verschieden sein.)*

Beweis: Mit Riemann-Roch gilt

$$\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 - g_C + \ell(K_C - D) \geq d + 1 - g_C \geq 1,$$

also gibt es ein $f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$. Es folgt $D + \mathrm{div}(f) \geq 0$. Schreibt man $D + \mathrm{div}(f) = [P_1] + \cdots + [P_d]$, so folgt die Behauptung. ■

LEMMA. *Sei $P_0 \in C$ fest gewählt. Dann ist*

$$\phi : C^g \to \mathrm{Pic}^0(C), \quad (P_1, \ldots, P_g) \mapsto \textit{Klasse von } [P_1] + \cdots + [P_g] - g[P_0]$$

surjektiv. (C^g meint hier einfach das g-fache mengentheoretische Produkt von C.)

Beweis: D_0 sei ein Divisor vom Grad 0, der eine Klasse in $\mathrm{Pic}^0(C)$ repräsentiert. Zu $D_0 + g[P_0]$ existieren nach dem letzten Lemma Punkte $P_1, \ldots, P_g$ mit $D_0 + g[P_0] \sim [P_1] + \cdots + [P_g]$, was $D_0 \sim [P_1] + \cdots + [P_g] - g[P_0]$ und damit die Behauptung zeigt. ■

Konstruktion von rationalen Abbildungen: Sei D ein Divisor auf C mit $\ell(D) \geq 2$. Sei $f_0, \ldots, f_r$ eine $\overline{K}$-Basis von $\mathcal{L}(D)$. Dann definieren wir $\phi_D : C \to \mathbb{P}^r$ durch

$$\phi_D = (f_0 : \cdots : f_r).$$

(Wählt man eine andere Basis von $\mathcal{L}(D)$, so bedeutet dies einen Basiswechsel in $\mathbb{P}^r$.)
Gilt $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D - [P])$ für einen Punkt P, so können wir $D - [P]$ statt D betrachten. Wir setzen also voraus

$$\mathcal{L}(D - [P]) \neq \mathcal{L}(D), \text{ d.h. } \ell(D - [P]) = \ell(D) - 1$$

für alle Punkte P. (Man nennt ein solches D basispunktfrei.)
Sei $P \in C$ und t_P uniformisierend in P. Sei n_P die Multiplizität des Divisors D in P, also $D = n_P[P] + \ldots$. Dann ist $\mathrm{ord}_P(f_i t_P^{n_P}) \geq 0$ und $= 0$ für mindestens einen Index i und

$$\phi_D(P) = ((f_0 t_P^{n_P})(P) : \cdots : (f_r t_P^{n_P})(P)).$$

Wir untersuchen, wann ϕ_D injektiv ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\phi_D(P) \neq \phi_D(Q) \quad &\iff \quad \text{es gibt eine Hyperebene } H = \{a_0 x_0 + \cdots + a_r x_r = 0\} \text{ mit } \phi_D(P) \in H, \phi_D(Q) \notin H \\
&\iff \quad \text{es gibt } a_0, \ldots, a_r \text{ nicht alle 0 mit } \left(\sum a_i f_i t_P^{n_P}\right)(P) = 0, \left(\sum a_i f_i t_Q^{n_Q}\right)(Q) \neq 0 \\
&\iff \quad \text{es gibt } a_0, \ldots, a_r \text{ nicht alle 0 mit } \sum a_i f_i \in \mathcal{L}(D - [P]), \sum a_i f_i \notin \mathcal{L}(D - [P] - [Q]) \\
&\iff \quad \mathcal{L}(D - [P] - [Q]) \neq \mathcal{L}(D - [P]) \\
&\iff \quad \ell(D - [P] - [Q]) = \ell(D - [P]) - 1 = \ell(D) - 2
\end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass die letzte Bedingung sogar die Bedingung dafür ist, dass ϕ_D eine Einbettung ist. (Etwas ausführlicher wird dies bei [**Hulek**, S.161-162] behandelt, genauer bei [**Hartshorne**, S.307-308].)

Satz. *Genau dann ist ϕ_D eine Einbettung, d.h. $\phi_D(C)$ ist isomorph zu C, wenn für alle $P, Q \in C$ gilt:*

$$\ell(D - [P] - [Q]) = \ell(D) - 2.$$

In diesem Fall ist $\mathrm{grad}(D)$ *der Grad von $\phi_D(C)$ in $\mathbb{P}^r$ mit $r = \ell(D) - 1$. Man nennt einen solchen Divisor D dann auch* **sehr ampel**.

Noch eine Bemerkung zum Grad von $\phi_D(C)$: Ist $D = n_1[P_1] + \cdots + n_r[P_r]$, so kann man nach Koordinatenwechsel $\mathrm{ord}_{P_i}(f_0) = -n_i$ annehmen. Damit hat f_0 dann $n_1 + \cdots + n_r = \mathrm{grad}(D)$ Polstellen, also ebensoviele Nullstellen. Die Nullstellen liefern den Schnitt von $\phi_D(C)$ mit der Hyperebene $x_0 = 0$, woraus sich die Behauptung ergibt.

Satz. *Gilt* $\mathrm{grad}(D) \geq 2g + 1$, *so ist D sehr ampel, d.h. ϕ_D liefert eine Einbettung $C \simeq \phi_D(C) \subseteq \mathbb{P}^r$.*

Beweis: Seien $P, Q \in C$ beliebige Punkte. Wegen $\mathrm{grad}(K_C) = 2g - 2$ gilt

$$\mathrm{grad}(D) \geq 2g + 1 > \mathrm{grad}(K_C) \quad \text{und} \quad \mathrm{grad}(D - [P] - [Q]) \geq 2g - 1 > \mathrm{grad}(K_C),$$

also $\mathrm{grad}(K_C - D) < 0$ und $\mathrm{grad}(K_C - (D - [P] - [Q])) < 0$, sodass Riemann-Roch

$$\ell(D) = \mathrm{grad}(D) + 1 - g$$

und

$$\ell(D - [P] - [Q]) = \mathrm{grad}(D - [P] - [Q]) + 1 - g = \mathrm{grad}(D) + 1 - g - 2 = \ell(D) - 2$$

liefert. Mit dem vorangegangenen Satz folgt die Behauptung. ■

Beispiele:

(1) $C = \mathbb{P}^1$: Für $n \geq 1$ hat $\mathcal{L}(n[\infty])$ als Basis $1, x, x^2, \ldots, x^n$. Also ist

$$\phi_{n[\infty]} = (1 : x : \cdots : x^n).$$

Das Bild ist die sogenannte **rationale Normkurve vom Grad** n im $\mathbb{P}^n$:

$$\phi_{n[\infty]}(\mathbb{P}^1) = \{(x_0^n : x_0^{n-1}x_1 : \cdots : x_1^n) : (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$

(2) Die Kurve C mit $y^2 = x^3 - x$ hat Geschlecht 1 und den unendlich fernen Punkt $P = (0 : 0 : 1)$. Es ist $\mathrm{ord}_P(x) = -2$, $\mathrm{ord}_P(y) = -3$. Wie sieht $\phi_{4[P]}$ aus? $\mathcal{L}(4[P])$ hat als Basis $1, x, y, x^2$, also: $\phi_{4[P]} : C \to \mathbb{P}^3$ mit

$$\phi_{4[P]} = (1 : x : y : x^2).$$

Das Bild ist eine Kurve vom Grad 4 in $\mathbb{P}^3$. Verwendet man in $\mathbb{P}^3$ die homogenen Koordinaten z_0, z_1, z_2, z_3, so gelten folgende Gleichungen für das Bild:

$$z_1^2 = x^2 = z_0 z_3, \quad z_2^2 = y^2 = x \cdot x^2 - x = z_1 z_3 - z_1 z_0,$$

nochmals:

$$\phi_{4[P]}(C) \subseteq \{z_1^2 = z_0 z_3, z_2^2 = z_1 z_3 - z_1 z_0\}.$$

Man kann zeigen, dass diese Gleichungen das Bild sogar beschreiben.

(3) Ist C eine Kurve vom Geschlecht 2 und wählt man 5 Punkte $P_1, \ldots, P_5$, so ist $D = [P_1] + \cdots + [P_5]$ wegen $\mathrm{grad}(D) = 5 \geq 2 \cdot 2 + 1$ sehr ampel. Wegen $\mathrm{grad}(D) = 5$ und $\ell(D) = 4$ liefert ϕ_D eine Einbettung von C in $\mathbb{P}^3$ als Kurve vom Grad 5.

Beispiel: Wir betrachten über $\mathbb{F}_7$ die durch

$$f = x_0^3 + 2x_1^3 + 3x_2^3$$

definierte projektive ebene Kurve. C ist nichtsingulär (und absolut irreduzibel), hat als ebene Kubik daher Geschlecht 1. Es gibt 9 Punkte, die über $\mathbb{F}_7$ definiert sind, nämlich

$$(1 : 1 : 3), (1 : 2 : 3), (1 : 4 : 3), (1 : 1 : 5), (1 : 2 : 5), (1 : 4 : 5), (1 : 1 : 6), (1 : 2 : 6), (1 : 4 : 6).$$

Die Hesse-Kurve zu C wird durch $x_0 x_1 x_2 = 0$ definiert. Daraus sieht man, dass C keinen Wendepunkt hat, der über $\mathbb{F}_7$ definiert ist.
Wir betrachten den Punkt $P = (1 : 1 : 6)$ und den Divisor $3[P]$, der wegen $\mathrm{grad}(3[P]) = 3 = 2 \cdot 1 + 1$ sehr ampel ist. Riemann-Roch liefert $\ell(3[P]) = 3$. Wir bestimmen eine Basis von $\mathcal{L}(3[P])$ mit SAGE:

```
Proj.<x0,x1,x2>=ProjectiveSpace(GF(7),2)
f=x0^3+2*x1^3+3*x2^3
C=Curve(f,Proj)
P=C.point([1,1,-1])
D=C.divisor([(3,P)])
f0,f1,f2=C.riemann_roch_basis(D)
```

SAGE liefert als Basis von $\mathcal{L}(3[P])$:

$$\begin{aligned}
f_0 &= \frac{5x_0^3 + x_0^2x_1 + 4x_0x_1^2 + x_1^3 + x_0^2x_2 - x_0x_1x_2 - x_0x_2^2}{2x_0^2x_1 + 3x_0^2x_2 + x_1x_2^2}, \\
f_1 &= \frac{-x_0^3 + x_0^2x_1 + x_0x_1^2 + x_0^2x_2 - x_0x_1x_2 + x_1^2x_2 + 2x_0x_2^2}{2x_0^2x_1 + 3x_0^2x_2 + x_1x_2^2}, \\
f_2 &= 1.
\end{aligned}$$

Wir betrachten die zugehörige Abbildung $\phi = \phi_{3[P]} = (f_0 : f_1 : f_2)$, wobei wir mit dem Nenner durchmultipliziert haben:

$$\begin{aligned}
f_0 &= 5x_0^3 + x_0^2x_1 + x_0^2x_2 + 4x_0x_1^2 - x_0x_1x_2 - x_0x_2^2 + x_1^3, \\
f_1 &= -x_0^3 + x_0^2x_1 + x_0^2x_2 + x_0x_1^2 - x_0x_1x_2 + 2x_0x_2^2 + x_1^2x_2, \\
f_2 &= 2x_0^2x_1 + 3x_0^2x_2 + x_1x_2^2.
\end{aligned}$$

Da der Divisor $3[P]$ sehr ampel vom Grad 3 ist, ist die Bildkurve $\phi(C)$ eine Kurve vom Grad 3, die isomorph zu C ist. Mit SAGE bestimmen wir eine Gleichung $g = 0$ für die Bildkurve, wobei wir bequemlichkeitshalber neue Koordinaten y_0, y_1, y_2 für die Bildkurve verwenden:

```
R.<x0,x1,x2,y0,y1,y2>=PolynomialRing(GF(7),order='lex')
f=x0^3+2*x1^3+3*x2^3
f0=-2*x0^3+x0^2*x1+x0^2*x2-3*x0*x1^2-x0*x1*x2-x0*x2^2+x1^3
f1=-x0^3+x0^2*x1+x0^2*x2+x0*x1^2-x0*x1*x2+2*x0*x2^2+x1^2*x2
f2=2*x0^2*x1+3*x0^2*x2+x1*x2^2
I=R*(f,y0-f0,y1-f1,y2-f2)
g=(I.groebner_basis())[-1]
```

Wir erhalten

$$g = y_0^3 - y_0^2y_1 + 3y_0^2y_2 + 5y_0y_1^2 + 3y_0y_2^2 + y_1^3 - y_1^2y_2 + 5y_1y_2^2 + y_2^3.$$

Wir berechnen die zu $g = 0$ gehörige Hesse-Kurve; sie ist gegeben durch das Polynom.

$$h = 4y_0^3 + 2y_0^2y_2 + 2y_0y_1^2 + 5y_0y_1y_2 + y_1^3 + 4y_1y_2^2 + 2y_2^3.$$

Man findet, dass $\phi(C)$ (natürlich) auch 9 Punkte hat, die über $\mathbb{F}_7$ definiert sind, nämlich

$$(0:1:3), (1:3:0), (1:6:1), (1:5:2), (1:2:3), (1:4:3), (1:6:3), (1:6:5), (1:0:6).$$

Man stellt außerdem fest, dass alle 9 Punkte Wendepunkte sind. (Damit ist C über $\mathbb{F}_7$ isomorph zu $\phi(C)$, aber nicht projektiv äquivalent zu $\phi(C)$.)

Beispiel: Wir betrachten über $\mathbb{F}_7$ die durch

$$f = x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2$$

definierte projektive ebene Quadrik C. Die Kurve ist nichtsingulär und hat daher 8 über $\mathbb{F}_7$ definierte Punkte:

$$(0:1:2), (0:1:5), (1:0:3), (1:0:4), (1:2:2), (1:2:5), (1:5:2), (1:5:5).$$

Wir betrachten den Divisor

$$D = [(1:2:5)] + 2[(1:5:2)]$$

vom Grad 3. Eine Basis des Vektorraums $\mathcal{L}(D)$ berechnen wir mit SAGE:

```
Proj.<x0,x1,x2>=ProjectiveSpace(GF(7),2)
f=x0^2+2*x1^2+3*x2^2
C=Curve(f,Proj)
P1=C.point([1,2,5])
P2=C.point([1,5,2])
D=C.divisor([(1,P1),(2,P2)])
f0,f1,f2,f3=C.riemann_roch_basis(D)
```

Wir erhalten

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{x_0x_1}{3x_0^2+x_0x_1+x_1^2+x_0x_2}, \\ f_1 &= \frac{3x_0^2+x_0x_2}{3x_0^2+x_0x_1+x_1^2+x_0x_2}, \\ f_2 &= \frac{x_1^2}{3x_0^2+x_0x_1+x_1^2+x_0x_2}, \\ f_3 &= \frac{x_1x_2}{3x_0^2+x_0x_1+x_1^2+x_0x_2}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Abbildung in den $\mathbb{P}^3$ ist dann

$$\phi = (f_0 : f_1 : f_2 : f_3) = (x_0x_1 : 3x_0^2 + x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2).$$

Wir bestimmen Gleichungen für das Bild mit Hilfe von Gröbner-Basen: Im Polynomring $\mathbb{F}_7[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2, y_3]$ verwendet man die lexikographische Ordnung und bestimmt eine Gröbner-Basis B des Ideals

$$I = (f, f_0 - y_0, f_1 - y_1, f_2 - y_2, f_3 - y_3).$$

Die Elemente von $B \cap \mathbb{F}_7[y_0, y_1, y_2, y_3]$, die am Schluss der Gröbner-Basis stehen, beschreiben dann $\phi(C)$.

```
R.<x0,x1,x2,y0,y1,y2,y3>=PolynomialRing(GF(7),order='lex')
f=x0^2+2*x1^2+3*x2^2
f0,f1,f2,f3=x0*x1,3*x0^2+x0*x2,x1^2,x1*x2
I=R*(f,f0-y0,f1-y1,f2-y2,f3-y3)
B=I.groebner_basis()
```

Die Gröbner-Basis besteht aus den Polynomen $g_1, \ldots, g_{18}$:

$$\begin{aligned} g_1 &= x_0^2 + 3x_2^2 + 2y_2, \\ g_2 &= x_0x_1 - y_0, \\ g_3 &= x_0x_2 + 5x_2^2 - y_1 + y_2, \\ g_4 &= x_0y_0 + 2x_1y_2 + 3x_2y_3, \\ g_5 &= x_0y_1 - x_1y_0 + 2x_2y_1, \\ g_6 &= x_0y_2 - x_1y_0, \\ g_7 &= x_0y_3 - x_2y_0, \\ g_8 &= x_1^2 - y_2, \\ g_9 &= x_1x_2 - y_3, \\ g_{10} &= x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_0 + 2x_2y_3, \\ g_{11} &= x_1y_3 - x_2y_2, \\ g_{12} &= x_2^2y_0 + 5x_2^2y_3 - y_1y_3 + y_2y_3, \\ g_{13} &= x_2^2y_1 + 2y_1^2 + 3y_1y_2 + 2y_2^2 + 3y_3^2, \\ g_{14} &= x_2^2y_2 - y_3^2, \\ g_{15} &= y_0^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2, \\ g_{16} &= y_0y_1 - y_0y_2 + 2y_1y_3, \\ g_{17} &= y_0y_3 - y_1y_2 + y_2^2 + 5y_3^2, \\ g_{18} &= y_1^2y_2 + 5y_1y_2^2 + 4y_1y_3^2 + y_2^3 + 5y_2y_3^2. \end{aligned}$$

Nur $g_{15}, g_{16}, g_{17}, g_{18}$ sind in $\mathbb{F}_7[y_0, y_1, y_2, y_3]$ und beschreiben daher $\phi(C)$:

$\phi(C) = \{y_0^2+2y_2^2+3y_3^2 = 0,\ y_0y_1-y_0y_2+2y_1y_3 = 0,\ y_0y_3-y_1y_2+y_2^2+5y_3^2 = 0,\ y_1^2y_2+5y_1y_2^2+4y_1y_3^2+y_2^3+5y_2y_3^2 = 0\}$.

Tatsächlich testet man, dass auch $\phi(C)$ genau 8 Punkte über $\mathbb{F}_7$ hat:

$(0:0:1:2), (0:0:1:5), (0:1:0:0), (1:0:0:4), (1:1:5:2), (1:3:5:5), (1:4:2:5), (1:6:2:2)$.