$\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Flüsse

Master-Arbeit

zur Erlangung des Grades

Master of Science (M.Sc.)

im Studiengang Mathematik

am Department Mathematik der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt am 21. November 2018

von **Nora Doll**

Betreuer: Prof. Dr. Hermann Schulz-Baldes

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Department
MATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Fluss zwischen ungerade symmetrischen Fredholm-Operatoren **4**
2.1 Ungerade symmetrische Fredholm-Operatoren 4
2.2 Topologie ungerade symmetrischer Fredholm-Operatoren 9
2.3 Definiton und wesentliche Eigenschaften des $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Flusses 13
2.4 Anwendung auf topologische Isolatoren 20

3 Paritätsfluss **25**
3.1 Paritätsfluss in endlichdimensionalen Hilberträumen 26
3.2 Paritätsfluss in unendlichdimensionalen Hilberträumen 31
3.3 Paritätsfluss für zeitumkehrinvariante Operatoren 37
3.4 Anwendungsbeispiel 39

4 Zusammenfassung **42**

Literatur **44**

Lebenslauf **45**

1 Einleitung

Es sind mindestens die drei folgenden $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Flüsse bekannt:

(i) Für Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha$ selbstadjungierter Fredholm-Operatoren mit ungerade symmetrischen Endpunkten für die $F_{1-\alpha} = (IU)^*(F_\alpha)^t(IU)$ für einen ungerade symmetrischen, unitären Operator U gilt, wobei I die Symmetrie bezeichnet.

(ii) Für Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha$ reeller, schiefsymmetrischer Fredholm-Operatoren für die die Dimension der Kerne von T_0 und T_1 höchstens 1 ist.

(iii) Für Wege zeitumkehrinvarianter, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren mit invertierbaren Endpunkten.

Gegenstand dieser Masterarbeit sind die unter (i) und (iii) genannten $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Flüsse.
Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}$, das heißt, $\mathcal{C}$ ist eine antilineare Involution auf $\mathcal{H}$. Die Menge der stetigen, linearen Operatoren auf $\mathcal{H}$ wird mit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bezeichnet, die der unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ und die der kompakten Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt reell, falls $\overline{A} := \mathcal{C}A\mathcal{C} = A$ gilt.
Sei $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein reeller, unitärer Operator für den $I^2 = -1_\mathcal{H}$ gilt, wobei $1_\mathcal{H}$ die Identität auf $\mathcal{H}$ bezeichnet. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ungerade symmetrisch, falls $I^*T^tI = T$ gilt. In den Abschnitten 2.1 und 2.2 werden wesentliche Eigenschaften ungerade symmetrischer Operatoren dargelegt. Insbesondere wird für einen ungerade symmetrischen Fredholm-Operator T durch $\mathrm{Ind}_2(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T))$ modulo 2, ein lokal konstanter, $\mathbb{Z}_2$-wertiger Index definiert.
In Abschnitt 2.3 wird der unter (i) genannte spektrale Fluss untersucht. Es werden Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha$ selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}$ betrachtet, für die F_0 ungerade symmetrisch ist, $F_0 - F_\alpha$ für alle $\alpha \in [0,1]$ kompakt ist und ein ungerade symmetrischer unitärer Operator $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ existiert, sodass $F_{1-\alpha} = (IU)^*(F_\alpha)^t(IU)$ für alle $\alpha \in [0,1]$ gilt. Für solche Wege ist durch den gewöhnlichen spektralen Fluss entlang des Weges $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha$, modulo 2, ein $\mathbb{Z}_2$-wertiger spektraler Fluss gegeben. Dieser spektrale Fluss hängt lediglich von F_0 und U ab und ist als Abbildung von der Menge $\{(F_0, U) | F_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,\mathrm{Fredholm}, F_0 = F_0^*, I^*(F_0)^tI = F_0, U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}), I^*U^tI = U, [F_0, U] \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}$ nach $\mathbb{Z}_2$ lokal konstant.
Hauptresultat ist der folgende Satz, welcher Theorem 6.1 in [5] entspricht, dort aber nicht vollständig bewiesen wird:
Falls $\mathcal{K}$ ein weiterer Hilbertraum mit komplexer Konjugation ist und $I_\mathcal{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ein reeller, unitärer Operator ist, für den $I^2 = -1_\mathcal{K}$ gilt und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ eine bezüglich $I_\mathcal{K}$ ungerade symmetrische, wesentliche unitäre Kontraktion ist und $U_T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$ ungerade symmetrisch ist und eine reelle Isometrie $\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ existiert, für die gilt $I_\mathcal{K} = \pi^*I\pi$ und $T = \pi^*U_T\pi$, dann ist $\mathrm{Ind}_2(T)$ durch den oben beschriebenen $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Fluss entlang des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto F + \alpha(U_T)^*[F, U_T]$ für $F := 2\pi\pi^* - 1_\mathcal{H}$ gegeben.

In [4] wird der unter (ii) genannte $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss $\mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha)$ für stetige Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha$ reeller, schiefsymmetrischer Fredholm-Operatoren untersucht, für die die Endpunkte invertierbar sind, oder eindimensionale Kerne haben. Für zwei solche Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha$ und $\alpha \in [1,2] \mapsto T_\alpha$, gilt

$$\mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,2] \mapsto T_\alpha) = \mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha) + \mathrm{Sf}_2(\alpha \in [1,2] \mapsto T_\alpha) \qquad \mathrm{mod}\ 2$$

und

$$\mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha) = \mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto T_{1-\alpha}) = \mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto -T_\alpha).$$

Weiter ist dieser $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss invariant unter Homotopien, welche die Endpunkte fest lassen. Falls der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha$ analytisch ist, ist $\mathrm{Sf}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von T_α, die sich im Verlauf des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha$ von unten nach oben durch die 0 bewegen, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2 gegeben. Dieser spektrale Fluss ist nicht Gegenstand der vorliegenden Masterarbeit, aber in Kapitel 3 wird, analog dazu, der unter (iii) aufgeführte $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss, genannt Paritätsfluss für stetige Wege reeller, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren mit invertierbaren Endpunkten untersucht.

Sei dazu $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein reeller, separabler Hilbertraum. Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ heißt chiral, falls

$$JAJ = -A \ \text{ für } \ J = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & -1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \end{pmatrix}$$

gilt. Entlang eines Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ reeller, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren, für den H_0 und H_1 invertierbar sind, wird der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ definiert. Für den Paritätsfluss gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_{1-\alpha}) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto -H_\alpha).$$

Für einen weiteren Weg $\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ reeller, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren, für den H_2 invertierbar ist, gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,2] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) + \mathrm{PF}_2(\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha) \qquad \mathrm{mod}\ 2.$$

Der Paritätsfluss ist invariant unter Homotopien, welche die Endpunkte des Weges fest lassen. Falls H_α für alle $\alpha \in [0,1]$ invertierbar ist, gilt $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = 0$ und falls der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ analytisch ist, ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2, gegeben. In Abschnitt 3.3 wird dieses Konzept auf Wege nicht notwendigerweise reeller, aber zeitumkehrinvarianter, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren mit invertierbaren Endpunkten verallgemeinert. Sei dazu $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}$ und der Chiralitätsoperator $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ durch

$$J = \begin{pmatrix} 1_\mathcal{H} & 0 \\ 0 & -1_\mathcal{H} \end{pmatrix}$$

gegeben. Weiter sei der unitäre, reelle Zeitumkehroperator $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ gegeben, sodass $I^2 = 1_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}}$ und $[I, J] = 0$ gilt. Ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ heißt zeitumkehrinvariant falls $I^*\overline{A}I = A$ gilt, wobei $\overline{A} = (\mathcal{C} \oplus \mathcal{C})A(\mathcal{C} \oplus \mathcal{C})$ den komplex konjugierten Operator bezeichnet. Entlang eines Weges $\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ zeitumkehrinvarianter, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren, für den H_0 und H_1 invertierbar sind, wird ein $\mathbb{Z}_2$-wertiger spektraler Fluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha)$, der wieder Paritätsfluss genannt wird, definiert. Alle oben genannten Eigenschaften des Paritätsflusses für reelle Operatoren gelten auch für den Paritätsfluss für zeitumkehrinvariante Operatoren. Also gilt für die Paritätsflüsse entlang zweier Wege $\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ und $\alpha \in [1, 2] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ zeitumkehrinvarianter, chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren, für die H_0, H_1 und H_2 invertierbar sind

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_{1-\alpha}) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto -H_\alpha)$$

und

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 2] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha) + \mathrm{PF}_2(\alpha \in [1, 2] \mapsto H_\alpha) \mod 2.$$

Der Paritätsfluss ist invariant unter Homotopien, welche die Endpunkte des Weges fest lassen. Falls H_α für alle $\alpha \in [0, 1]$ invertierbar ist, gilt $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha) = 0$ und falls der Weg $\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha$ analytisch ist, ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0, 1] \mapsto H_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2, gegeben.

Für die beiden betrachteten spektralen Flüsse werden Anwendungen auf topologische Isolatoren aufgezeigt.

2 Fluss zwischen ungerade symmetrischen Fredholm-Operatoren

Die beiden folgenden Unterkapitel entsprechen im Wesentlichen Kapitel 1 und 2 in [11]. Abschnitt 2.3 entspricht im Wesentlichen Kapitel 5 und 6 in [5], wobei dort der Beweis von Theorem 6.1, welches Satz 2.17 in dieser Masterarbeit entspricht, unvollständig ist.

2.1 Ungerade symmetrische Fredholm-Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein unendlich-dimensionaler separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}$ und $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein reeller, unitärer Operator, für den $I^2 = -1_{\mathcal{H}}$ gilt.

Definition 2.1. *Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt ungerade symmetrisch, falls $I^*T^tI = T$ gilt. Die Menge der ungerade symmetrischen Operatoren wird mit $\mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$ bezeichnet, die der ungerade symmetrischen Fredholm-Operatoren mit $\mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$.*

Lemma 2.2. *Für I wie oben existiert ein reeller, unitärer Operator $O : \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{H}$, sodass*

$$O^tIO = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist ungerade symmetrisch bezüglich I, genau dann wenn O^tTO ungerade symmetrisch bezüglich O^tIO ist.

Beweis. Für das Spektrum von I gilt $\sigma(I) = \{-i, i\}$. Ist $\psi \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$ ein Eigenvektor von I zum Eigenwert i, dann folgt $I\overline{\psi} = -i\overline{\psi}$ und damit $\mathrm{Ker}(I - i1_{\mathcal{H}}) = \overline{\mathrm{Ker}(I + i1_{\mathcal{H}})}$. Sei $V = (\psi_1, \psi_2, ...)$ eine geordnete Orthonormalbasis von $\mathrm{Ker}(I - i1_{\mathcal{H}})$ dann ist $U : \ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}) \mapsto \mathcal{H}$ definiert durch $U((k_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (l_m)_{m\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} k_n\psi_n \oplus \sum_{m\in\mathbb{N}} l_m\overline{\psi_m}$ unitär. Es gilt $U^*IU = -i\begin{pmatrix} 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \\ 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \end{pmatrix}$. Für $C = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & -i1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & i1_{\ell^2(\mathbb{N})} \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N}))$ gilt

$$C^*\begin{pmatrix} 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \\ 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \end{pmatrix}C = \begin{pmatrix} 0 & -i1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ i1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $O = UC$ gilt $O^*IO = C^*U^*IUC = -i\begin{pmatrix} 0 & -i1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ i1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix}$ und O ist reell. Die letzte Behauptung folgt, weil $I^*T^tI = T$ äquivalent zu $O^tI^*OO^tT^tOO^tIO = O^tTO$ ist. □

Nach Lemma 2.2 gibt es für zwei reelle, unitäre Operatoren $I, \tilde{I} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $\tilde{I}^2 = I^2 = -1_{\mathcal{H}}$ gilt, einen reellen, unitären Operator $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $O^tIO = \tilde{I}$ gilt.

Ein Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist genau dann ungerade symmetrisch, wenn $B = IT$ schiefsymmetrisch ist, also $B = -B^t$ gilt.

Der folgende Satz entspricht Proposition 7 in [11], wobei dort zusätzlich behauptet wird, dass V reell ist. Da der Beweis dort einen Fehler enthält, wird hier die folgende, schwächere Aussage gezeigt.

Satz 2.3. *Sei $N \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein normaler, schiefsymmetrischer Fredholm-Operator, dann existiert ein komplexer Hilbertraum $\mathcal{H}'$ und ein unitärer Operator $V : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ und ein beschränkter Operator M mit trivialem Kern, sodass in einer entsprechenden Zerlegung von $\mathcal{H}'$ gilt*

$$V^t N V = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t .$$

Beweis. Sei zunächst der Kern von N trivial und N damit invertierbar. Es gilt $N^*N = -\overline{N}N = NN^* = -N\overline{N} = \overline{N^*N}$, also ist N^*N reell und

$$N = N_1 + iN_2 \text{ für } N_1 = \frac{1}{2}(N - \overline{N}) \text{ und } N_2 = \frac{1}{2i}(N + \overline{N}).$$

Es gilt $\overline{N_1} = -N_1$ und $\overline{N_2} = -N_2$ und N_1 und N_2 sind selbstadjungiert und kommutieren und sind damit simultan diagonalisierbar. Weiter gilt $\operatorname{Ker}(N_1) \cap \operatorname{Ker}(N_2) = \{0\}$, denn für $\psi \in \operatorname{Ker}(N_1) \cap \operatorname{Ker}(N_2)$ gilt $N\psi = \overline{N}\psi$ und $N\psi = -\overline{N}\psi$, also $\psi \in \operatorname{Ker}(N) = \{0\}$. Da N_1 und N_2 schiefsymmetrisch sind, gilt $\sigma(N_j) = -\sigma(N_j)$ und $\overline{P_j(\Delta)} = P_j(-\Delta)$ für $j = 1, 2$, wobei $P_j(\Delta)$ für $\Delta \subset \mathbb{R}$ die spektrale Projektion von N_j auf Δ bezeichnet. Für $\mathcal{E}_\pm = \operatorname{Ran}(P_1(\mathbb{R}_\pm))$ mit $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ und $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$ und $\mathcal{E}_0 = \operatorname{Ker}(N_1)$ gilt $\overline{\mathcal{E}_+} = \mathcal{E}_-$, $\overline{\mathcal{E}_0} = \mathcal{E}_0$ und $\mathcal{H} = \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_- \oplus \mathcal{E}_0$. Sei $N_{1,+} = N_1|_{\mathcal{E}_+}$. Gemäß Spektralsatz existiert eine Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}_+$ und ein unitärer Operator $u : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \to \mathcal{E}_+$, sodass $u^* N_{1,+} u = M_{1,+}$ gilt, wobei $M_{1,+} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n)$ durch $(M_{1,+}\psi)(x) = x\psi(x)$ für alle $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n)$ gegeben ist. Für $\overline{u} : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \to \mathcal{E}_-$ und $N_{1,-} = N_1|_{\mathcal{E}_-}$ gilt $\overline{u}^* N_{1,+} \overline{u} = -M_{1,+}$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \otimes \mathbb{C}^2 \to \mathcal{E}_+ \oplus \mathcal{E}_-$$

unitär und es gilt

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}^* N_1 \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{1,+} & 0 \\ 0 & -M_{1,+} \end{pmatrix}.$$

Da N_1 und N_2 kommutieren kann u so gewählt werden, dass

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix}^* N_2 \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & \overline{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{2,+} & 0 \\ 0 & -M_{2,+} \end{pmatrix}$$

gilt, wobei $M_{2,+} = uN_2|_{\mathcal{E}_+}u^*$ ein Multiplikationsoperator, aber im Allgemeinen nicht positiv ist. Da $\mathrm{Ker}(N_2|_{\mathcal{E}_0}) = \{0\}$ gilt, lässt sich $\mathcal{E}_0$ zerlegen in $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{0,+} \oplus \mathcal{E}_{0,-}$ für $\mathcal{E}_{0,\pm} = \mathcal{E}_0 \cap \mathrm{Ran}(P_2(\mathbb{R}_\pm))$. Analog zu oben existiert eine Folge von Maßen $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}_+$ und ein unitärer Operator $v : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n) \to \mathcal{E}_{0,+}$, sodass $v^*N_2|_{\mathcal{E}_{0,+}}v = M_{0,+}$, wobei $M_{0,+} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n) \to \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n)$ durch $(M_{0,+}\psi)(x) = x\psi(x)$ für alle $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n)$ gegeben ist. Für $\overline{v} : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n) \to \mathcal{E}_{0,-}$ gilt $\overline{v}^*N_2|_{\mathcal{E}_{0,-}}\overline{v} = -M_{0,+}$, damit gilt

$$\begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & \overline{v} \end{pmatrix}^* N_2 \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & \overline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{0,+} & 0 \\ 0 & -M_{0,+} \end{pmatrix}.$$

Für $\mathcal{H}' := \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n) \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mu_n) \oplus \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \nu_n)$ und $U = u \oplus v \oplus \overline{u} \oplus \overline{v} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ gilt

$$U^*NU = \begin{pmatrix} M_{1,+} + iM_{2,+} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & iM_{0,+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(M_{1,+} + iM_{2,+}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -iM_{0,+} \end{pmatrix}$$

also

$$U^*NU = \begin{pmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & -\tilde{M} \end{pmatrix} \text{ für } \tilde{M} = \begin{pmatrix} M_{1,+} + iM_{2,+} & 0 \\ 0 & iM_{0,+} \end{pmatrix}.$$

Damit gilt für $W = U^tNU = -W^t$

$$W^*W = (U^*NU)(U^*NU) = \begin{pmatrix} |\tilde{M}|^2 & 0 \\ 0 & |\tilde{M}|^2 \end{pmatrix} = \tilde{W}^t\tilde{W} \text{ für } \tilde{W} = \begin{pmatrix} 0 & |\tilde{M}| \\ -|\tilde{M}| & 0 \end{pmatrix}$$

und W ist als Produkt invertierbarer Operatoren invertierbar. Damit sind auch $|\tilde{M}|$ und $\tilde{W}$ invertierbar. Weiter gilt $\tilde{W} = -\tilde{W}^* = -\tilde{W}^t$ und damit folgt für $\tilde{V} = W\tilde{W}^{-1}$, $\tilde{V}\tilde{W} = W = -W^t = -\tilde{W}^t\tilde{V}^t = \tilde{W}\tilde{V}^t$ und $\tilde{V}$ ist als Produkt unitärer Operatoren unitär. Damit folgt $\tilde{V}^{\frac{1}{2}}\tilde{W} = \tilde{W}(\tilde{V}^{\frac{1}{2}})^t$ und daraus $U^tNU = W = \tilde{V}\tilde{W} = \tilde{V}^{\frac{1}{2}}\tilde{V}^{\frac{1}{2}}\tilde{W} = \tilde{V}^{\frac{1}{2}}\tilde{W}(\tilde{V}^{\frac{1}{2}})^t$. Also gilt

$$(\tilde{V}^{-\frac{1}{2}}U^t)N(U(\tilde{V}^{-\frac{1}{2}})^t) = \tilde{W} = \begin{pmatrix} |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

und damit gilt für $V = iU(\tilde{V}^{-\frac{1}{2}})^t$ und $M = |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}}$

$$V^tNV = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^t$$

was die Behauptung für den Fall, dass der Kern von N trivial ist, zeigt.
Da N normal ist, gilt $\mathrm{Ker}(N) = \mathrm{Ker}(N^*)$ und da $N = -N^t$ gilt, folgt $\mathrm{Ker}(N^*) = \overline{\mathrm{Ker}(N)}$, also gilt $\mathrm{Ker}(N) = \overline{\mathrm{Ker}(N)}$. Damit existiert eine reelle Orthonormalbasis $(\psi_1, \psi_2, ...)$ von $\mathrm{Ker}(N)$ und der Operator $O : \mathbb{C}^{\dim(\mathrm{Ker}(N))} \to \mathrm{Ker}(N)$ gegeben durch

$O(\sum_{k=1}^{\dim(\mathrm{Ker}(N))} v_k e_k) = \sum_{k=1}^{\dim(\mathrm{Ker}(N))} v_k \psi_k$, wobei $\{e_1, e_2, ..., e_{\dim(\mathrm{Ker}(N))}\}$ die Standardbasis auf $\mathbb{C}^{\dim(\mathrm{Ker}(N))}$ bezeichnet, ist unitär. Nach Obigem angewandt auf $N|_{\mathrm{Ker}(N)^\perp}$, existiert ein unitärer Operator V' sodass

$$(V')^t N|_{\mathrm{Ker}(N)^\perp} V' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^t$$

gilt. Für $V = V' \oplus O$ folgt damit

$$V^t N V = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t,$$

was zu zeigen war. □

Satz 2.4. *Sei $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ein schiefsymmetrischer Fredholm-Operator. Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}'$ und ein unitärer Operator $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ und ein beschränkter Operator M mit trivialem Kern, sodass in einer entsprechenden Zerlegung von $\mathcal{H}'$ gilt*

$$U^t B U = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t.$$

Beweis. Gemäß Spektralsatz existiert eine Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ und ein unitärer Operator $W : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$, sodass

$$B^* B = W^* D W$$

gilt, wobei $D : \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n) \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$ durch $(D\psi)(x) = x\psi(x)$, für alle $\psi \in \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$, gegeben ist. Da B schiefsymmetrisch ist, gilt $B^* = -\overline{B}$ und damit

$$BB^* = \overline{W^* D W} = W^t D \overline{W}.$$

Für $N = \overline{W} B W^*$ gilt $N^t = -\overline{W} B W^* = -N$ sowie $N^* N = -W\overline{B} W^t \overline{W} B W^* = W B^* B W^* = D$ und $NN^* = -\overline{W} B W^* W \overline{B} W^t = \overline{W} B B^* W^t = D$. Damit ist N ein schiefsymmetrischer, normaler Fredholm-Operator und nach Satz 2.3 existiert ein unitärer Operator $V : \mathcal{H}' \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$, sodass

$$V^t N V = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

gilt. Für $U = W^* V$ folgt damit die Behauptung. □

Satz 2.5. *Für einen Fredholm-Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ gilt $T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$ genau dann, wenn ein Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existiert, sodass $T = I^* A^t I A$ gilt. Wenn T invertierbar ist kann A invertierbar gewählt werden. Wenn T unitär ist kann A unitär gewählt werden.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist I^*A^tIA offensichtlich ungerade symmetrisch. Sei also $T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$ und $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ zunächst gerade. Da $B = IT$ schiefsymmetrisch ist, gilt nach Satz 2.4

$$U^tBU = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$$

für einen unitären Operator $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$. Damit existiert ein reeller unitärer Operator $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}')$, sodass

$$\begin{aligned} O^tU^tBUO &= \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \\ &= \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

gilt. Nach Lemma 2.2 existiert ein reeller unitärer Operator $O' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$, sodass

$$I = O' \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (O')^t$$

gilt. Damit folgt $B = A^tIA$ für

$$A = O' \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t O^tU^*.$$

Damit gilt $T = I^*B = I^*A^tIA$. Falls T invertierbar ist, ist A nach Konstruktion invertierbar und falls T unitär ist, ist A, als Produkt von Unitären, unitär.
Sei $\dim(\mathrm{Ker}(T))$ ungerade. Für eine reelle Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ sei $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Links-Shift bezüglich dieser Basis, also eine reelle partielle Isometrie für die gilt $SS^t = 1_{\mathcal{H}}$ und $1_{\mathcal{H}} - S^tS$ eine eindimensionale Projektion ist. Damit ist $\widetilde{T} = I^*S^tTIS$ ein ungerade symmetrischer Fredholm-Operator und es gilt $\dim(\mathrm{Ker}(\widetilde{T})) = \dim(\mathrm{Ker}(T)) + 1$, also insbesondere gerade, denn S^t hat trivialen Kern und $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$. Nach Obigem gilt $\widetilde{T} = I^*(A')^tIA'$ für ein $A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ und damit $T = SII^*(A')^tIA'S^tI^* = S(A')^tIA'S^tI^* = I^*A^tIA$ für $A = A'S^tI^*$. □

Satz 2.6. *Sei $\mathcal{H}$ endlichdimensional und $T \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$. Dann ist $d_k(T,\lambda) := \dim(\mathrm{Ker}((T - \lambda 1_{\mathcal{H}})^k))$ und $d_1(T^*T, \lambda) := \dim(\mathrm{Ker}(T^*T - \lambda 1_{\mathcal{H}}))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gerade.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass $d_1(T^*T,\lambda)$ gerade ist. Falls T nicht invertierbar ist, existiert ein $\epsilon > 0$, sodass $T + \delta 1_{\mathcal{H}}$ für $0 < \delta < \epsilon$ invertierbar ist. Damit ist $B = I(T + \delta 1_{\mathcal{H}})$ schiefsymmetrisch und invertierbar. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\det(B^*B - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \det(B)\det(B^* - \lambda B^{-1})$. Da $B^* - \lambda B^{-1}$ schiefsymmetrisch ist, ist $\det(B^* - \lambda B^{-1}) = \mathrm{Pf}(B^* - \lambda B^{-1})^2$ das Quadrat der Pfaffschen. Da $\mathrm{Pf}(B^* - \lambda B^{-1})$ ein Polynom in λ ist, hat $\det(B^* - \lambda B^{-1})$ als Polynom in λ nur Nullstellen gerader Vielfachheit. Jeder Eigenwert von B^*B hat damit gerade algebraische Vielfachheit und da B^*B selbstadjungiert ist, auch gerade geometrische Vielfachheit. Im Grenzwert $\delta \to 0$ folgt, dass auch jeder Eigenwert von T^*T gerade geometrische Vielfachheit hat, also ist $d_1(T^*T,\lambda)$ gerade. Aus $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*T)$ folgt damit, dass $d_1(T,0) = d_1(T^*T,0)$ gerade ist. Für $T \in \mathcal{BS}(\mathcal{H},I)$ ist auch T^k für alle $k \in \mathbb{N}$ ungerade symmetrisch und damit ist $d_k(T,0) = d_1(T^k,0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gerade. Weiter ist für $\lambda \in \mathbb{C}$ auch $T - \lambda 1_{\mathcal{H}}$ ungerade symmetrisch. Damit ist $d_k(T,\lambda) = d_k(T - \lambda 1_{\mathcal{H}}, 0)$ gerade. □

Satz 2.7. *Sei $K \in \mathcal{BS}(\mathcal{H},I)$ kompakt und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $d_k(K,\lambda) := \dim(\mathrm{Ker}((K - \lambda 1_{\mathcal{H}})^k))$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gerade.*

Beweis. Sei $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Projektionen, die schwach gegen $1_{\mathcal{H}}$ konvergiert, sodass P_n für $n \in \mathbb{N}$ eine $2n$-dimensionale reelle Projektion ist, die mit I kommutiert. Diese existiert nach Lemma 2.2, denn für $O^tIO = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix}$ und eine reelle n-dimensionale Projektion $P'_n \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ kommutiert $\widetilde{P_n} = \begin{pmatrix} P'_n & 0 \\ 0 & P'_n \end{pmatrix}$ mit O^tIO und $O\widetilde{P_n}O^t$ hat die gewünschten Eigenschaften. Damit ist $K_n = P_nKP_n$, als Operator auf $\mathrm{Ran}(P_n)$, ungerade symmetrisch bezüglich $I|_{\mathrm{Ran}(P_n)}$. Damit ist für $T_n = ((K_n \oplus 0|_{\mathrm{Ran}(P_n)^\perp}) - \lambda 1_{\mathcal{H}})^k$ der Operator $T_n^*T_n = ((K_n^* \oplus 0|_{\mathrm{Ran}(P_n)^\perp}) - \overline{\lambda} 1_{\mathcal{H}})^k((K_n \oplus 0|_{\mathrm{Ran}(P_n)^\perp}) - \lambda 1_{\mathcal{H}})^k$ gegeben durch $T_n^*T_n = (K'_n)^*K'_n \oplus |\lambda|^{2k} 1_{\mathrm{Ran}(P_n)^\perp}$ für einen bezüglich $I|_{\mathrm{Ran}(P_n)}$ ungerade symmetrischen Operator $K'_n \in \mathcal{B}(\mathrm{Ran}(P_n))$. Nach Satz 2.6 besteht das Spektrum von $T_n^*T_n$ aus endlich vielen nichtnegativen Eigenwerten gerader Vielfachheit und dem Eigenwert $|\lambda|^{2k}$ mit unendlicher Vielfachheit. Da T_n für $n \to \infty$ in der Operatornorm gegen $T = (K - \lambda 1_{\mathcal{H}})^k$ konvergiert und damit auch $T_n^*T_n$ gegen T^*T konvergiert, konvergieren die Eigenwerte und Eigenvektoren des selbstadjungierten Operators $T_n^*T_n$ gegen die Eigenwerte und Eigenvektoren von T^*T. Damit ist $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T^*T))$ gerade. Mit $d_k(K,\lambda) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ folgt die Behauptung. □

2.2 Topologie ungerade symmetrischer Fredholm-Operatoren

Für einen Fredholm-Operator F auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist dessen Fredholm-Index $\mathrm{Ind}(F)$ invariant unter kompakter Störung, das heißt es gilt $\mathrm{Ind}(F) = \mathrm{Ind}(F + K)$ für jeden kompakten Operator $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Wenn $\mathrm{Ind}(F) = 0$ gilt, gibt es eine endlichdimensionale partielle Isometrie V, sodass $F + V$ invertierbar ist. Die Menge der Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}$ ist disjunkte Vereinigung der offenen und zusammenhängenden Mengen $\mathcal{F}_n(\mathcal{H}) := \{F \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) | F \text{ Fredholm}, \mathrm{Ind}(F) = n\}$

für $n \in \mathbb{Z}$. Analog dazu gilt der folgende Satz für ungerade symmetrische Fredholm-Operatoren.

Satz 2.8. *Für $T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$ und $K \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$ kompakt und* $\mathrm{Ind}_2(T) := \dim(\mathrm{Ker}(T)) \bmod 2$*, gilt*

(i) *Wenn $\mathrm{Ind}_2(T) = 0$ gilt existiert eine endlichdimensionale, ungerade symmetrische partielle Isometrie $V \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$, sodass $T + V$ invertierbar ist.*

(ii) $\mathrm{Ind}_2(T + K) = \mathrm{Ind}_2(T)$

(iii) *Die Abbildung $T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I) \mapsto \mathrm{Ind}_2(T)$ ist stetig.*

(iv) *Die Menge $\mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$ ist disjunkte Vereinigung der offenen und zusammenhängenden Mengen $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I) := \{T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I) : \mathrm{Ind}_2(T) = 0\}$ und $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I) := \{T \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I) : \mathrm{Ind}_2(T) = 1\}$.*

Beweis. Zunächst zu (i): Da T ungerade symmetrisch ist, gilt $\mathrm{Ker}(T^*) = I\overline{\mathrm{Ker}(T)}$ und damit insbesondere $\dim(\mathrm{Ker}(T^*)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$. Nach Voraussetzung gilt $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 2N$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ und da die Aussage für $N = 0$ trivialerweise richtig ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N \in \mathbb{N}$ annehmen. Ist $(\psi_n)_{n=1,\ldots,2N}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Ker}(T)$, dann ist nach Obigem $(I\overline{\psi_n})_{n=1,\ldots,2N}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Ker}(T^*)$. Für

$$V = \sum_{n=1}^{N} (I|\overline{\phi_n}\rangle\langle\phi_{n+N}| - I|\overline{\phi_{n+N}}\rangle\langle\phi_n|)$$

gilt

$$V^* = \sum_{n=1}^{N} (|\phi_{n+N}\rangle\langle\overline{\phi_n}|I^* - |\phi_n\rangle\langle\overline{\phi_{n+N}}|I^*).$$

Damit ist

$$V^*V = \sum_{n=1}^{N} (|\phi_n\rangle\langle\phi_n| + |\phi_{n+N}\rangle\langle\phi_{n+N}|)$$

die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Ker}(T)$ und

$$VV^* = \sum_{n=1}^{N} (I|\overline{\phi_n}\rangle\langle\overline{\phi_n}|I^* + I|\overline{\phi_{n+N}}\rangle\langle\overline{\phi_{n+N}}|I^*)$$

die orthogonale Projektion auf $\mathrm{Ker}(T^*)$ und V ist ungerade symmetrisch. Verbleibt zu zeigen, dass $T+V$ invertierbar ist. Sei $\psi \in \mathcal{H}$, sodass $(T+V)\psi = 0$ gilt, dann folgt $T\psi = -V\psi \in \mathrm{Ran}(T) \cap \mathrm{Ran}(V) = \mathrm{Ran}(T) \cap \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T) \cap \mathrm{Ran}(T)^\perp = \{0\}$. Damit gilt $T\psi = 0$ und $V\psi = 0$, also $\psi \in \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(V^*V) = \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(T)^\perp = \{0\}$, also ist $T + V$ injektiv. Es gilt $V|_{\mathrm{Ker}(T)^\perp} = 0$ und $\mathrm{Ran}(V) = \mathrm{Ker}(T^*)$ und damit $(T + V)(\mathcal{H}) = (T + V)(\mathrm{Ker}(T)^\perp \oplus \mathrm{Ker}(T)) = \mathrm{Ran}(T) \oplus \mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Ran}(T) \oplus \mathrm{Ran}(T)^\perp = \mathcal{H}$ wobei die letzte Gleichheit gilt, weil das Bild des Fredholm-Operators T abgeschlossen ist. Also ist $T + V$ surjektiv und mit Obigem invertierbar.

Zu (ii): Sei zunächst $\mathrm{Ind}_2(T) = 0$, dann existiert nach (i) eine endlichdimensionale, ungerade symmetrische partielle Isometrie V, sodass $T + V$ invertierbar ist. Nach Satz 2.5 existiert ein invertierbarer Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $T+V = I^*A^tIA$ gilt. Damit gilt $T+K = I^*A^tI(1_\mathcal{H}+I^*(A^{-1})^tI(K-V)A^{-1})A$ und $I^*(A^{-1})^tI(K-V)A^{-1}$ ist ungerade symmetrisch und kompakt. Nach Satz 2.7 ist die Dimension des Kerns von $1_\mathcal{H} + I^*(A^{-1})^tI(K-V)A^{-1}$ gerade und da I und A invertierbar sind, ist auch die Dimension des Kerns von $T + K$ gerade, also gilt $\mathrm{Ind}_2(T + K) = 0 = \mathrm{Ind}_2(T)$. Sei jetzt $\mathrm{Ind}_2(T) = 1$ und $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ reell, sodass $SS^t = 1_\mathcal{H}$ und $S^tS = 1_\mathcal{H} - P$ für eine eindimensionale Projektion P gilt. Damit ist

$$\widetilde{T} = I^*S^tTIS \tag{1}$$

ungerade symmetrisch und $\mathrm{Ker}(\widetilde{T})$ hat gerade Dimension, denn S^t hat trivialen Kern und der Kern von T liegt im Bild von IS, denn es gilt $\mathrm{Ran}(IS) = \mathcal{H}$. Für $\widetilde{T+K} = I^*S^t(T+K)IS$ gilt nach Obigem $\mathrm{Ind}_2(\widetilde{T+K}) = \mathrm{Ind}_2(\widetilde{T}) = 0$. Damit ist die Dimension des Kerns von $T+K$ ungerade und es gilt $\mathrm{Ind}_2(T+K)) = 1 = \mathrm{Ind}_2(T)$.
Zu (iii): Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ und $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ bezüglich der Normtopologie auf $\mathcal{FS}(\mathcal{H}, I)$ offen sind. Sei also $T \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ungerade symmetrischer Fredholm-Operatoren, die gegen T konvergiert. Nach (i) existiert eine endlichdimensionale, ungerade symmetrische partielle Isometrie $V \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$, sodass $T+V$ invertierbar ist. Damit gilt $T_n+V = T+V+T_n-T = (T+V)(1_\mathcal{H}+(T+V)^{-1}(T_n-T))$ und für n hinreichend groß, gilt $\|(T+V)^{-1}(T_n-T)\| < 1$ und damit ist $1_\mathcal{H} + (T+V)^{-1}(T_n-T)$ invertierbar. Damit ist, für hinreichend großes n, T_n+V invertierbar und nach (ii) gilt $\mathrm{Ind}_2(T_n) = \mathrm{Ind}_2(T_n+V) = 0$. Also gilt $T_n \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ für n hinreichend groß und $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ ist offen. Sei jetzt $T \in \mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ und $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge ungerade symmetrischer Fredholm-Operatoren die gegen T konvergiert. Für $\widetilde{T}$ und $\widetilde{T_n}$ wie in (1) konvergiert die Folge $(\widetilde{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ in Norm gegen $\widetilde{T}$. Nach obigem Argument gilt $\mathrm{Ind}_2(\widetilde{T_n}) = \mathrm{Ind}_2(\widetilde{T}) = 0$ für n hinreichend groß und damit $\mathrm{Ind}_2(T_n) = 1 = \mathrm{Ind}_2(T)$. Damit ist auch $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ offen.
Zu (iv): Es verbleibt zu zeigen, dass $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ und $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ jeweils zusammenhängend sind. Für $T \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ sei $V \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$ eine endlichdimensionale, ungerade symmetrische partielle Isometrie, sodass $T + V$ invertierbar ist. Dann ist $\alpha \in [0, 1] \mapsto T + \alpha V \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ ein stetiger Weg der T mit einem invertierbaren Operator $T_1 \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ verbindet. Nach Satz 2.5 existiert ein invertierbarer Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $T_1 = I^*A^tIA$ gilt. Da A invertierbar ist, gilt $A = e^{iH}|A|$ für einen selbstadjungierten Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Damit ist $\alpha \in [1, 2] \mapsto A_\alpha = e^{iH(2-\alpha)}|A|^{2-\alpha}$ ein stetiger Weg invertierbarer Operatoren der $A_1 = A$ mit $A_2 = 1_\mathcal{H}$ verbindet. Damit ist $\alpha \in [1, 2] \mapsto T_\alpha = I^*(A_\alpha)^tIA_\alpha \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ ein stetiger Weg der T_1 mit $T_2 = 1_\mathcal{H}$ verbindet. Da $T \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ beliebig war, folgt dass $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ zusammenhängend ist. Sei $T \in \mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ und $\widetilde{T}$ wie in (1). Nach Obigem existiert ein stetiger Weg $\alpha \in [0, 1] \mapsto \widetilde{T}_\alpha \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ der $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}$ mit $\widetilde{T}_1 = 1_\mathcal{H}$ verbindet. Damit ist $\alpha \in [0, 1] \mapsto SI\widetilde{T}_\alpha S^tI^*$ ein stetiger Weg in $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$, der T mit $SIS^tI^* \in \mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ verbindet. Da $T \in \mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ beliebig war, ist $\mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I)$ zusammenhängend. □

Nach Satz 2.5 ist sowohl die Menge der ungerade symmetrischen, invertierbaren

Operatoren, als auch die Menge der ungerade symmetrischen, unitären Operatoren, zusammenhängend.

Definition 2.9. *Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ separable Hilbertäume. Ein Operator $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ heißt wesentlich unitär, wenn $1_{\mathcal{H}'} - AA^*$ und $1_{\mathcal{H}} - A^*A$ kompakt sind.*

Lemma 2.10. *Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$ und $\mathcal{H}''$ separable Hilbertäume und $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ und $B : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ wesentlich unitäre Operatoren, dann ist $BA : \mathcal{H} \to \mathcal{H}''$ ein wesentlich unitärer Operator.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass $1_{\mathcal{H}''} - BA(BA)^*$ und $1_{\mathcal{H}} - (BA)^*BA$ kompakt sind. Es gilt $1_{\mathcal{H}''} - BA(BA)^* = 1_{\mathcal{H}''} - BB^* - B(AA^* - 1_{\mathcal{H}'})B^*$ und das ist kompakt. Weiter gilt $1_{\mathcal{H}} - (BA)^*BA = 1_{\mathcal{H}} - A^*A - A^*(B^*B - 1_{\mathcal{H}'})A$ und das ist kompakt. □

Der folgende Satz ist, meines Wissens nach, neu und relevant für den Beweis von Satz 2.17.

Satz 2.11. *Die Mengen $\mathcal{EUS}_0(\mathcal{H}, I) := \{T \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I) : T \text{wesentlich unitär}\}$ und $\mathcal{EUS}_1(\mathcal{H}, I) := \{T \in \mathcal{FS}_1(\mathcal{H}, I) : T \text{wesentlich unitär}\}$ sind zusammenhängend.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{EUS}_0(\mathcal{H}, I)$. Nach Satz 2.8 existiert eine endlichdimensionale und damit insbesondere kompakte, ungerade symmetrische partielle Isometrie $V \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$, sodass $T + V$ invertierbar ist. Dann ist $\alpha \in [0, 1] \mapsto T_\alpha = T + \alpha V \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ ein stetiger Weg, der T mit einem invertierbaren Operator $T_1 \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ verbindet. Für $\alpha \in [0, 1]$ ist T_α wesentlich unitär, denn $1_{\mathcal{H}} - T_\alpha T_\alpha^* = 1_{\mathcal{H}} - TT^* - \alpha VT^* - \alpha TV^* - \alpha^2 VV^*$ ist kompakt und $1_{\mathcal{H}} - T_\alpha^* T_\alpha = 1_{\mathcal{H}} - T^*T - \alpha V^*T - \alpha T^*V - \alpha^2 V^*V$ ist kompakt. Nach Satz 2.5 existiert ein invertierbarer Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $T_1 = I^*A^tIA$ gilt. Dabei ist A durch $A = O'\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^t O^tU^*$ für $(U')^*NU' = \begin{pmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & -\tilde{M} \end{pmatrix}$ und $M = |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}}$ wie in Satz 2.5 gegeben. Die Operatoren $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'), O' : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ und $U : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ und $U' : \mathcal{H}' \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$ sind unitär und N ist durch $N = \overline{W}IT_1W^*$ für einen unitären Operator $W : \mathcal{H} \to \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{\geq 0}, \mu_n)$ wie in Satz 2.4 gegeben. Mit T_1 ist auch N als Produkt wesentlich unitärer Operatoren wesentlich unitär. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} \tilde{M} & 0 \\ 0 & -\tilde{M} \end{pmatrix}$ als Produkt wesentlich unitärer Operatoren wesentlich unitär ist. Damit ist auch $\tilde{M}$ wesentlich unitär. Nach Polarzerlegung gilt $|\tilde{M}| = \tilde{U}\tilde{M}$ für $\tilde{U}$ unitär. Damit ist $|\tilde{M}|$, und damit auch $M = |\tilde{M}|^{\frac{1}{2}}$, wesentlich unitär. Damit ist $\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^t$ wesentlich unitär. Es folgt, dass A als Produkt wesentlich unitärer Operatoren wesentlich unitär ist. Damit ist auch $|A|^\beta$ für $\beta \in [0, 1]$ wesentlich unitär. Sei $A = V|A|$ für V unitär, die Polarzerlegung von A. Für $\alpha \in [1, 2]$ sei $A_\alpha = V|A|^{2-\alpha}$, damit ist $\alpha \in [1, 2] \mapsto T_\alpha = I^*A_\alpha^tIA_\alpha$ ein stetiger Weg in $\mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ der T_1 mit $T_2 = I^*V^tIV$ verbindet. Für alle α ist T_α als Produkt wesentlich unitärer Operatoren wesentlich unitär. Wählt man jetzt einen stetigen Weg $\alpha \in [2, 3] \mapsto V_\alpha$ der $V_2 = V$ mit $V_3 = 1_{\mathcal{H}}$ verbindet, sodass V_α für alle α unitär

ist, ist $\alpha \in [2,3] \mapsto I^* V_\alpha^t I V_\alpha$ ein stetiger Weg unitärer, ungerade symmetrischer Operatoren der T_2 mit $1_\mathcal{H}$ verbindet. Da $T \in \mathcal{EUS}_0(\mathcal{H}, I)$ beliebig war, folgt dass die Menge $\mathcal{EUS}_0(\mathcal{H}, I)$ zusammenhängend ist.
Sei $T \in \mathcal{EUS}_1(\mathcal{H}, I)$ und $\widetilde{T}$ wie in (1), dann ist $\widetilde{T}$ als Produkt wesentlich unitärer Operatoren wesentlich unitär, denn S ist offensichtlich wesentlich unitär. Nach Obigem existiert ein stetiger Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{T_\alpha} \in \mathcal{EUS}_0(\mathcal{H}, I)$ der $\widetilde{T_0} = \widetilde{T}$ mit $\widetilde{T_1} = 1_\mathcal{H}$ verbindet. Damit ist $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha = SI\widetilde{T_\alpha}S^t I^* \in \mathcal{FS}_0(\mathcal{H}, I)$ ein stetiger Weg wesentlich unitärer Operatoren der T mit $SIS^t I^* \in \mathcal{EUS}_1(\mathcal{H}, I)$ verbindet. Da $T \in \mathcal{EUS}_1(\mathcal{H}, I)$ beliebig war, folgt dass $\mathcal{EUS}_1(\mathcal{H}, I)$ zusammenhängend ist. □

2.3 Definiton und wesentliche Eigenschaften des $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Flusses

Sei die Menge der selbstadjungierten Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}$ mit $\mathcal{SF}(\mathcal{H})$ bezeichnet. Für $F \in \widetilde{\mathcal{SF}}(\mathcal{H}, I) := \{F \in \mathcal{FS}(\mathcal{H}, I) : F = F^*, \|F\| = 1, \sigma_{ess}(F) = \{\pm 1\}\}$ und $U \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$ unitär, sei die Menge der stetigen Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha \in \widetilde{\mathcal{SF}}(\mathcal{H}) := \{F \in \mathcal{SF}(\mathcal{H}) : \|F\| = 1, \sigma_{ess}(F) = \{\pm 1\}\}$, sodass

(i) $F_0 = F$,

(ii) $F_\alpha - F \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \,\forall\, \alpha \in [0,1]$,

(iii) $F_{1-\alpha} = (IU)^*(F_\alpha)^t(IU)$

mit $\theta(F, U, I)$ bezeichnet.
Nach (iii) gilt $F_1 = U^* F U$ also $[F, U] \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ und $\sigma(F_{1-\alpha}) = \sigma(F_\alpha)$, also verschwindet der spektrale Fluss entlang des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha$.

Lemma 2.12. *Für F und U wie oben, sodass $[F, U]$ kompakt ist, ist der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha = F + \alpha U^*[F, U]$ in $\theta(F, U, I)$ enthalten.*

Beweis. Offensichtlich gilt $F_\alpha \in \widetilde{\mathcal{SF}}(\mathcal{H})$. Die Punkte (i) und (ii) gelten nach Voraussetzung. Verbleibt (iii) zu zeigen. Es gilt $F_\alpha = (1-\alpha)F + \alpha U^* F U$ und damit

$$\begin{aligned}(IU)^*(F_\alpha)^t(IU) &= U^* I^* (1-\alpha) F^t I U + \alpha U^* I^* U^t F^t (U^*)^t I U \\ &= (1-\alpha) U^* F U + \alpha U^* U F U^* U \\ &= (1-\alpha) U^* F U + \alpha F = F_{1-\alpha}.\end{aligned}$$

□

Lemma 2.13. *Für F_0, $F_{\frac{1}{2}}$ und F_1 wie oben hat jeder Eigenwert endlicher Vielfachheit gerade Vielfachheit.*

Beweis. Wir betrachten zunächst F_0. Es gilt $I^* \overline{F_0} I = F_0$ oder äquivalent $I^* \overline{F_0} = F_0 I^*$. Sei λ Eigenwert von F_0 mit endlicher Vielfachheit, dann existiert $\psi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, sodass $F_0 \psi = \lambda \psi$ gilt. Damit gilt $F_0 I^* \overline{\psi} = I^* \overline{F_0 \psi} = \lambda I^* \overline{\psi}$, da λ als Eigenwert eines selbstadjungierten Operators reell ist. Verbleibt zu zeigen, dass ψ und

$I^*\overline{\psi}$ linear unabhängig sind. Sei $\mathrm{a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass $\mathrm{a}\psi = I^*\overline{\psi}$ oder äquivalent $\psi = \frac{1}{\mathrm{a}} I^*\overline{\psi}$ gilt. Damit folgt $\psi = \frac{1}{\mathrm{a}} I^* \overline{\frac{1}{\mathrm{a}} I^*\overline{\psi}} = \frac{1}{|\mathrm{a}|^2}(I^*)^2\psi = -\frac{1}{|\mathrm{a}|^2}\psi$, also sind ψ und $I^*\overline{\psi}$ linear unabhängig. Damit ist λ mindestens 2-fach entartet. Ist die Vielfachheit von λ größer als 2, lässt sich dieses Argument auf das orthogonale Komplement von $\operatorname{span}\{\psi, I^*\overline{\psi}\}$ anwenden. Es gibt dann einen Eigenvektor $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, sodass $\langle\varphi|\psi\rangle = 0 = \langle\varphi|I^*\overline{\psi}\rangle$ gilt. Damit ist auch $I^*\overline{\varphi}$ Eigenvektor von F_0 zum Eigenwert λ, denn $F_0 I^*\overline{\varphi} = I^*\overline{F_0}\overline{\varphi} = \lambda I^*\overline{\varphi}$. Analog zu Obigem, sind φ und $I^*\overline{\varphi}$ linear unabhängig und es gilt $\langle I^*\overline{\varphi}|I^*\overline{\psi}\rangle = \langle\overline{\varphi}|\overline{\psi}\rangle = \overline{\langle\varphi|\psi\rangle} = 0$ und $\langle I^*\overline{\varphi}|\psi\rangle = \langle\overline{\varphi}|I\psi\rangle = \overline{\langle\varphi|I\overline{\psi}\rangle} = -\overline{\langle\varphi|I^*\overline{\psi}\rangle} = 0$. Iterativ folgt die Behauptung für F_0.
Aus $F_1 = U^* F_0 U$ folgt, dass F_1 und F_0 gleiches Spektrum haben. Es gilt $U^*\operatorname{Ker}(F_0 - \lambda 1_{\mathcal{H}}) = \operatorname{Ker}(F_1 - \lambda 1_{\mathcal{H}})$ also insbesondere $\dim(\operatorname{Ker}(F_0 - \lambda 1_{\mathcal{H}})) = \dim(\operatorname{Ker}(F_1 - \lambda 1_{\mathcal{H}}))$, was die Behauptung für F_1 zeigt.
Es verbleibt die Behauptung für $F_{\frac{1}{2}}$ zu zeigen. Es gilt $U^* I^* \overline{F_{\frac{1}{2}}} I U = F_{\frac{1}{2}}$ oder äquivalent $F_{\frac{1}{2}} U^* I^* = U^* I^* \overline{F_{\frac{1}{2}}}$. Sei λ Eigenwert von $F_{\frac{1}{2}}$ mit endlicher Vielfachheit, dann existiert $\psi \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$, sodass $F_{\frac{1}{2}}\psi = \lambda\psi$. Damit gilt $F_{\frac{1}{2}} U^* I^* \overline{\psi} = U^* I^* \overline{F_{\frac{1}{2}}\psi} = \lambda U^* I^* \overline{\psi}$ da λ als Eigenwert eines selbstadjungierten Operators reell ist. Weiter sind ψ und $U^* I^* \overline{\psi}$ linear unabhängig. Denn wären ψ und $U^* I^* \overline{\psi}$ linear abhängig, gäbe es ein $\mathrm{a} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass $\mathrm{a}\psi = U^* I^* \overline{\psi}$ oder äquivalent $\psi = \frac{1}{\mathrm{a}} U^* I^* \overline{\psi}$ gilt. Damit gilt $\psi = \frac{1}{\mathrm{a}} U^* I^* \overline{\frac{1}{\mathrm{a}} U^* I^* \overline{\psi}} = \frac{1}{|\mathrm{a}|^2} U^* I^* U^t I^* \psi = -\frac{1}{|\mathrm{a}|^2} U^* I^* U^t I \psi = -\frac{1}{|\mathrm{a}|^2}\psi$, also sind ψ und $U^* I^* \overline{\psi}$ linear unabhängig. Damit ist λ mindestens 2-fach entartet. Ist die Vielfachheit von λ größer als 2, lässt sich dieses Argument auf das orthogonale Komplement von $\operatorname{span}\{\psi, U^* I^* \overline{\psi}\}$ anwenden. Es gibt dann einen Eigenvektor $\varphi \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ sodass $\langle\varphi|\psi\rangle = 0 = \langle\varphi|U^* I^* \overline{\psi}\rangle$. Damit ist analog zu oben auch $U^* I^* \overline{\varphi}$ Eigenvektor von $F_{\frac{1}{2}}$ zum Eigenwert λ. Analog zu Obigem, sind φ und $U^* I^* \overline{\varphi}$ linear unabhängig und es gilt $\langle U^* I^* \overline{\varphi}|U^* I^* \overline{\psi}\rangle = \langle\overline{\varphi}|\overline{\psi}\rangle = \overline{\langle\varphi|\psi\rangle} = 0$ und $\langle U^* I^* \overline{\varphi}|\psi\rangle = \langle I^* \overline{U}\overline{\varphi}|\psi\rangle = \langle\overline{\varphi}|\overline{U}^* I\psi\rangle = \langle\overline{\varphi}| - \overline{U}^* I^*\psi\rangle = -\overline{\langle\varphi|U^* I^* \overline{\psi}\rangle} = 0$. Iterativ folgt die Behauptung für $F_{\frac{1}{2}}$. □

Satz 2.14. *Für $F \in \tilde{\mathcal{SF}}(\mathcal{H}, I)$ und $U \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I)$ unitär ist*

$$\operatorname{Sf}_2(F, U) := \operatorname{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha) \bmod 2$$

wobei $\operatorname{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha)$ *den gewöhnlichen spektralen Fluss entlang des Weges $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha$ bezeichnet, unabhängig von der Wahl des Weges $\alpha \in [0, 1] \mapsto F_\alpha$ in $\theta(F, U, I)$ und definiert damit einen $\mathbb{Z}_2$-wertigen spektralen Fluss. Insbesondere gilt*

$$\operatorname{Sf}_2(F, U) = \operatorname{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F + \alpha U^*[F, U]) \bmod 2.$$

Beweis. Seien $\alpha \in [0, 1] \mapsto F_\alpha$ und $\alpha \in [0, 1] \mapsto F'_\alpha$ Wege in $\theta(F, U, I)$. Dann ist $(\alpha, \beta) \in [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \beta F_\alpha + (1 - \beta) F'_\alpha$ eine Homotopie in $\theta(F, U, I)$. Es gilt

$$\begin{aligned} 0 = &\operatorname{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F'_\alpha) \\ &+ \operatorname{Sf}(\beta \in [0, 1] \mapsto \beta F_{\frac{1}{2}} + (1 - \beta) F'_{\frac{1}{2}}) + \operatorname{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_{\frac{1}{2} - \alpha}), \end{aligned}$$

da der betrachtete Weg homotop zum konstanten Weg ist. Weiter ist $\mathrm{Sf}(\beta \in [0,1] \mapsto \beta F_{\frac{1}{2}} + (1-\beta)F'_{\frac{1}{2}})$ gerade, da die betrachteten Eigenwerte nach Lemma 2.13 gerade Vielfachheiten haben. Damit folgt $\mathrm{Sf}(\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto F'_\alpha) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha) \bmod 2$, was zu zeigen war. $\square$

Satz 2.15. *Der spektrale Fluss* $\mathrm{Sf}_2 : \mathbb{P}(\mathcal{H}, I) := \{(F,U) \in \widetilde{\mathcal{SF}}(\mathcal{H}, I) \times \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I) : U \text{ unitär}, [F,U] \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\} \to \mathbb{Z}_2$ *ist lokal konstant.*

Beweis. Sei $\beta \in [0,1] \mapsto (F(\beta), U(\beta)) \in \mathbb{P}(\mathcal{H}, I)$ ein stetiger Weg. Damit ist für alle β der spektrale Fluss $\mathrm{Sf}_2(F(\beta), U(\beta))$ wohldefiniert und es gilt $\mathrm{Sf}_2(F(\beta), U(\beta)) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto F(\beta) + \alpha U(\beta)^*[F(\beta), U(\beta)]) := H(\alpha, \beta))$. Für $\beta, \beta' \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sf}(\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto H(\alpha,\beta)) + \mathrm{Sf}(\tilde{\beta} \in [\beta,\beta'] \mapsto H(\frac{1}{2},\tilde{\beta}))\\
&- \mathrm{Sf}((\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto H(\alpha,\beta'))) - \mathrm{Sf}(\tilde{\beta} \in [\beta,\beta'] \mapsto H(0,\tilde{\beta})) = 0,
\end{aligned}$$

da der betrachtete Weg homotop zum konstanten Weg ist. Weiter sind $\mathrm{Sf}(\tilde{\beta} \in [\beta,\beta'] \mapsto H(\frac{1}{2},\tilde{\beta}))$ und $\mathrm{Sf}(\tilde{\beta} \in [\beta,\beta'] \mapsto H(0,\tilde{\beta}))$ gerade, da die betrachteten Eigenwerte nach Lemma 2.13 gerade Vielfachheiten haben. Damit folgt $\mathrm{Sf}_2(F(\beta), U(\beta)) = \mathrm{Sf}_2(F(\beta'), U(\beta'))$, was zu zeigen war. $\square$

Definition 2.16. *Sei $\mathcal{K}$ ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ eine Kontraktion, also $\|T\| \leq 1$. Eine unitäre Dilatation von T ist ein unitärer Operator $U_T \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$, für den eine Isometrie $\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ existiert, für die $T = \pi^* U_T \pi$ gilt.*

Satz 2.17. *Sei $\mathcal{K}$ ein separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}_\mathcal{K}$ und $I_\mathcal{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ reell und unitär, sodass $I_\mathcal{K}^2 = -1_\mathcal{K}$ gilt. Sei $T \in \mathcal{BS}(\mathcal{K}, I_\mathcal{K})$ eine wesentlich unitäre Kontraktion, also $\|T\| \leq 1$, $T^*T - 1_\mathcal{K} \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$ und $TT^* - 1_\mathcal{K} \in \mathcal{K}(\mathcal{K})$. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}_\mathcal{H}$ und $I_\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ reell und unitär, sodass $I_\mathcal{H}^2 = -1_\mathcal{H}$ gilt. Sei $U_T \in \mathcal{BS}(\mathcal{H}, I_\mathcal{H})$ eine unitäre Dilatation von T mit reeller Isometrie $\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ sodass $I_\mathcal{K} = \pi^* I_\mathcal{H} \pi$ und $T = \pi^* U_T \pi$, wobei $\mathcal{H} \ominus \mathrm{Ran}(\pi)$ unendlichdimensional ist. Dann gilt für $F = 2\pi\pi^* - 1_\mathcal{H} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

$$\mathrm{Ind}_2(T) = \mathrm{Sf}_2(F, U_T) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0,\frac{1}{2}] \mapsto F + \alpha(U_T)^*[F, U_T]) \bmod 2. \tag{2}$$

Beweis. Aus $I_\mathcal{K} = \pi^* I_\mathcal{H} \pi$ folgt $\mathrm{Ran}(I_\mathcal{H}\pi) \subset \mathrm{Ran}(\pi)$ und damit $\pi I_\mathcal{K} = \pi\pi^* I_\mathcal{H} \pi = I_\mathcal{H}\pi$ und $I_\mathcal{H}\pi\pi^* I_\mathcal{H}^* = I_\mathcal{H}\pi(I_\mathcal{H}\pi)^* = \pi I_\mathcal{K}(\pi I_\mathcal{K})^* = \pi\pi^*$. Für F folgt

$$\begin{aligned}
I_\mathcal{H}^* F^t I_\mathcal{H} &= 2 I_\mathcal{H}^* \pi\pi^* I_\mathcal{H} - 1_\mathcal{H}\\
&= 2 I_\mathcal{H} \pi\pi^* I_\mathcal{H}^* - 1_\mathcal{H} = F.
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}'$, wobei $\mathcal{K}$ mit $\mathrm{Ran}(\pi)$ identifiziert wird und $I_\mathcal{H} = I_\mathcal{K} \oplus I_{\mathcal{K}'}$. Da $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ unendlichdimensionale, separable Hilberträume sind, existiert nach Lemma 2.2 ein reeller, unitärer Operator $O : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, sodass $I_{\mathcal{K}'} = O I_\mathcal{K} O^t$ gilt. Damit gilt $\mathrm{diag}(1_\mathcal{K}, O)(I_\mathcal{K} \oplus I_{\mathcal{K}'})\mathrm{diag}(1_\mathcal{K}, O)^t = I_\mathcal{K} \oplus I_\mathcal{K}$. Es kann also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$, $I_\mathcal{H} = I_\mathcal{K} \oplus I_\mathcal{K}$ und $\pi : \mathcal{K} \to \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ gegeben durch $\pi\psi = (\psi, 0)$ angenommen werden. Sei U_T gemäß dieser Zerlegung gegeben durch

$$U_T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

für $A, B, C, D \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Dann gilt $A = \pi^* U_T \pi = T$ und $I_\mathcal{H}^* U_T^t I_\mathcal{H} = U_T$ ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} T & I_\mathcal{K}^* C^t I_\mathcal{K} \\ I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} & I_\mathcal{K}^* D^t I_\mathcal{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

was äquivalent zu $C = I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K}$ und $D \in \mathcal{BS}(\mathcal{K}, I_\mathcal{K})$ ist. Es gilt

$$U_T U_T^* = \begin{pmatrix} TT^* + BB^* & TI_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} + BD^* \\ I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} T^* + DB^* & I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} + DD^* \end{pmatrix}$$

und

$$U_T^* U_T = \begin{pmatrix} T^*T + I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} & T^*B + I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} D \\ B^*T + D^* I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} & B^*B + D^*D \end{pmatrix}.$$

Also ist U_T unitär, wenn $TT^* + BB^* = 1_\mathcal{K}$ gilt, was $T^*T + I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} = 1_\mathcal{K}$ impliziert, und $B^*B + D^*D = 1_\mathcal{K}$ gilt, was $I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} + DD^* = 1_\mathcal{K}$ impliziert und $T^*B + I_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} D = 0$ gilt, was $B^*T + D^* I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} = 0$ und $TI_\mathcal{K}^* \overline{B} I_\mathcal{K} + BD^* = 0$ und $I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} T^* + DB^* = 0$ impliziert. Da T wesentlich unitär ist, folgt insbesondere, dass BB^* kompakt ist. Nach Polarzerlegung ist damit auch B kompakt. Damit ist (F, U_T) in $\mathbb{P}(\mathcal{H}, I_\mathcal{H})$ enthalten und $\mathrm{Sf}_2(F, U_T)$ wohldefiniert, denn gemäß dieser Zerlegung gilt $F = \begin{pmatrix} 1_\mathcal{K} & 0 \\ 0 & -1_\mathcal{K} \end{pmatrix}$ und $[F, U_T] = \begin{pmatrix} 0 & 2B \\ -2I_\mathcal{K}^* B^t I_\mathcal{K} & 0 \end{pmatrix}$, also ist $[F, U_T]$ genau dann kompakt, wenn B kompakt ist.

Nach Satz 2.8 (ii) gilt $\mathrm{Ind}_2\left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Ind}_2(U_T) = 0$ und damit $\mathrm{Ind}_2(D) = \mathrm{Ind}_2(T)$.

Für die Halmos-Dilatation $U_T^H = \begin{pmatrix} T & (1_\mathcal{K} - TT^*)^{\frac{1}{2}} \\ (1_\mathcal{K} - T^*T)^{\frac{1}{2}} & -T^* \end{pmatrix}$ gilt $I_\mathcal{K}^*(-T^*)^t I_\mathcal{K} = -T^*$ und $I_\mathcal{K}^*((1_\mathcal{K} - TT^*)^{\frac{1}{2}})^t I_\mathcal{K} = (1_\mathcal{K} - I_\mathcal{K}^*(T^*)^t I_\mathcal{K} I_\mathcal{K}^* T^t I_\mathcal{K})^{\frac{1}{2}} = (1_\mathcal{K} - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ und damit $I_\mathcal{H}^*(U_T^H)^t I_\mathcal{H} = U_T^H$.

Sei zunächst $\mathrm{Ind}_2(T) = 0$. Nach Satz 2.11 existiert ein stetiger Weg $\beta \in [0,1] \mapsto T(\beta)$ wesentlich unitärer Operatoren in $\mathcal{FS}(\mathcal{K}, I_\mathcal{K})$, der T mit $1_\mathcal{K}$ verbindet. Damit gibt es einen stetigen Weg $\beta \in [0,1] \mapsto U_{T(\beta)}^H$ der entsprechenden Halmos-Dilatationen der U_T^H mit $1_\mathcal{H}$ verbindet und für den gilt $(F, U_{T(\beta)}^H) \in \mathbb{P}(\mathcal{H}, I_\mathcal{H})$. Nach Satz 2.15 gilt

$$\mathrm{Sf}_2(F, U_T^H) = \mathrm{Sf}_2(F, 1_\mathcal{H}) = 0 = \mathrm{Ind}_2(T).$$

Sei $\mathrm{Ind}_2(T) = 1$. Nach Satz 2.11 existiert ein stetiger Weg $\beta \in [0,1] \mapsto T(\beta)$ wesentlich unitärer Operatoren in $\mathcal{FS}(\mathcal{K}, I_\mathcal{K})$ der T mit $T(1) = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^* \end{pmatrix}$ verbindet, wobei $\mathcal{K}$ mit $\ell^2(\mathbb{N}) \oplus \ell^2(\mathbb{N})$ identifiziert wurde, $I_\mathcal{K}$ bezüglich dieser Zerlegung von der Form $I_\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \\ 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \end{pmatrix}$ ist und S den Links-Shift auf $\ell^2(\mathbb{N})$ bezeichnet. Damit gibt es einen stetigen Weg $\beta \in [0,1] \mapsto U^H_{T(\beta)}$ der entsprechenden Halmos-Dilatationen, für den gilt $(F, U^H_{T(\beta)}) \in \mathbb{P}(\mathcal{H}, I_\mathcal{H})$. Dieser verbindet U^H_T mit

$$U^H_{T(1)} = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^* & 0 & P \\ P & 0 & -S^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S \end{pmatrix},$$

wobei $P \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ die eindimensionale orthogonale Projektion auf den Kern von S bezeichnet. Es gilt

$$F + \alpha(U^H_{T(1)})^*[F, U^H_{T(1)}] = \begin{pmatrix} 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_{\ell^2(\mathbb{N})} \end{pmatrix} + 2\alpha \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $\mathrm{Sf}_2(F, U^H_{T(1)}) = 1$ und da $(F, U^H_{T(\beta)}) \in \mathbb{P}(\mathcal{H}, I_\mathcal{H})$ für alle $\beta \in [0,1]$, folgt mit Satz 2.15

$$\mathrm{Sf}_2(F, U^H_T) = \mathrm{Sf}_2(F, U^H_{T(1)}) = 1 = \mathrm{Ind}_2(T).$$

Damit ist die Behauptung für die Halmos-Dilatation von T gezeigt. Ab jetzt wird $U_T = \begin{pmatrix} T & B \\ I^*_\mathcal{K} B^t I_\mathcal{K} & D \end{pmatrix}$ wie oben betrachtet. Wir setzen die Operatoren $I_\mathcal{K}$, T, B und D zu Operatoren auf $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}$ fort. Dabei wird $I_\mathcal{K}$ zu einem reellen unitären Operator

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} I_\mathcal{K} & 0 \\ 0 & I_\mathcal{K} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}}),$$

fortgesetzt und es gilt $\tilde{I}^2 = -1_{\tilde{\mathcal{K}}}$. Wir erweitern T durch die Identität zu

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1_\mathcal{K} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}}),$$

das ist wieder eine wesentlich unitäre Kontraktion und es gilt $\tilde{I}^* \tilde{T}^t \tilde{I} = \tilde{T}$, also ist $\tilde{T}$ ungerade symmetrisch bezüglich $\tilde{I}$. Den Operator B setzen wir durch 0 zu

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}})$$

fort, was wieder kompakt ist. Weiter setzen wir D durch die Identität zu

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1_\mathcal{K} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}})$$

fort. Insbesondere ist $\tilde{D}$ ungerade symmetrisch bezüglich $\tilde{I}$. Damit ist

$$U_{\tilde{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & \tilde{B} \\ \tilde{I}^*\tilde{B}^t\tilde{I} & \tilde{D} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}} \oplus \tilde{\mathcal{K}})$$

eine bezüglich $\tilde{I} \oplus \tilde{I}$ ungerade symmetrische, unitäre Dilatation von $\tilde{T}$. Dass $U_{\tilde{T}}$ unitär ist, folgt daraus, dass U_T unitär ist, es gilt also

(i)′ $\tilde{T}\tilde{T}^* + \tilde{B}\tilde{B}^* = 1_{\tilde{\mathcal{K}}}$,

(ii)′ $\tilde{B}^*\tilde{B} + \tilde{D}^*\tilde{D} = 1_{\tilde{\mathcal{K}}}$,

(iii)′ $\tilde{T}^*\tilde{B} + \tilde{I}^*\overline{\tilde{B}}\tilde{I}\tilde{D} = 0$.

Die entsprechende reelle Isometrie $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{K}} \to \tilde{\mathcal{K}} \oplus \tilde{\mathcal{K}}$ ist durch $\tilde{\pi}\psi = (\psi, 0)$ gegeben und es gilt $\tilde{I} = \pi^*(\tilde{I} \oplus \tilde{I})\pi$. Nach $(i)'$ ist die Polarzerlegung von $\tilde{B}^*$ durch $\tilde{B}^* = \tilde{V}(1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}}$ für eine partielle Isometrie $\tilde{V}$ mit $\mathrm{Ker}(\tilde{V}) = \mathrm{Ker}(\tilde{B}^*)$ und $\mathrm{Ran}(\tilde{V}) = \overline{\mathrm{Ran}(\tilde{B}^*)} = \mathrm{Ker}(\tilde{B})^\perp$ gegeben. Dabei bezeichnet $\overline{\mathrm{Ran}(\tilde{B}^*)}$ den Abschluss und nicht die komplexe Konjugation von $\mathrm{Ran}(\tilde{B}^*)$. Jetzt sind $\mathrm{Ker}(\tilde{B}^*)$ und $\mathrm{Ker}(\tilde{B})$ nach Konstruktion beide unendlichdimensional und damit lässt sich $\tilde{V}$ zu einem unitären Operator auf $\tilde{\mathcal{K}}$ fortsetzen, der mit $\tilde{W}$ bezeichnet wird. Damit gilt

$$\begin{aligned} U_{\tilde{T}} &= \begin{pmatrix} \tilde{T} & (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}}\tilde{W}^* \\ \tilde{I}^*\overline{\tilde{W}}\tilde{I}\tilde{I}^*((1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}})^t\tilde{I} & \tilde{D} \end{pmatrix} \\ &= (\tilde{I} \oplus \tilde{I})^* \begin{pmatrix} \tilde{I}^* & 0 \\ 0 & \tilde{I}^*\tilde{W}^* \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \tilde{T} & (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}} \\ (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}^*\tilde{T})^{\frac{1}{2}} & \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{I}\tilde{D}\tilde{W} \end{pmatrix} (\tilde{I} \oplus \tilde{I}) \begin{pmatrix} \tilde{I}^* & 0 \\ 0 & \tilde{I}^*\tilde{W}^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für $\tilde{D}' = \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{I}\tilde{D}\tilde{W}$ gilt $\tilde{I}^*(\tilde{D}')^t\tilde{I} = \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{D}^t\tilde{I}^*\tilde{W}\tilde{I}\tilde{I} = \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{I}\tilde{I}^*\tilde{D}^t\tilde{I}\tilde{W} = \tilde{D}'$, also ist $\tilde{D}'$ ungerade symmetrisch bezüglich $\tilde{I}$. Da alle Faktoren unitär sind, ist

$$U'_{\tilde{T}} = \begin{pmatrix} \tilde{T} & (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}} \\ (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}^*\tilde{T})^{\frac{1}{2}} & \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{I}\tilde{D}\tilde{W} \end{pmatrix}$$

eine bezüglich $\tilde{I} \oplus \tilde{I}$ ungerade symmetrische, unitäre Dilatation von $\tilde{T}$. Sei $\beta \in [0,1] \mapsto W(\beta) \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}})$ ein stetiger Weg unitärer Operatoren, der $W(0) = \tilde{W}$ mit $W(1) = 1_{\tilde{\mathcal{K}}}$ verbindet. Damit ist

$$\begin{aligned} &U_{\tilde{T}}(\beta) \\ &= (\tilde{I} \oplus \tilde{I})^* \begin{pmatrix} \tilde{I}^* & 0 \\ 0 & \tilde{I}^*W(\beta)^* \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \tilde{T} & (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}\tilde{T}^*)^{\frac{1}{2}} \\ (1_{\tilde{\mathcal{K}}} - \tilde{T}^*\tilde{T})^{\frac{1}{2}} & \tilde{I}^*\tilde{W}^t\tilde{I}\tilde{D}\tilde{W} \end{pmatrix} (\tilde{I} \oplus \tilde{I}) \begin{pmatrix} \tilde{I}^* & 0 \\ 0 & \tilde{I}^*W(\beta)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle β unitär und hat kompakte Nebendiagonaleinträge. Allgemein ist für einen bezüglich $\tilde{I} \oplus \tilde{I}$ ungerade symmetrischen Operator $B \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}} \oplus \tilde{\mathcal{K}})$ und $A \in \mathcal{B}(\tilde{\mathcal{K}} \oplus \tilde{\mathcal{K}})$ auch $(\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*A^tB(\tilde{I} \oplus \tilde{I})A$ ungerade symmetrisch, denn es gilt $(\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*((\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*A^tB(\tilde{I} \oplus \tilde{I})A)^t(\tilde{I} \oplus \tilde{I}) = (\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*A^t(\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*B^tA(\tilde{I} \oplus \tilde{I})(\tilde{I} \oplus \tilde{I}) = (\tilde{I} \oplus \tilde{I})^*A^tB(\tilde{I} \oplus \tilde{I})A$, also ist $U_{\tilde{T}}(\beta)$ für alle β ungerade symmetrisch. Für

$$\tilde{F} := 2\tilde{\pi}\tilde{\pi}^* - 1_{\tilde{\mathcal{K}} \oplus \tilde{\mathcal{K}}} = \begin{pmatrix} 1_{\tilde{\mathcal{K}}} & 0 \\ 0 & -1_{\tilde{\mathcal{K}}} \end{pmatrix}$$

ist $[\tilde F, U_{\tilde T}(\beta)]$ für alle β kompakt, denn $U_{\tilde T}(\beta)$ hat kompakte Nebendiagonaleinträge. Damit ist $\beta \in [0,1] \mapsto (\tilde F, U_{\tilde T}(\beta))$ ein stetiger Weg in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal K} \oplus \tilde{\mathcal K}, \tilde I \oplus \tilde I)$, der $(\tilde F, U_{\tilde T})$ mit $(\tilde F, U'_{\tilde T})$ verbindet.
Da $U'_{\tilde T}$ unitär ist, folgt $((1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T\tilde T^*)^{\frac12})^2 + (\tilde D')^*\tilde D' = 1_{\tilde{\mathcal K}}$ oder äquivalent $\tilde T\tilde T^* = (\tilde D')^*\tilde D'$ und $\tilde T(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T^*\tilde T)^{\frac12} + (1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T\tilde T^*)^{\frac12}(\tilde D')^* = 0$ oder äquivalent $(\tilde T^* + \tilde D')(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T\tilde T^*)^{\frac12} = 0$. Sei $\mathcal E = \mathrm{Ker}(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T\tilde T^*) = \mathrm{Ker}(1_{\tilde{\mathcal K}} - (\tilde D')^*\tilde D')$ und $P_{\mathcal E}$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal E$. Aus $\tilde I^*\overline{(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T^*\tilde T)}\tilde I = 1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T\tilde T^*$ folgt $\tilde I\mathcal E = \overline{\mathrm{Ker}(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T^*\tilde T)}$ oder äquivalent $\tilde I\overline{\mathcal E} = \mathrm{Ker}(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T^*\tilde T) = \mathrm{Ker}(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde D'(\tilde D')^*)$.
Es gilt $\tilde T^* : \mathcal E \mapsto I_{\tilde{\mathcal K}}\overline{\mathcal E}$ denn für $\psi \in \mathcal E$ gilt $\psi = \tilde T\tilde T^*\psi$ und damit $\tilde T^*\psi = \tilde T^*\tilde T(\tilde T^*\psi)$. Analog zeigt man $\tilde T : \tilde I\overline{\mathcal E} \mapsto \mathcal E$, $\tilde D' : \mathcal E \mapsto \tilde I\overline{\mathcal E}$ und $(\tilde D')^* : \tilde I\overline{\mathcal E} \mapsto \mathcal E$. Für $\psi \in \mathcal E$ gilt $\psi = \tilde T\tilde T^*\psi$ sowie $\psi = (\tilde D')^*\tilde D'\psi$ und für $\varphi \in \tilde I\overline{\mathcal E}$ gilt $\varphi = \tilde T^*\tilde T\varphi$ und $\varphi = \tilde D'(\tilde D')^*\varphi$, also sind die betrachteten Operatoren unitär. Weiter gilt $\tilde T^* : \mathcal E^\perp \mapsto (\tilde I\overline{\mathcal E})^\perp$, denn für $\psi \in \mathcal E^\perp$ und $\varphi \in \tilde I\overline{\mathcal E}$ gilt $\langle \tilde T^*\psi|\varphi\rangle = \langle\psi|\tilde T\varphi\rangle = 0$. Damit existieren unitäre Operatoren $(\tilde T^*)^{\frac12} : \mathcal E \mapsto \tilde I\overline{\mathcal E}$ und $(\tilde D')^{-\frac12} : I_{\mathcal K}\overline{\mathcal E} \mapsto \mathcal E$ wobei $\mathcal E$ mit $\tilde I\overline{\mathcal E}$ identifiziert wird. Damit ist auch $W|_{\mathcal E} = i(\tilde D')^{-\frac12}(\tilde T^*)^{\frac12}|_{\mathcal E} : \mathcal E \to \mathcal E$ unitär. Der Operator $W \in \mathcal B(\mathcal K)$ definiert als $W = W|_{\mathcal E} + (1_{\tilde{\mathcal K}} - P_{\mathcal E})$ ist damit unitär. Es gibt einen stetigen Weg $\beta \in [0,1] \mapsto W(\beta)|_{\mathcal E}$ unitärer Operatoren auf $\mathcal E$ der $W(0)|_{\mathcal E} = W|_{\mathcal E}$ mit $W(1)|_{\mathcal E} = 1_{\mathcal E}$ verbindet. Damit ist $W(\beta) = W(\beta)|_{\mathcal E} + (1_{\tilde{\mathcal K}} - P_{\mathcal E})$ ein stetiger Weg unitärer Operatoren auf $\tilde{\mathcal K}$. Nach Obigem ist $\tilde D'(\beta) = \tilde I^* W(\beta)^t \tilde I\tilde D' W(\beta)$ für alle $\beta \in [0,1]$ ungerade symmetrisch. Es gilt $\tilde D'(1) = \tilde D'$ und $\tilde D'(0)|_{\mathcal E} = \tilde I^* W(0)^t \tilde I \tilde D' i(\tilde D')^{-\frac12}(\tilde T^*)^{\frac12}|_{\mathcal E} = \tilde I^* i((\tilde T^*)^{\frac12})^t((\tilde D')^{-\frac12})^t\tilde I\tilde D' i(\tilde D')^{-\frac12}(\tilde T^*)^{\frac12}|_{\mathcal E} = -\tilde I^*((\tilde T^*)^{\frac12})^t\tilde I(\tilde D')^{-\frac12}\tilde D'(\tilde D')^{-\frac12}(\tilde T^*)^{\frac12}|_{\mathcal E} = -\tilde T^*|_{\mathcal E}$. Weiter gilt $\tilde D'(\beta)|_{\mathcal E^\perp} = \tilde D'|_{\mathcal E^\perp} = -\tilde T^*|_{\mathcal E^\perp}$ wobei die letzte Gleichheit aus $(\tilde T^* + \tilde D')(1_{\tilde{\mathcal K}} - \tilde T^*\tilde T)^{\frac12} = 0$ folgt. Damit ergibt sich ein stetiger Weg in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal K} \oplus \tilde{\mathcal K}, \tilde I \oplus \tilde I)$ der $(\tilde F, U'_{\tilde T})$ mit $(\tilde F, U^H_{\tilde T})$ verbindet. Insgesamt wurde ein stetiger Weg in $\mathbb{P}(\tilde{\mathcal K} \oplus \tilde{\mathcal K}, \tilde I \oplus \tilde I)$ konstruiert, der $(\tilde F, U_{\tilde T})$ mit $(\tilde F, U^H_{\tilde T})$ verbindet. Mit Satz 2.15 folgt, dass $\mathrm{Sf}_2(\tilde F, U^H_{\tilde T}) = \mathrm{Sf}_2(\tilde F, U_{\tilde T})$ gilt. Nach obigem Argument, angewandt auf die Halmos-Dilatation von $\tilde T$ gilt

$$\mathrm{Ind}_2(\tilde T) = \mathrm{Sf}_2(\tilde F, U^H_{\tilde T}) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac12] \mapsto \tilde F + \alpha(U^H_{\tilde T})^*[\tilde F, U^H_{\tilde T}]) \bmod 2$$

und damit auch

$$\mathrm{Ind}_2(\tilde T) = \mathrm{Sf}_2(\tilde F, U_{\tilde T}) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac12] \mapsto \tilde F_\alpha := \tilde F + \alpha(U_{\tilde T})^*[\tilde F, U_{\tilde T}]) \bmod 2.$$

Nach Konstruktion gilt $\dim(\mathrm{Ker}(\tilde T)) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$ und damit $\mathrm{Ind}_2(\tilde T) = \mathrm{Ind}_2(T)$. Weiter gilt

$$\tilde F_\alpha = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal K} - 2\alpha I^*_{\mathcal K}\overline{B}B^t I_{\mathcal K} & 0 & 2\alpha T^* B & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal K} & 0 & 0 \\ -2\alpha D^* I^*_{\mathcal K} B^t I_{\mathcal K} & 0 & -1_{\mathcal K} + 2\alpha B^* B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_{\mathcal K} \end{pmatrix}$$

und

$$F_\alpha = F + \alpha(U_T)^*[F, U_T] = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal K} - 2\alpha I^*_{\mathcal K}\overline{B}B^t I_{\mathcal K} & 2\alpha T^* B \\ -2\alpha D^* I^*_{\mathcal K} B^t I_{\mathcal K} & -1_{\mathcal K} + 2\alpha B^* B \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \tilde{F}_\alpha) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha) \bmod 2$$

und damit

$$\mathrm{Ind}_2(T) = \mathrm{Sf}_2(F, U_T) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F + \alpha (U_T)^*[F, U_T]) \bmod 2,$$

was zu zeigen war. □

2.4 Anwendung auf topologische Isolatoren

Sei $H_\alpha \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L}))$ für $L \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0,1]$ gegeben durch

$$H_\alpha = \sum_{|m| \leq r} c_m S_\alpha^m + W$$

für $r \in \mathbb{N}$, wobei c_m, für $m \in \mathbb{Z}$, $2L \times 2L$-Matrizen sind und W eine im Allgemeinen ortsabhängige $2L \times 2L$-Matrix ist und S_α durch

$$S_\alpha = \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n+1| + e^{i\pi\alpha}|0\rangle\langle 1| \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$$

gegeben ist. Für

$$G = \sum_{n>0} |n\rangle\langle n| - \sum_{n \leq 0} |n\rangle\langle n| \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$$

gilt $G = G^* = G^{-1} = \overline{G}$ und $G S_\alpha G = S_{1+\alpha}$. Im Folgenden wird G mit $G \otimes 1_{\mathbb{C}^L}$ identifiziert.
Es sei $H = H_0$ chiral bezüglich

$$J = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{C}^L} & 0 \\ 0 & -1_{\mathbb{C}^L} \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L})),$$

das heißt, es gilt $J^* H J = -H$ und Teilchen-Loch-symmetrisch bezüglich

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L})),$$

das heißt, es gilt $K^* \overline{H} K = -H$, wobei $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ mit $\sigma_2 \otimes 1_{\mathbb{C}^{\frac{L}{2}}}$ identifiziert wird und L gerade sein muss. Weiter sei vorausgesetzt, dass H_α für $\alpha \in [0,1]$ invertierbar ist.
Aus der Chiralität von H folgt, dass ein Operator $B \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L))$ existiert, sodass $H = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Dabei gilt

$$B = \sum_{|m| \leq r} t_m S_0^m + w,$$

wobei t_m, für $m \in \mathbb{Z}$, $L \times L$-Matrizen sind und w eine im Allgemeinen ortsabhängige $L \times L$-Matrix ist. Damit gilt $H_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & B_\alpha \\ B_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$ für

$$B_\alpha = \sum_{|m| \leq r} t_m S_\alpha^m + w.$$

Insbesondere gilt $J^* H_\alpha J = -H_\alpha$ für alle $\alpha \in [0,1]$, H_α ist also für alle α chiral bezüglich J. Allerdings ist H_α im Allgemeinen nicht für alle α Teilchen-Loch-symmetrisch. Es gilt $H_\alpha |H_\alpha|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & U_\alpha \\ U_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$ für $U_\alpha = B_\alpha |B_\alpha|^{-1}$ unitär.

Satz 2.18. *Für den stetigen Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha = \frac{1}{2}(G U_\alpha U_0^* + U_0 U_\alpha^* G)$ gilt*

(i) $T_0 = G$,

(ii) $T_\alpha - T_0 \in \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L)) \, \forall \, \alpha \in [0,1]$,

(iii) $T_{1-\alpha} = (i\sigma_2 U_0^*)^* (T_\alpha)^t (i\sigma_2 U_0^*)$

und G und U_0^* sind ungerade symmetrisch bezüglich $i\sigma_2$. Damit ist der $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss $\mathrm{Sf}_2(T_0, U_0^*)$ wohldefiniert und gegeben durch

$$\mathrm{Sf}_2(T_0, U_0^*) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto T_\alpha) \bmod 2. \tag{3}$$

Beweis. Offensichtlich ist $i\sigma_2$ reell und unitär und es gilt $(i\sigma_2)^2 = -1_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^L)}$. Es gilt $T_0 = G = (i\sigma_2)^* G^t (i\sigma_2)$, $\|G\| = 1$ und $\sigma_{ess}(G) = \{\pm 1\}$. Weiter ist $B_0 - B_\alpha$ kompakt und damit auch $U_0 - U_\alpha$ was (ii) impliziert. Aus der Teilchen-Loch-Symmetrie von H folgt

$$\begin{aligned} -H = -\begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \overline{B} \\ B^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & (i\sigma_2)^* B^t (i\sigma_2) \\ (i\sigma_2)^* \overline{B} (i\sigma_2) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und damit

$$B = (i\sigma_2)^* B^t (i\sigma_2).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (i\sigma_2)^* U_0^t (i\sigma_2) &= ((i\sigma_2)^* |B|^t (i\sigma_2))^{-1} (i\sigma_2)^* B^t (i\sigma_2) \\ &= ((i\sigma_2)^* (B^t (B^*)^t)^{\frac{1}{2}} (i\sigma_2))^{-1} B \\ &= (BB^*)^{-\frac{1}{2}} B = U_0 \end{aligned}$$

also ist U_0, und damit auch U_0^*, ungerade symmetrisch bezüglich $i\sigma_2$. Es verbleibt (iii) zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{|m| \leq r} t_m S_0^m + w = B = (i\sigma_2)^* B^t (i\sigma_2) &= (i\sigma_2)^* (\sum_{|m| \leq r} S_0^{-m} t_m^t + w^t)(i\sigma_2) \\ &= \sum_{|m| \leq r} S_0^{-m} (i\sigma_2)^* t_m^t (i\sigma_2) + (i\sigma_2)^* w^t (i\sigma_2). \end{aligned}$$

und damit folgt

$$(i\sigma_2)^* w^t (i\sigma_2) = w$$

und

$$t_{-m} S_0^{-m} = S_0^{-m} (i\sigma_2)^* t_m^t (i\sigma_2) \Leftrightarrow S_0^m t_{-m} S_0^{-m} = (i\sigma_2)^* t_m^t (i\sigma_2).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
(i\sigma_2)^* B_\alpha^t (i\sigma_2) &= (i\sigma_2)^* (\sum_{|m|\leq r} S_{-\alpha}^{-m} t_m^t + w^t)(i\sigma_2) \\
&= \sum_{|m|\leq r} S_{-\alpha}^{-m} (i\sigma_2)^* t_m^t (i\sigma_2) + (i\sigma_2)^* w^t (i\sigma_2) \\
&= \sum_{|m|\leq r} S_{-\alpha}^{-m} S_0^m t_{-m} S_0^{-m} + w \\
&= \sum_{|m|\leq r} t_{-m} S_{-\alpha}^{-m} + w = B_{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Analog zu Obigem folgt

$$\begin{aligned}
(i\sigma_2)^* U_\alpha^t (i\sigma_2) &= ((i\sigma_2)^* |B_\alpha|^t (i\sigma_2))^{-1} (i\sigma_2)^* B_\alpha^t (i\sigma_2) \\
&= ((i\sigma_2)^* (B_\alpha^t (B_\alpha^*)^t)^{\frac{1}{2}} (i\sigma_2))^{-1} B_{-\alpha} \\
&= (B_{-\alpha} B_{-\alpha}^*)^{-\frac{1}{2}} B_{-\alpha} = U_{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
(i\sigma_2)^* T_\alpha^t (i\sigma_2) &= \frac{1}{2}((i\sigma_2)^* (U_0^*)^t U_\alpha^t G^t (i\sigma_2) + (i\sigma_2)^* G^t (U_\alpha^*)^t U_0 (i\sigma_2)) \\
&= \frac{1}{2}(U_0^* U_{-\alpha} G + G U_{-\alpha}^* U_0)
\end{aligned}$$

es folgt

$$\begin{aligned}
(i\sigma_2 U_0^*)^* T_\alpha^t (i\sigma_2 U_0^*) &= \frac{1}{2}(U_0 (U_0^* U_{-\alpha} G + G U_{-\alpha}^* U_0) U_0^*) \\
&= \frac{1}{2}(U_{-\alpha} G U_0^* + U_0 G U_{-\alpha}^*) \\
&= \frac{1}{2}(G U_{1-\alpha} U_0^* + U_0 U_{1-\alpha}^* G) = T_{1-\alpha},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. Behauptung (3) folgt damit aus Satz 2.14. □

Satz 2.19. *Sei $\pi = \chi_{(0,\infty)}(G)$ die Spektralprojektion von G auf $(0,\infty)$ und der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto T_\alpha = \frac{1}{2}(GU_\alpha U_0^* + U_0 U_\alpha^* G)$ wie oben. Dann ist $\pi U_0^* \pi$, aufgefasst als Operator auf $\mathrm{Ran}(\pi)$ eine bezüglich $i\sigma_2|_{\mathrm{Ran}(\pi)}$ ungerade symmetrische, wesentlich unitäre Kontraktion. Weiter ist π reell und es gilt $[\pi, i\sigma_2] = 0$. Nach Satz 2.17 gilt*

$$\mathrm{Ind}_2(\pi U_0^* \pi) = \mathrm{Sf}_2(T_0, U_0^*).$$

Beweis. Da G reell ist und $\chi_{(0,\infty)} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ reell ist, ist π reell und offensichtlich gilt $[\pi, i\sigma_2] = 0$. Auf $\mathrm{Ran}(\pi)$ gilt $(i\sigma_2|_{\mathrm{Ran}(\pi)})^*(\pi U_0^*\pi)^t(i\sigma_2|_{\mathrm{Ran}(\pi)})) = (i\sigma_2)^*\pi(U_0^*)^t\pi(i\sigma_2) = \pi(i\sigma_2)^*(U_0^*)^t(i\sigma_2)\pi = \pi U_0^*\pi$ und $\|\pi U_0^*\pi\| \leq \|\pi\|\|U_0^*\|\|\pi\| \leq 1$, also ist $\pi U_0^*\pi$ eine bezüglich $i\sigma_2|_{\mathrm{Ran}(\pi)}$ ungerade symmetrische Kontraktion. Verbleibt zu zeigen, dass $\pi U_0^*\pi$ wesentlich unitär ist. Die Dimension des Bildes von $\pi B\pi - B\pi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L))$ ist durch rL beschränkt und damit insbesondere endlich. Damit ist $\pi B\pi - B\pi$ kompakt und damit auch $\pi B - B\pi$. Es folgt, dass $\pi U_0\pi - U_0\pi$ kompakt ist und aus der Kompaktheit von $0 = \pi - \pi U_0^* U_0\pi = \pi - \pi U_0^*\pi U_0\pi + \pi U_0^*(\pi U_0\pi - U_0\pi)$ folgt die Kompaktheit von $\pi - \pi U_0^*\pi U_0\pi$, also ist $1_{\mathrm{Ran}(\pi)} - (\pi U_0^*\pi)(\pi U_0^*\pi)^* = 1_{\mathrm{Ran}(\pi)} - \pi U_0^*\pi U_0\pi$ kompakt. Analog ist $\pi U_0^*\pi - U_0^*\pi \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L))$ kompakt und nach obigem Argument auch $1_{\mathrm{Ran}(\pi)} - (\pi U_0^*\pi)^*(\pi U_0^*\pi)$. Da $T_0 = 2\pi - 1_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^L)}$ gilt, folgt mit Satz 2.17 die Behauptung. □

Beispiel 2.20. Auf $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^4)$ sei

$$H = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \text{ für } B = \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & S_0^{-1} \end{pmatrix} = U_0$$

gegeben. Damit ist H chiral bezüglich

$$J = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{C}^2} & 0 \\ 0 & -1_{\mathbb{C}^2} \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^4)),$$

das heißt, es gilt $J^*HJ = -H$ und Teilchen-Loch-symmetrisch bezüglich

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^4)),$$

das heißt, es gilt $K^*\overline{H}K = -H$. Es gilt

$$B_\alpha = U_\alpha = \begin{pmatrix} S_\alpha & 0 \\ 0 & S_\alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

und damit ist $H_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & B_\alpha \\ B_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$ für alle $\alpha \in [0,1]$ chiral bezüglich J, aber es gilt $K^*\overline{H_\alpha}K = -\overline{H_\alpha} \neq -H_\alpha$ für $\alpha \notin \{0,1\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} T_\alpha =& (\sum_{n>0} |n\rangle\langle n| - \cos(\pi\alpha)|0\rangle\langle 0| - \sum_{n<0} |n\rangle\langle n|) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (\sum_{n>1} |n\rangle\langle n| + \cos(\pi\alpha)|1\rangle\langle 1| - \sum_{n<1} |n\rangle\langle n|) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für das Spektrum von T_α gilt $\sigma(T_\alpha) = \{-1, -\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha), 1\}$, wobei $-\cos(\pi\alpha)$ und $\cos(\pi\alpha)$ einfache Eigenwerte sind. Damit gilt

$$\mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \tfrac{1}{2}] \mapsto T_\alpha) = 1 \bmod 2.$$

Mit Satz 2.19 folgt $\mathrm{Ind}_2(\pi U_0^*\pi) = 1$, was man auch direkt berechnen kann.

Für $H = H_0$ wie oben, also chiral bezüglich J und Teilchen-Loch-symmetrisch bezüglich K für J und K wie oben, betrachten wir nun anstelle des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ den stetigen Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha} = \frac{1}{2}(H_\alpha + H_{-\alpha})$. Für diesen Weg bleiben beide Symmetrien erhalten, das heißt es gilt $J^*\widetilde{H_\alpha}J = -\widetilde{H_\alpha}$ für alle α und $K^*\overline{\widetilde{H_\alpha}}K = -\widetilde{H_\alpha}$ für alle α. Es gilt $\widetilde{H_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{B_\alpha} \\ \widetilde{B_\alpha}^* & 0 \end{pmatrix}$ für $\widetilde{B_\alpha} = \frac{1}{2}(B_\alpha + B_{-\alpha})$. Weiter sei vorausgesetzt, dass $\widetilde{H_\alpha}$ für $\alpha \in [0,1]$ invertierbar ist. Damit gilt $\widetilde{H_\alpha}|\widetilde{H_\alpha}|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \widetilde{U_\alpha} \\ \widetilde{U_\alpha}^* & 0 \end{pmatrix}$ für $\widetilde{U_\alpha} = \widetilde{B_\alpha}|\widetilde{B_\alpha}|^{-1}$ unitär.

Satz 2.21. *Für den stetigen Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{T_\alpha} = \frac{1}{2}(G\widetilde{U_\alpha}\widetilde{U_0}^* + \widetilde{U_0}\widetilde{U_\alpha}^*G)$ gilt*

(i) $\widetilde{T_0} = G$,

(ii) $\widetilde{T_\alpha} - \widetilde{T_0} \in \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^L))\,\forall\,\alpha \in [0,1]$,

(iii) $\widetilde{T_{1-\alpha}} = (i\sigma_2\widetilde{U_0}^*)^*(\widetilde{T_\alpha})^t(i\sigma_2\widetilde{U_0}^*)$

und G und $\widetilde{U_0}^*$ sind ungerade symmetrisch bezüglich $i\sigma_2$. Damit ist der $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss $\mathrm{Sf}_2(\widetilde{T_0}, \widetilde{U_0}^*)$ wohldefiniert und gegeben durch

$$\mathrm{Sf}_2(\widetilde{T_0}, \widetilde{U_0}^*) = \mathrm{Sf}(\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto \widetilde{T_\alpha}) \bmod 2. \tag{4}$$

Beweis. Es gilt $H_0 = \widetilde{H_0}$ und damit $U_0 = \widetilde{U_0}$, also ist $\widetilde{U_0}^* = U_0^*$ ungerade symmetrisch bezüglich $i\sigma_2$. Weiter folgt $\widetilde{T_0} = T_0 = G$, was nach Satz 2.18 ungerade symmetrisch bezüglich $i\sigma_2$ ist. Weiter ist $B_0 - B_\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ kompakt. Daraus folgt, dass $\widetilde{B_0} - \widetilde{B_\alpha} = \frac{1}{2}(B_0 - B_\alpha + B_0 - B_{-\alpha})$ für $\alpha \in [0,1]$ kompakt ist und damit auch $\tilde{U}_0 - \tilde{U}_\alpha$ was (ii) impliziert. Es verbleibt (iii) zu zeigen. Es gilt $(i\sigma_2)^*B_\alpha^t(i\sigma_2) = B_{-\alpha}$ und damit $(i\sigma_2)^*\widetilde{B_\alpha}^t(i\sigma_2) = \widetilde{B_{-\alpha}} = \widetilde{B_\alpha}$. Analog zu Obigem folgt $(i\sigma_2)^*\widetilde{U_\alpha}^t(i\sigma_2) = \widetilde{U_{-\alpha}} = \widetilde{U_\alpha}$ und damit

$$\begin{aligned}(i\sigma_2)^*\widetilde{T_\alpha}^t(i\sigma_2) &= \frac{1}{2}((i\sigma_2)^*(\widetilde{U_0}^*)^t\widetilde{U_\alpha}^tG^t(i\sigma_2) + (i\sigma_2)^*G^t(\widetilde{U_\alpha}^*)^t\widetilde{U_0}(i\sigma_2)) \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{U_0}^*\widetilde{U_{-\alpha}}G + G\widetilde{U_{-\alpha}}^*\widetilde{U_0}).\end{aligned}$$

Da $G\widetilde{U_{-\alpha}} = \widetilde{U_{1-\alpha}}G$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}(i\sigma_2\widetilde{U_0}^*)^*\widetilde{T_\alpha}^t(i\sigma_2\widetilde{U_0}^*) &= \frac{1}{2}(\widetilde{U_0}(\widetilde{U_0}^*\widetilde{U_{-\alpha}}G + G\widetilde{U_{-\alpha}}^*\widetilde{U_0})\widetilde{U_0}^*) \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{U_{-\alpha}}G\widetilde{U_0}^* + \widetilde{U_0}G\widetilde{U_{-\alpha}}^*) \\ &= \frac{1}{2}(G\widetilde{U_{1-\alpha}}\widetilde{U_0}^* + \widetilde{U_0}\widetilde{U_{1-\alpha}}^*G) = \widetilde{T_{1-\alpha}},\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Da $U_0 = \widetilde{U_0}$ und $T_0 = \widetilde{T_0}$ gilt, folgt

$$\mathrm{Ind}_2(\pi\widetilde{U_0}^*\pi) = \mathrm{Ind}_2(\pi U_0^*\pi) = \mathrm{Sf}_2(T_0, U_0^*) = \mathrm{Sf}_2(\widetilde{T_0}, \widetilde{U_0}^*)$$

für $\pi = \chi_{(0,\infty)}(G)$.

3 Paritätsfluss

Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ einen reellen, separablen Hilbertraum. Wir betrachten stetige Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$, für die H_0 und H_1 invertierbar sind. Dabei heißt ein Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chiral, falls gilt

$$JHJ = -H \text{ für } J = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & -1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \end{pmatrix},$$

wobei $1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}}$ die Identität auf $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ bezeichnet. Für das Spektrum eines chiralen Operators H gilt $\sigma(H) = -\sigma(H)$. Damit verschwindet der gewöhnliche spektrale Fluss des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$. Dennoch gibt es topologisch nichttriviale Wege. Das Ziel ist es, diese zu charakterisieren.
Betrachtet man für $\mathcal{H}_\mathbb{R} = \mathbb{R}$ die stetigen Wege

$$\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha - \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & |\alpha - \frac{1}{2}| \\ |\alpha - \frac{1}{2}| & 0 \end{pmatrix}$$

chiraler, selbstadjungierter Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ so gilt $\sigma(H_\alpha) = \sigma(\tilde{H}_\alpha) = \{\alpha - \frac{1}{2}, -(\alpha - \frac{1}{2})\}$. Für H_α ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $\alpha - \frac{1}{2}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-(\alpha - \frac{1}{2})$. Der Eigenwert zu einem festen Eigenvektor ändert also im Verlauf des Weges sein Vorzeichen. Damit gibt es keine stetige Homotopie $\beta \in [0,1] \mapsto H_\alpha(\beta)$ innerhalb der chiralen, selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für die gilt $H_\alpha(1) = H_\alpha$, $H_0(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ für alle β und $H_1(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ für alle β, sodass $0 \notin \sigma(H_\alpha(0))$ für alle α, denn die Eigenwerte und Eigenvektoren von $H_\alpha(\beta)$ hängen stetig von (α, β) ab. Für $\widetilde{H_\alpha}$ ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $|\alpha - \frac{1}{2}|$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zum Eigenwert $-|(\alpha - \frac{1}{2})|$. Der Eigenwert zu einem festen Eigenvektor ändert also im Verlauf des Weges sein Vorzeichen nicht. Die Abbildung $\beta \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha}(\beta) = ((|\alpha - \frac{1}{2}| - \frac{1}{2})\beta + \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist eine Homotopie innerhalb der chiralen, selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für die gilt $\widetilde{H_\alpha}(1) = \widetilde{H_\alpha}$, $\widetilde{H_0}(\beta) = \widetilde{H_1}(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ für alle β und $\widetilde{H_\alpha}(0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ für alle α. Damit gilt insbesondere $0 \notin \sigma(\widetilde{H_\alpha}(0))$ für alle α.

3.1 Paritätsfluss in endlichdimensionalen Hilberträumen

Nach diesem einführenden Beispiel wird zunächst, für den Fall, dass $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ endlichdimensional ist, der Paritätsfluss entlang des linearen Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha = (1-\alpha)H_0 + \alpha H_1$, der die chiralen, selbstadjungierten, invertierbaren Operatoren H_0 und H_1 verbindet, definiert.

Definition 3.1. *Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H_0, H_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren. Dann gibt es einen invertierbaren Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ sodass $JAJ = A$ und $H_1 = A^* H_0 A$ gilt und der $\mathbb{Z}_2$-wertige Paritätsfluss entlang des linearen Weges von H_0 nach H_1 ist definiert als*

$$\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \mathrm{sgn}(\det(A)) \in \mathbb{Z}_2.$$

Im Folgenden wird die multiplikative Gruppe $(\mathbb{Z}_2, \cdot)$ mit der additiven Gruppe $(\mathbb{Z}_2, +)$ identifiziert, also -1 mit 1 und 1 mit 0.

Lemma 3.2. *Der $\mathbb{Z}_2$-wertige Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1)$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass für H_0 und H_1 wie oben ein invertierbarer Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ existiert, sodass $JAJ = A$ und $H_1 = A^* H_0 A$ gilt. Für $i \in \{0,1\}$ und invertierbare Operatoren $H_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ gilt $JH_iJ = -H_i = -H_i^*$ genau dann, wenn ein invertierbarer Operator $T_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})$ existiert, sodass $H_i = \begin{pmatrix} 0 & T_i \\ T_i^* & 0 \end{pmatrix}$ gilt. Damit ist $A = \begin{pmatrix} (T_0^*)^{-1}T_1^* & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbar und es gilt $JAJ = A$ und $A^* H_0 A = H_1$.
Weiter ist zu zeigen, dass $\mathrm{sgn}(\det(A))$ nicht von der Wahl von A abhängt. Sei also $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbar, sodass $JAJ = A$, $JBJ = B$, $A^* H_0 A = H_1$ und $B^* H_0 B = H_1$. Es ist zu zeigen, dass $\mathrm{sgn}(\det(A)) = \mathrm{sgn}(\det(B))$ gilt. Aus $JAJ = A$ folgt $A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ für $E, F \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})$ und aus der Invertierbarkeit von A folgt, dass E und F invertierbar sind. Analog gilt $B = \begin{pmatrix} E' & 0 \\ 0 & F' \end{pmatrix}$ für invertierbare Operatoren $E', F' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})$. Aus $A^* H_0 A = H_1$ und $B^* H_0 B = H_1$ folgt $(A^{-1})^* B^* H_0 B A^{-1} = H_0$ oder äquivalent $(E^{-1})^*(E')^* T_0 F' F^{-1} = T_0$ für $H_0 = \begin{pmatrix} 0 & T_0 \\ T_0^* & 0 \end{pmatrix}$ mit $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbar. Also gilt $\det((E^{-1})^*)\det((E')^*)\det(T_0)\det(F')\det(F^{-1}) = \det(T_0)$ und aus der Invertierbarkeit von T_0 folgt

$$\begin{aligned}
& \det((E^{-1})^*)\det((E')^*)\det(F')\det(F^{-1}) = 1 \\
\Leftrightarrow \quad & \det(E^{-1})\det(E')\det(F')\det(F^{-1}) = 1 \\
\Rightarrow \quad & \mathrm{sgn}(\det(E^{-1})\det(F^{-1})) = \mathrm{sgn}(\det(E')\det(F')) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{sgn}(\det(E)\det(F)) = \mathrm{sgn}(\det(E')\det(F')) \\
\Leftrightarrow \quad & \mathrm{sgn}(\det(A)) = \mathrm{sgn}(\det(B)),
\end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Lemma 3.3. *Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H_0, H_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren für die ein stetiger Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chiraler, selbstadjungierter, invertierbarer Operatoren existiert, der H_0 und H_1 verbindet, dann gilt* $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = 0$.

Beweis. Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & T_\alpha \\ T_\alpha^* & 0 \end{pmatrix}$ der oben beschriebene Weg. Dann ist $T_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R})$ für alle α invertierbar. Der stetige Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto A_\alpha := \begin{pmatrix} (T_0^*)^{-1} T_\alpha^* & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \end{pmatrix}$ verbindet $A_0 = 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}}$ mit $A_1 := \begin{pmatrix} (T_0^*)^{-1} T_1^* & 0 \\ 0 & 1_{\mathcal{H}_\mathbb{R}} \end{pmatrix}$. Da A_α für alle α invertierbar ist, gilt $\mathrm{sgn}(\det(A_1)) = \mathrm{sgn}(\det(A_0)) = 1$ und weil $A_1^* H_0 A_1 = H_1$ gilt, folgt daraus $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = 0$. □

Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H_0, H_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren. Wir betrachten den linearen Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha = (1-\alpha)H_0 + \alpha H_1$ der H_0 mit H_1 verbindet. Entlang dieses Weges ändern sich die Eigenwerte und Eigenvektoren von H_α stetig. Sei also $\sigma(H_\alpha) = \{\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha), ..., \lambda_{2N}(\alpha)\}$, für $2N = \dim(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$, das Spektrum von H_α, wobei jeder Eigenwert mit seiner Vielfachkeit gelistet wird, dann ist es möglich, die Eigenwerte in solcher Reihenfolge zu listen, dass es für $k \in \{1, 2, ..., 2N\}$ Eigenvektoren $\psi_k(\alpha)$ mit $\|\psi_k(\alpha)\| = 1$ von H_α zum Eigenwert $\lambda_k(\alpha)$ gibt, sodass $\alpha \in [0,1] \mapsto (\lambda_k(\alpha), \psi_k(\alpha))$ stetig ist. Dabei können die Eigenvektoren so gewählt werden, dass für $k, l \in \{1, 2, ..., 2N\}$, sodass $k \neq l$ gilt, die entsprechenden Eigenvektoren orthogonal aufeinander stehen, also $\psi_k(\alpha) \perp \psi_l(\alpha)$ für alle α gilt und zusätzlich $\psi_{k+N}(\alpha) = J\psi_k(\alpha)$ für alle $k \leq N$ und alle α gilt.

Lemma 3.4. *Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H_0, H_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren. Sei $H_\alpha = (1 - \alpha)H_0 + \alpha H_1$ und $\sigma(H_\alpha) = \{\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha), ..., \lambda_{2N}(\alpha)\}$ für $2N = \dim(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ das Spektrum von H_α, gelistet wie oben. Dann entspricht der Paritätsfluss* $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1)$ *der Anzahl der Eigenwerte $\lambda_k(\alpha)$, für die gilt $\lambda_k(0) < 0$ und $\lambda_k(1) > 0$ modulo 2. Es gilt also*

$$\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \#\{k \in \{1, 2, \ldots, 2N\} | \lambda_k(0) < 0, \lambda_k(1) > 0\} \bmod 2.$$

Beweis. Gemäß Spektralsatz existiert für $i = 1, 2$ eine unitäre Matrix $U_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$, sodass $H_i = U_i D_i U_i^*$ für eine Diagonalmatix D_i gilt. Aus der Chiralität von H_i folgt, dass $\sigma(H_i) = -\sigma(H_i)$ gilt und damit D_i so gewählt werden kann, dass $D_i = \begin{pmatrix} P_i & 0 \\ 0 & -P_i \end{pmatrix}$ für eine positive, diagonale $N \times N$-Matrix P_i gilt. Damit existiert eine positive, diagonale, invertierbare $2N \times 2N$-Matrix E, sodass $D_0 = ED_1E$ gilt und E ist von der Form $E = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$ für eine positive, diagonale, invertierbare $N \times N$-Matrix F. Weiter folgt aus der Chiralität von H_i, dass U_i so gewählt werden kann, dass die $N + j$te Spalte von U_i das Bild der $j$ten Spalte von U_i unter J ist, es gilt also $U_i = \begin{pmatrix} V_i & V_i \\ \tilde{V}_i & -\tilde{V}_i \end{pmatrix}$ für invertierbare $N \times N$-Matrizen V_i und $\tilde{V}_i$. Daraus folgt

$H_1 = A^* H_0 A$ für

$$A := U_0 E^{-1} U_1^* = \begin{pmatrix} 2V_0F^{-1}V_1^* & 0 \\ 0 & 2\tilde{V}_0F^{-1}\tilde{V}_1^* \end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist A invertierbar und es gilt $JAJ = A$. Die k-te Spalte von U_0 ist ein Eigenvektor $\psi_k(0)$ von H_0 zum Eigenwert $\lambda_k(0)$. Sei $\widetilde{U_1}$ die unitäre Matrix, deren k-te Spalte durch $\psi_k(1)$ gegeben ist. Dann gilt $\mathrm{sgn}(\det(U_0)) = \mathrm{sgn}(\det(\widetilde{U_1}))$ und U_1 kann so gewählt werden, dass sich $\widetilde{U_1}$ durch Vertauschen von Spalten in U_1 überführen lässt. Dabei entspricht jeder Eigenwert $\lambda_k(\alpha)$, für den gilt $\lambda_k(0) < 0$ und $\lambda_k(1) > 0$ dem Vertauschen von 2 Spalten, zusätzlich dazu wird eine gerade Anzahl von Spalten vertauscht. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(\det(A)) &= \mathrm{sgn}(\det(U_0))\mathrm{sgn}(\det(E^{-1}))\mathrm{sgn}(\det(U_1^*)) \\ &= \mathrm{sgn}(\det(U_0))\mathrm{sgn}(\det(U_1)) = (-1)^{\#\{k\in\{1,2,\ldots,2N\}|\lambda_k(0)<0,\lambda_k(1)>0\}}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 3.5. *Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H_0, H_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren. Für invertierbare Operatoren $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$, sodass $JBJ = B$ und $JCJ = C$ und* $\det(C) > 0$ *gilt, folgt*

$$\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \mathrm{PF}_2(H_1, H_0) = \mathrm{PF}_2(BH_0B^*, BH_1B^*) = \mathrm{PF}_2(CH_0C^*, H_1).$$

Sei $\mathcal{H}'_\mathbb{R}$ ein weiterer endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum und $H'_0, H'_1 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}'_\mathbb{R})$, bezüglich des Chiralitätsoperators $J' = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{H}'_\mathbb{R}} & 0 \\ 0 & -1_{\mathcal{H}'_\mathbb{R}} \end{pmatrix}$, chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren, dann gilt

$$\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) + \mathrm{PF}_2(H'_0, H'_1) = \mathrm{PF}_2(H_0 \oplus H'_0, H_1 \oplus H'_1),$$

wobei modulo 2 addiert wird und der Chiralitätsoperator auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}'_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}'_\mathbb{R}$ durch $J \oplus J'$ gegeben ist.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ ein invertierbarer Operator, sodass $JAJ = A$ und $H_1 = A^*H_0A$ gilt, dann folgt $JA^{-1}J = A^{-1}$ und $H_0 = (A^{-1})^*H_1A^{-1}$. Aus $\mathrm{sgn}(\det(A)) = \mathrm{sgn}(\det(A^{-1}))$ folgt damit $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \mathrm{PF}_2(H_1, H_0)$.
Sei $H_1 = A^*H_0A$ für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbar, sodass $JAJ = A$ gilt, dann folgt $BH_1B^* = BA^*H_0AB^* = BA^*B^{-1}(BH_0B^*)(B^{-1})^*AB^*$ und $J(B^{-1})^*AB^*J = (B^{-1})^*AB^*$. Aus $\mathrm{sgn}(\det((B^{-1})^*AB^*)) = \mathrm{sgn}(\det(A))$ folgt damit $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \mathrm{PF}_2(BH_0B^*, BH_1B^*)$.
Sei $H_1 = A^*H_0A$ für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbar, sodass $JAJ = A$ gilt, dann folgt $H_1 = A^*C^{-1}(CH_0C^*)(C^{-1})^*A$ und $J(C^{-1})^*AJ = (C^{-1})^*A$. Aus $\mathrm{sgn}(\det((C^{-1})^*A))$ $= \mathrm{sgn}(\det(A))$ folgt damit $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) = \mathrm{PF}_2(CH_0C^*, H_1)$.
Sei $H'_1 = (A')^*H'_0A'$ für einen invertierbaren Operator $A' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}'_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}'_\mathbb{R})$, sodass $J'A'J' = A'$ gilt. Sei weiter $H_1 = A^*H_0A$ für einen invertierbaren Operator

$A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$, sodass $JAJ = A$ gilt. Dann gilt $H_1 \oplus H_1' = (A \oplus A')^*(H_0 \oplus H_0')(A \oplus A')$ und $(J \oplus J')(A \oplus A')(J \oplus J') = (A \oplus A')$. Aus $\operatorname{sgn}(\det(A \oplus A')) = \operatorname{sgn}(\det(A))\operatorname{sgn}(\det(A'))$ folgt damit $\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) + \mathrm{PF}_2(H_0', H_1') = \mathrm{PF}_2(H_0 \oplus H_0', H_1 \oplus H_1')$ modulo 2. □

Lemma 3.6. *Sei $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ ein endlichdimensionaler reeller Hilbertraum. Für chirale, selbstadjungierte, invertierbare Operatoren $H_0, H_1, H_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ gilt*

$$\mathrm{PF}_2(H_0, H_1) + \mathrm{PF}_2(H_1, H_2) = \mathrm{PF}_2(H_0, H_2),$$

wobei modulo 2 addiert wird.

Beweis. Es seien $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ invertierbare Operatoren, sodass $JAJ = A, JBJ = B$ und $H_1 = A^*H_0A$ sowie $H_2 = B^*H_1B$ gilt. Dann ist AB invertierbar und es gilt $JABJ = AB$ und $H_2 = B^*A^*H_0AB$. Aus $\operatorname{sgn}(\det(AB)) = \operatorname{sgn}(\det(A))\operatorname{sgn}(\det(B))$ folgt damit die Behauptung. □

Das folgende Lemma ist wesentliches Element des Beweises von Satz 3.11.

Lemma 3.7. *Seien $\mathcal{H}_\mathbb{R}$, $\mathcal{H}_\mathbb{R}'$ und $\mathcal{H}_\mathbb{R}''$ reelle Hilberträume der gleichen, endlichen Dimension. Für $\mathcal{E} := \mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$, $\mathcal{E}' := \mathcal{H}_\mathbb{R}' \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}'$ und $\mathcal{E}'' := \mathcal{H}_\mathbb{R}'' \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}''$ sei $J \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ definiert wie oben und analog $J' \in \mathcal{B}(\mathcal{E}')$ und $J'' \in \mathcal{B}(\mathcal{E}'')$. Seien weiter $V : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$, $V' : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ und $V'' : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}$ Isomorphismen, für die gilt $VJ = J'V$, $V'J' = J''V'$ und $V''J'' = JV''$. Für chirale, selbstadjungierte invertierbare Operatoren, $H \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$, $H' \in \mathcal{B}(\mathcal{E}')$ und $H'' \in \mathcal{B}(\mathcal{E}'')$, gilt*

$$\mathrm{PF}_2(H, V^*H'V) = \mathrm{PF}_2(VHV^*, H').$$

Falls $\|V''((V')^*)^{-1}V - 1_\mathcal{E}\| < 1$ gilt, folgt daraus

$$\mathrm{PF}_2(H, V''H''(V'')^*) = \mathrm{PF}_2(H, V^*H'V) + \mathrm{PF}_2(H', (V')^*H''V'),$$

wobei modulo 2 addiert wird.

Beweis. Nach Lemma 3.5 gilt $\mathrm{PF}_2(VHV^*, H') = \mathrm{PF}_2(V^*VH(V^*V)^*, V^*H'V) = \mathrm{PF}_2(H, V^*H'V)$, wobei die letzte Gleichheit folgt, weil $V^*V \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ ein positiv definiter Operator ist und damit $\det(V^*V) > 0$ gilt.
Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ invertierbar, sodass $JAJ = A$ und $A^*HA = V^*H'V$ gilt und $A' \in \mathcal{B}(\mathcal{E}')$ invertierbar, sodass $J'A'J' = A'$ und $(A')^*H'A' = (V')^*H''V'$ gilt. Für $B = AV^{-1}A'(V')^{-1}(V'')^*$ gilt

$$\begin{aligned} JBJ &= JAV^{-1}A'(V')^{-1}J''(V'')^* \\ &= JAV^{-1}A'J'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= JAV^{-1}J'A'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= JAJV^{-1}A'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= AV^{-1}A'(V')^{-1}(V'')^* = B \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B^*HB &= V''((V')^*)^{-1}(A')^*(V^*)^{-1}A^*HAV^{-1}A'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= V''((V')^*)^{-1}(A')^*(V^*)^{-1}V^*H'VV^{-1}A'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= V''((V')^*)^{-1}(A')^*H'A'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= V''((V')^*)^{-1}(V')^*H''V'(V')^{-1}(V'')^* \\ &= V''H''(V'')^*. \end{aligned}$$

Da $\|V''((V')^*)^{-1}V - 1_{\mathcal{E}}\| < 1$ gilt, ist $\alpha \in [0,1] \mapsto 1_{\mathcal{E}} + \alpha(V''((V')^*)^{-1}V - 1_{\mathcal{E}})$ ein stetiger Weg invertierbarer Operatoren, der $1_{\mathcal{E}}$ mit $V''((V')^*)^{-1}V$ verbindet. Damit gilt $\operatorname{sgn}(\det(V''((V')^*)^{-1}V)) = \operatorname{sgn}(\det(1_{\mathcal{E}})) = 1$ und nach Adjungieren folgt $\operatorname{sgn}(\det(V^*(V')^{-1}(V'')^*)) = 1$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\det(B)) &= \operatorname{sgn}(\det(AV^{-1}A'(V^*)^{-1}V^*(V')^{-1}(V'')^*)) \\ &= \operatorname{sgn}(\det(A))\operatorname{sgn}(\det(V^{-1}A'(V^*)^{-1}))\operatorname{sgn}(\det(V^*(V')^{-1}(V'')^*)) \\ &= \operatorname{sgn}(\det(A))\operatorname{sgn}(\det(A')) \end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{PF}_2(H, V''H''(V'')^*) = \mathrm{PF}_2(H, V^*H'V) + \mathrm{PF}_2(H', (V')^*H''V'),$$

wobei modulo 2 addiert wird. □

Das folgende Lemma entspricht Proposition 2.7 in [4]. Es werden Bedingungen aufgezeigt, unter denen Lemma 3.7 anwendbar ist.

Lemma 3.8. *Seien $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{E}''$ Unterräume des gleichen reellen Hilbertraumes $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Sei $Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{E}$, $Q' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{E}'$ und $Q'' \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{R}})$ die orthogonale Projektion auf $\mathcal{E}''$. Sei $V : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ definiert als $V\psi = Q'\psi$. Es gilt $\|V\| \leq 1$ und wenn $\|Q - Q'\| < \epsilon$ für ein $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ gilt, dann ist V ein Isomorphismus, gilt sogar $\epsilon \leq \frac{1}{4}$ so folgt $\|V^{-1}\| < 1 + 2\epsilon$. Weiter gilt $\|V^*V - 1_{\mathcal{E}}\| < 2\epsilon$ und $\|VV^* - 1_{\mathcal{E}'}\| < 2\epsilon$.*
Sei $V' : \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ definiert als $V'\psi' = Q''\psi'$ und $V'' : \mathcal{E}'' \to \mathcal{E}$ definiert als $V''\psi'' = Q\psi''$. Wenn zusätzlich zu Obigem gilt $\|Q' - Q''\| < \epsilon$ und $\|Q - Q''\| < \epsilon$, dann sind V, V' und V'' Isomorphismen und es gilt $\|V''((V')^*)^{-1}V - 1_{\mathcal{E}}\| < 6\epsilon$.

Beweis. Sei $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine lineare Erweiterung von V gegeben durch $W\psi = 0$ für $\psi \in \mathcal{E}^\perp$ und analog seien die linearen Erweiterungen $W' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ von V' und $W'' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ von V'' definiert. Für $\psi \in \mathcal{H}$ gilt $\|(W-Q)\psi\| = \|(W-Q)Q\psi\| = \|(Q'-Q)Q\psi\| < \epsilon\|Q\psi\| \leq \epsilon\|\psi\|$. Also gilt $\|(W-Q)\| < \epsilon$ und damit auch $\|(W^*-Q)\| < \epsilon$. Damit gilt $\|W^*W-Q\| = \|W^*(W-Q)+(W^*-Q)Q\| < 2\epsilon$ und durch Einschränken auf $\mathcal{E}$ folgt $\|V^*V - 1_{\mathcal{E}}\| < 2\epsilon$. Analog gilt $\|VV^* - 1_{\mathcal{E}'}\| < 2\epsilon$, damit sind $V^*V \in \mathcal{B}(\mathcal{E})$ und $VV^* \in \mathcal{B}(\mathcal{E}')$ für $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ invertierbar. Damit ist V für $\epsilon \leq \frac{1}{2}$ ein Isomorphismus. Weiter gilt für $\psi \in \mathcal{E}$

$$\|V\psi\|^2 = \|\psi\|^2 - \langle\psi|(1_{\mathcal{E}} - V^*V)\psi\rangle > (1-2\epsilon)\|\psi\|^2.$$

Daraus folgt $\|V^{-1}\| < (1-2\epsilon)^{-\frac{1}{2}} < 1+2\epsilon$ für $\epsilon \leq \frac{1}{4}$.
Weiter gilt

$$\|V' - ((V')^*)^{-1}\| = \|(V'(V')^* - 1_{\mathcal{E}''})((V')^*)^{-1}\| < 2\epsilon(1+2\epsilon) < 3\epsilon$$

für $\epsilon \leq \frac{1}{4}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|V''((V')^*)^{-1}V - 1_{\mathcal{E}}\| &< 3\epsilon + \|V''(V')V - 1_{\mathcal{E}}\| \\ &= 3\epsilon + \|W''W'W - Q\| \\ &= 3\epsilon + \|W''W'W - Q''W'W + W'W - Q'W + W - Q\| < 6\epsilon\end{aligned}$$

und damit die letzte Behauptung. □

3.2 Paritätsfluss in unendlichdimensionalen Hilberträumen

Ab jetzt sei $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ ein separabler, aber nicht notwendigerweise endlichdimensionaler, reeller Hilbertraum. Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ ein stetiger Weg chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \oplus \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind. Ziel ist es, für solche Wege einen Paritätsfluss zu definieren.
Für $a > 0$ und $\alpha \in [0,1]$ sei

$$Q_a(\alpha) := \chi_{(-a,a)}(H_\alpha)$$

die Spektralprojektion von H_α auf das Intervall $(-a,a)$ und

$$\mathcal{E}_a(\alpha) := \mathrm{Ran}(Q_a(\alpha))$$

ihr Bild. Da H_α chiral ist, gilt $JQ_a(\alpha)J = Q_a(\alpha)$ und daraus folgt, dass $Q_a(\alpha)H_\alpha Q_a(\alpha)$, aufgefasst als Operator auf $\mathcal{E}_a(\alpha)$, chiral und selbstadjungiert ist. Ist a hinreichend klein, gilt $\dim(\mathcal{E}_a(\alpha)) < \infty$. Falls $\mathrm{Ker}(Q_a(\alpha)H_\alpha Q_a(\alpha))$ nicht trivial ist, existiert ein chiraler, selbstadjungierter Operator R_α auf dem Kern von $Q_a(\alpha)H_\alpha Q_a(\alpha)$. Allerdings hängt R_α im Allgemeinen nicht stetig von α ab, wie auch die Dimension von $\mathrm{Ker}(Q_a(\alpha)H_\alpha Q_a(\alpha))$ im Allgemeinen nicht stetig von α abhängt. Damit ist

$$H_\alpha^{(a)} := Q_a(\alpha)H_\alpha Q_a(\alpha) + R_\alpha \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_a(\alpha)) \tag{5}$$

ein chiraler, selbstadjungierter, invertierbarer Operator.
Da das Spektrum von H_α stetig von α abhängt und das Intervall $[0,1]$ kompakt ist, existiert eine endliche Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 1$ von $[0,1]$ und Werte $a_n > 0$ für $n = 1, \ldots, N$, sodass $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto Q_{a_n}(\alpha)$ stetig ist und damit konstanten, endlichen Rang hat und sodass

$$\|Q_{a_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha')\| < \epsilon, \quad \forall\, \alpha, \alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

für ein $\epsilon \leq \frac{1}{6}$ gilt. Nach Lemma 3.8 ist damit $V_n : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_n)$ gegeben durch $V_n\psi = Q_{a_n}(\alpha_n)\psi$ ein Isomorphismus.

Definition 3.9. *Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ ein stetiger Weg chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind und $\alpha_n, a_n, H_\alpha^{(a)}$ und V_n wie oben. Dann ist der $\mathbb{Z}_2$-wertige Paritätsfluss entlang des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ definiert als*

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) := \sum_{n=1}^{N} \mathrm{PF}_2(H_{\alpha_{n-1}}^{(a_n)}, V_n^* H_{\alpha_n}^{(a_n)} V_n),$$

wobei rechts der endlichdimensionale Paritätsfluss auf $\mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1})$ steht und modulo 2 addiert wird.

Satz 3.10. *Für $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ wie oben ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ wohldefiniert, also unabhängig von der Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 1$ von $[0,1]$ und den Werten $a_n > 0$ solange $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto Q_{a_n}(\alpha)$ stetig ist und $\|Q_{a_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha')\| < \epsilon$ für alle $\alpha, \alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ für ein $\epsilon \leq \frac{1}{6}$ gilt und unabhängig von R_α in (5).*
Für einen weiteren stetigen Weg $\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha$ chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für den H_2 invertierbar ist, gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) + \mathrm{PF}_2(\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,2] \mapsto H_\alpha), \tag{6}$$

wobei modulo 2 addiert wird. Weiter gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_{1-\alpha}) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto -H_\alpha).$$

Beweis. Zunächst wird die Unabhängigkeit von R_α gezeigt. Dazu sei $R_{\alpha_n} = R$ verglichen mit $R_{\alpha_n} = R'$. In der Definition von $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ betrifft dies die Summanden

$$I_1 := \mathrm{PF}_2(H_{\alpha_{n-1}}^{(a_n)}, V_n^* H_{\alpha_n}^{(a_n)} V_n)$$

und

$$I_2 := \mathrm{PF}_2(H_{\alpha_n}^{(a_{n+1})}, V_{n+1}^* H_{\alpha_{n+1}}^{(a_{n+1})} V_{n+1}).$$

Für $I = I_1 + I_2$ gilt nach Lemma 3.7

$$\begin{aligned} I =& \mathrm{PF}_2(H_{\alpha_{n-1}}^{(a_n)}, V_n^*(Q_{a_n}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_n}(\alpha_n) + R) V_n) \\ &+ \mathrm{PF}_2(Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) + R, V_{n+1}^* H_{\alpha_{n+1}}^{(a_{n+1})} V_{n+1}) \\ =& \mathrm{PF}_2(V_n H_{\alpha_{n-1}}^{(a_n)} V_n^*, Q_{a_n}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_n}(\alpha_n) + R) \\ &+ \mathrm{PF}_2(Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) + R, V_{n+1}^* H_{\alpha_{n+1}}^{(a_{n+1})} V_{n+1}). \end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_{n+1} > a_n$. Wir definieren $H_n := Q_{a_n}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_n}(\alpha_n)$ und den offensichtlich chiralen und selbstadjungierten Operator $H'_n := \chi_{(-a_{n+1},-a_n)\cup(a_n,a_{n+1})}(H_{\alpha_n}) H_{\alpha_n} \chi_{(-a_{n+1},-a_n)\cup(a_n,a_{n+1})}(H_{\alpha_n})$. Damit gilt

$$Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) + R = H_n \oplus H'_n + R = (H_n + R) \oplus H'_n$$

weil R lediglich auf den Kern von H_n nicht-trivial wirkt. Es folgt

$$I = \mathrm{PF}_2(V_n H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}} V_n^*, H_n + R) + \mathrm{PF}_2((H_n + R) \oplus H'_n, V^*_{n+1} H^{(a_{n+1})}_{\alpha_{n+1}} V_{n+1}).$$

Nach Lemma 3.5 gilt modulo 2

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{PF}_2(H_n + R, H_n + R') + \mathrm{PF}_2(H_n + R, H_n + R') + \mathrm{PF}_2(H'_n, H'_n) \\ &= \mathrm{PF}_2(H_n + R, H_n + R') + \mathrm{PF}_2((H_n + R) \oplus H'_n, (H_n + R') \oplus H'_n) \\ &= \mathrm{PF}_2(H_n + R, H_n + R') + \mathrm{PF}_2((H_n + R') \oplus H'_n, (H_n + R) \oplus H'_n). \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Lemma 3.6

$$\begin{aligned} I =& \mathrm{PF}_2(V_n H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}} V_n^*, H_n + R') \\ &+ \mathrm{PF}_2((H_n + R') \oplus H'_n, V^*_{n+1} H^{(a_{n+1})}_{\alpha_{n+1}} V_{n+1}) \\ =& \mathrm{PF}_2(V_n H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}} V_n^*, Q_{a_n}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_n}(\alpha_n) + R') \\ &+ \mathrm{PF}_2(Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) H_{\alpha_n} Q_{a_{n+1}}(\alpha_n) + R', V^*_{n+1} H^{(a_{n+1})}_{\alpha_{n+1}} V_{n+1}) \end{aligned}$$

wobei modulo 2 addiert wird.
Weiter wird die Unabhängigkeit von der Partition gezeigt. Sei dazu $\alpha'_n \in (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ in die Partition eingefügt. Dann gilt $\|Q_{a_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha'_n)\| < \epsilon$ und $\|Q_{a_n}(\alpha'_n) - Q_{a_n}(\alpha_n)\| < \epsilon$ und nach Lemma 3.8 sind $V'_n : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha'_n)$ definiert als $V'_n\psi = Q_{a_n}(\alpha'_n)\psi$ und $V''_n : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha'_n) \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_n)$ definiert als $V''_n\psi = Q_{a_n}(\alpha_n)\psi$ Isomorphismen. Nach Lemma 3.7 gilt

$$\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n) = \mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, (V'_n)^* H^{(a_n)}_{\alpha'_n} V'_n) + \mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha'_n}, (V''_n)^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V''_n),$$

wobei modulo 2 addiert wird.
Verbleibt die Unabhängigkeit von den Werten a_n zu zeigen. Sei dazu a_n verglichen mit a'_n, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_n < a'_n$ angenommen wird. Es gilt also

$$\|Q_{a_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha')\| < \epsilon, \ \ \forall\, \alpha, \alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

und

$$\|Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a'_n}(\alpha')\| < \epsilon, \ \ \forall\, \alpha, \alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$$

für ein $\epsilon \leq \frac{1}{6}$. Damit ist $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto \dim(\mathrm{Ran}(Q_{a_n}(\alpha)))$, sowie $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto \dim(\mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha)))$ konstant und damit auch $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto \dim(\mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha)))$. Damit ist $(Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha)) H_\alpha (Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha))$ aufgefasst als Operator auf $\mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha))$ für alle $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ invertierbar. Nach Lemma 3.8 ist $V(\alpha) : \mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1})) \to \mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha))$ definiert durch $V(\alpha)\psi = (Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha))\psi$ ein Isomorphismus. Damit ist $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto V(\alpha)^*(Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha)) H_\alpha (Q_{a'_n}(\alpha) - Q_{a_n}(\alpha)) V(\alpha)$ ein stetiger Weg chiraler, selbstadjungierter, invertierbarer Operatoren auf $\mathrm{Ran}(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}))$

der $(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}))H_{\alpha_{n-1}}(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1})$ mit $V(\alpha_n)^*(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))H_{\alpha_n}(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))V(\alpha_n)$ verbindet. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{PF}_2((Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}))H_{\alpha_{n-1}}(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}),\\ V(\alpha_n)^*(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))H_{\alpha_n}(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))V(\alpha_n)) = 0.\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.5 folgt damit

$$\begin{aligned}&\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n)\\ =&\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n)\\ &+\mathrm{PF}_2((Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}))H_{\alpha_{n-1}}(Q_{a'_n}(\alpha_{n-1}) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}),\\ &V(\alpha_n)^*(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))H_{\alpha_n}(Q_{a'_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_n))V(\alpha_n))\\ =&\mathrm{PF}_2(H^{(a'_n)}_{\alpha_{n-1}}, (\tilde{V}_n)^* H^{(a'_n)}_{\alpha_n} \tilde{V}_n)\end{aligned}$$

für $\tilde{V}_n : \mathcal{E}_{a'_n}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}_{a'_n}(\alpha_n)$ gegeben durch $\tilde{V}_n\psi = Q_{a'_n}(\alpha_n)\psi$.
Behauptung (6) gilt offensichtlich für eine Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 2$ von $[0,2]$, sodass $\alpha_n = 1$ für ein $n \in \{0,1,...,N\}$ gilt.
Es gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto -H_\alpha),$$

denn offensichtlich gilt für alle n

$$\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n) = \mathrm{PF}_2(-H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, -V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n).$$

Verbleibt zu zeigen, dass

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_{1-\alpha}).$$

Für $\hat{V}_n : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_n) \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1})$ gegeben durch $\hat{V}_n\psi = Q_{a_n}(\alpha_{n-1})\psi$ gilt $\mathrm{sgn}(\det((V_n^*)^{-1}\hat{V}_n)) = \mathrm{sgn}(\det((V_n^*)^{-1}(\hat{V}_n V_n)V_n^{-1})) = \mathrm{sgn}(\det(\hat{V}_n V_n)) > 0$, denn es gilt $\|\hat{V}_n V_n - 1_{\mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1})}\| \leq \|Q_{a_n}(\alpha_{n-1})(Q_{a_n}(\alpha_n) - Q_{a_n}(\alpha_{n-1}))\| < \epsilon < 1$. Mit Lemma 3.5 folgt

$$\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n) = \mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_n}, V_n H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}} V_n^*) = \mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_n}, \hat{V}_n{}^* H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}} \hat{V}_n)$$

und damit die Behauptung. □

Der folgende Satz wird analog zu Proposition 3 in [9] bewiesen.

Satz 3.11. *Seien $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ und $\alpha \in [0,1] \mapsto H'_\alpha$ stetige Wege chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$, sodass $H_0 = H'_0$ und $H_1 = H'_1$ invertierbar sind. Wenn eine stetige Homotopie innerhalb der chiralen, selbstadjungierten Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ zwischen den Wegen existiert, die die Endpunkte fest lässt, gilt* $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H'_\alpha)$.

Beweis. Für einen chiralen, selbstadjungierten Fredholm-Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \sigma(H)$ existiert eine Umgebung N von H innerhalb der chiralen, selbstadjungierten Fredholm-Operatoren, sodass für alle $H', H'' \in N$ gilt $a \notin \sigma(H')$, $a \notin \sigma(H'')$ und $\|\chi_{(-a,a)}(H') - \chi_{(-a,a)}(H'')\| < \epsilon$ für ein $\epsilon \leq \frac{1}{6}$.
Sei $(\alpha, \beta) \in [0,1] \times [0,1] \mapsto H(\alpha, \beta)$ eine Homotopie innerhalb der chiralen, selbstadjungierten Fredholm-Operatoren zwischen H_α und H'_α, welche die Endpunkte fest lässt, also $H(\alpha, 0) = H_\alpha$ für alle $\alpha \in [0,1]$, $H(\alpha, 1) = H'_\alpha$ für alle $\alpha \in [0,1]$, $H(0, \beta) = H_0 = H'_0$ für alle $\beta \in [0,1]$ und $H(1, \beta) = H_1 = H'_1$ für alle $\beta \in [0,1]$. Da $\mathrm{Ran}(H)$ als Bild einer stetigen Abbildung kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $\{N_1, ..., N_k\}$ zugehörig zu Werten $\{a_1, ..., a_k\}$ von $\mathrm{Ran}(H)$ durch Umgebungen wie oben. Die Urbilder $\{H^{-1}(N_1), ..., H^{-1}(N_k)\}$ bilden eine endliche Überdeckung von $[0,1] \times [0,1]$. Nach dem Lebesgueschen Überdeckungslemma existiert ein $\epsilon_0 > 0$, sodass jede Teilmenge von $[0,1] \times [0,1]$ mit Durchmesser kleiner oder gleich ϵ_0 in $H^{-1}(N_m)$ für ein $m \in \{1, ..., k\}$ enthalten ist. Für $J_i \subset [0,1]$ mit $|J_i| \leq \frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}}$ gibt es eine endliche Unterteilung von $[0,1]$ in Teilintervalle J_l, sodass $H(J_l \times J_i) \subset N_m$ für alle l und für $m \in \{1, ..., k\}$ abhängig von l ist. Sei $J_l = [c, d]$ und $J_i = [e, f]$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $H(c, e)$, $H(d, e)$, $H(c, f)$ und $H(d, f)$ invertierbar. Wenn einer dieser Operatoren nicht invertierbar ist, wird er auf seinem Kern durch einen chiralen, selbstadjungierten invertierbaren Operator erweitert, was nach Obigem den Paritätsfluss nicht ändert. Für $H \in N_m$ sei $Q_{a_m}(H) := \chi_{(-a_m, a_m)}(H)$ und $H^{a_m} := Q_{a_m}(H) H Q_{a_m}(H)$. Weiter sei $\mathcal{E}_{a_m}(H) := \mathrm{Ran}(Q_{a_m}(H))$. Sei $V : \mathcal{E}_{a_m}(H(c,e)) \to \mathcal{E}_{a_m}(H(d,e))$ gegeben durch $V\psi = Q_{a_m}(H(d,e))\psi$ und $V' : \mathcal{E}_{a_m}(H(c,f)) \to \mathcal{E}_{a_m}(H(d,f))$ gegeben durch $V'\psi = Q_{a_m}(H(d,f))\psi$ sowie $\tilde{V}_0 : \mathcal{E}_{a_m}(H(c,e)) \to \mathcal{E}_{a_m}(H(c,f))$ gegeben durch $\tilde{V}_0\psi = Q_{a_m}(H(c,f))\psi$ und $\tilde{V}_1 : \mathcal{E}_{a_m}(H(d,e)) \to \mathcal{E}_{a_m}(H(d,f))$ gegeben durch $\tilde{V}_1\psi = Q_{a_m}(H(d,f))\psi$ und $\tilde{V} : \mathcal{E}_{a_m}(H(d,f)) \to \mathcal{E}_{a_m}(H(c,e))$ gegeben durch $\tilde{V}\psi = Q_{a_m}(H(c,e))\psi$.
Nach Lemma 3.7 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{PF}_2(H(c,e)^{a_m}, V^* H(d,e)^{a_m} V) &= \mathrm{PF}_2(H(d,e)^{a_m}, V H(c,e)^{a_m} V^*) \\
&= \mathrm{PF}_2(H(d,e)^{a_m}, \tilde{V_1}^* H(d,f)^{a_m} \tilde{V_1}) \\
&+ \mathrm{PF}_2(H(d,f)^{a_m}, \tilde{V}^* H(c,e)^{a_m} \tilde{V}) \\
&= \mathrm{PF}_2(H(d,e)^{a_m}, \tilde{V_1}^* H(d,f)^{a_m} \tilde{V_1}) \\
&+ \mathrm{PF}_2(\tilde{V} H(d,f)^{a_m} \tilde{V}^*, H(c,e)^{a_m}) \\
&= \mathrm{PF}_2(\tilde{V_1} H(d,e)^{a_m} \tilde{V_1}^*, H(d,f)^{a_m}) \\
&+ \mathrm{PF}_2(H(c,e)^{a_m}, \tilde{V_0}^* H(c,f)^{a_m} \tilde{V_0}) \\
&+ \mathrm{PF}_2(H(c,f)^{a_m}, (V')^* H(d,f)^{a_m} V').
\end{aligned}$$

Sei $H(c, \beta) \in N_p$ für alle $\beta \in J_i$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_p > a_m$. Sei $\tilde{V}_{a_p} : \mathcal{E}_{a_p}(H(c,e)) \to \mathcal{E}_{a_p}(H(c,f))$ gegeben durch $\tilde{V}_{a_p}\psi = Q_{a_p}(H(c,f))\psi$, dann gilt

$$\mathrm{PF}_2(H(c,e)^{a_m}, \tilde{V_0}^* H(c,f)^{a_m} \tilde{V_0}) = \mathrm{PF}_2(H(c,e)^{a_p}, \tilde{V}_{a_p}^* H(c,f)^{a_p} \tilde{V}_{a_p}),$$

also nach Lemma 3.7

$$\mathrm{PF}_2(\tilde{V_0}H(c,e)^{a_m}\tilde{V_0}^*, H(c,f)^{a_m}) = \mathrm{PF}_2(H(c,e)^{a_p}, \tilde{V}_{a_p}^* H(c,f)^{a_p}\tilde{V}_{a_p}).$$

Damit gilt für $\beta, \beta' \in J_i$

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H(\alpha,\beta)) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H(\alpha,\beta')).$$

Da sich $[0,1]$ in endlich viele Teilintervalle von Länge kleiner oder gleich $\frac{\epsilon_0}{\sqrt{2}}$ unterteilen lässt, folgt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H'_\alpha),$$

was zu zeigen war. □

Betrachtet man analytische Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für die H_0 und H_1 invertierbar sind, hängen auch die Eigenwerte und Eigenvektoren von H_α analytisch von α ab. Insbesondere ist H_α für alle bis auf endlich viele α invertierbar.

Satz 3.12. *Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ ein analytischer Weg chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind. Dann ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ gegeben durch die Anzahl der Eigenwerte, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2.*

Beweis. Da H_α für alle bis auf endlich viele α invertierbar ist, kann eine Partition $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_{N-1} < \alpha_N = 1$ von $[0,1]$ gewählt werden, sodass H_{α_n} für alle n aus $\{0,...,N\}$ invertierbar ist. Es reicht also zu zeigen, dass $\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n)$ aus Definition 3.9 durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto H_\alpha$ von $-$ auf $+$ ändern, gegeben ist. Sei $V_n(\alpha) : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1}) \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha)$ für $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n]$ gegeben durch $V_n(\alpha)\psi = Q_{a_n}(\alpha)\psi$. Damit ist

$$\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha) \in \mathcal{B}(\mathcal{E}_{a_n}(\alpha_{n-1}))$$

ein analytischer Weg, der $H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}$ mit $V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n$ verbindet. Nach Lemma 3.4 ist $\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n)$ gegeben durch die Anzahl der Eigenwerte von $V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha)$ die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha)$ von $-$ auf $+$ ändern.
Für $\alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha]$ sei $V_{\alpha'}(\alpha) : \mathcal{E}_{a_n}(\alpha') \to \mathcal{E}_{a_n}(\alpha)$ gegeben durch $V_{\alpha'}(\alpha)\psi = Q_{a_n}(\alpha)\psi$. Dann ist

$$\alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha] \mapsto V_{\alpha'}(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_{\alpha'}(\alpha)$$

ein stetiger Weg, der $V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha)$ mit $Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha)$ verbindet. Nach Lemma 3.8 ist $V_{\alpha'}(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_{\alpha'}(\alpha)$ genau dann für alle $\alpha' \in [\alpha_{n-1}, \alpha]$ invertierbar, wenn $Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha)$ invertierbar ist. Damit ist die Anzahl der Eigenwerte von $V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha)$, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto V_n(\alpha)^* Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha) V_n(\alpha)$ von $-$ auf $+$ ändern gleich der Anzahl der Eigenwerte von $Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha)$, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto Q_{a_n}(\alpha) H_\alpha Q_{a_n}(\alpha)$ von $-$ auf $+$ ändern. Damit ist $\mathrm{PF}_2(H^{(a_n)}_{\alpha_{n-1}}, V_n^* H^{(a_n)}_{\alpha_n} V_n)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges $\alpha \in [\alpha_{n-1}, \alpha_n] \mapsto H_\alpha$ von $-$ auf $+$ ändern, gegeben. □

Beispiel 3.13. Sei $S_\alpha \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$ durch

$$S_\alpha = \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n+1| + e^{i\pi\alpha}|0\rangle\langle 1|$$

gegeben. Für $\mathcal{H}_\mathbb{R} = \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ist

$$\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha}) \\ \frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha})^* & 0 \end{pmatrix}$$

ein stetiger Weg chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}_\mathbb{R} \oplus \mathcal{H}_\mathbb{R}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind. Es gilt

$$\frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha}) = \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n+1| + \cos(\pi\alpha)|0\rangle\langle 1|.$$

Für das Spektrum von H_α folgt $\sigma(H_\alpha) = \{-1, -\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha), 1\}$ wobei $-\cos(\pi\alpha)$ und $\cos(\pi\alpha)$ einfache Eigenwerte sind. Dabei ist $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes |0\rangle + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes |1\rangle$ Eigenvektor von H_α zum Eigenwert $\cos(\pi\alpha)$ und $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes |0\rangle - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes |1\rangle$ Eigenvektor von H_α zum Eigenwert $-\cos(\pi\alpha)$. Es gibt also genau einen einfachen Eigenwert, der im Verlauf des Weges sein Vorzeichen von $-$ zu $+$ ändert. Daraus folgt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = 1.$$

3.3 Paritätsfluss für zeitumkehrinvariante Operatoren

Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{H}$ einen (komplexen) separablen Hilbertraum mit komplexer Konjugation $\mathcal{C}$. Auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ sei der Chiralitätsoperator $J \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ durch

$$J = \begin{pmatrix} 1_\mathcal{H} & 0 \\ 0 & -1_\mathcal{H} \end{pmatrix},$$

gegeben. Weiter sei der unitäre, reelle Zeitumkehroperator $I \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ gegeben, sodass $I^2 = 1_{\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}}$ und $[I, J] = 0$ gilt. In einer geeigneten Basis in der J von obiger Form ist, hat I damit die Form

$$I = \begin{pmatrix} \tilde{I} & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix},$$

für unitäre Operatoren $\tilde{I}, \hat{I} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, sodass $\tilde{I}^2 = 1_{\mathcal{H}}$ und $\hat{I}^2 = 1_{\mathcal{H}}$ gilt. Wir betrachten stetige Wege $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ chiraler, zeitumkehrinvarianter, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, für die H_0 und H_1 invertierbar sind. Dabei heißt ein Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ chiral, falls $JHJ = -H$ gilt und zeitumkehrinvariant falls $I^* \overline{H} I = H$ gilt, wobei $\overline{H} = (\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}) H (\mathcal{C} \oplus \mathcal{C})$ den komplex konjugierten Operator bezeichnet.
Für solche Wege lässt sich, analog zum vorherigen Kapitel, ein $\mathbb{Z}_2$-wertiger Paritätsfluss definieren.

Da $\tilde{I}$ unitär ist und $\tilde{I}^2 = 1_{\mathcal{H}}$ gilt, gibt es einen unter komplexer Konjugation invarianten Unterraum $\tilde{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{H}$, sodass $\tilde{I}|_{\tilde{\mathcal{K}}} = 1_{\tilde{\mathcal{K}}}$ und $\tilde{I}|_{\tilde{\mathcal{K}}^\perp} = -1_{\tilde{\mathcal{K}}^\perp}$ gilt. Analog dazu gibt es einen unter komplexer Konjugation invarianten Unterraum $\hat{\mathcal{K}}$ von $\mathcal{H}$, sodass $\hat{I}|_{\hat{\mathcal{K}}} = 1_{\hat{\mathcal{K}}}$ und $\hat{I}|_{\hat{\mathcal{K}}^\perp} = -1_{\hat{\mathcal{K}}^\perp}$ gilt. Damit gilt

$$I = \begin{pmatrix} 1_{\tilde{\mathcal{K}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{\tilde{\mathcal{K}}^\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\hat{\mathcal{K}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1_{\hat{\mathcal{K}}^\perp} \end{pmatrix}.$$

Für

$$K := \begin{pmatrix} 1_{\tilde{\mathcal{K}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i1_{\tilde{\mathcal{K}}^\perp} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\hat{\mathcal{K}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i1_{\hat{\mathcal{K}}^\perp} \end{pmatrix}$$

gilt damit $K^2 = I$, $\overline{K} = K^*$ und $[K, J] = 0$ und K ist unitär. Für einen chiralen, zeitumkehrinvarianten, selbstadjungierter Fredholm-Operator H auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist $\widetilde{H} := K^* H K$ ein selbstadjungierten Fredholm-Operator auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Es gilt $J\widetilde{H}J = JK^*HKJ = K^*JHJK = -\widetilde{H}$ und $\overline{\widetilde{H}} = \overline{K^*HK} = \overline{K^* I \overline{H} I K} = K^*KK\overline{H}K^*K^*K = K\overline{H}K^* = \overline{K^*HK} = \widetilde{H}$, also ist $\widetilde{H}$ reell und chiral. Da H und $\widetilde{H}$ unitär äquivalent sind, gilt $\sigma(H) = \sigma(\widetilde{H})$.

Definition 3.14. *Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ ein stetiger Weg chiraler, zeitumkehrinvarianter, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind. Dann ist der $\mathbb{Z}_2$-wertige Paritätsfluss entlang des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ definiert als*

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) := \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha}),$$

wobei $\widetilde{H_\alpha}$ durch $\widetilde{H_\alpha} := K^* H_\alpha K$ gegeben ist.

Da für alle α das Spektrum von H_α mit dem Spektrum von $\widetilde{H_\alpha}$ übereinstimmt und $\psi \in (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \setminus \{0\}$ genau dann Eigenvektor von H_α zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, wenn $K^*\psi$ Eigenvektor von $\widetilde{H_\alpha}$ zum Eigenwert λ ist und der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha}$ genau dann analytisch ist, wenn der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ analytisch ist, ist nach Satz 3.12 der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α die

ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von - auf + ändern, modulo 2, gegeben.
Weiter ist der Paritätsfluss nach Satz 3.11 homotopieinvariant.
Nach Satz 3.10 gilt für einen weiteren stetigen Weg $\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha$ chiraler, zeitumkehrinvarianter, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ für den H_2 invertierbar ist

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) + \mathrm{PF}_2(\alpha \in [1,2] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,2] \mapsto H_\alpha),$$

wobei modulo 2 addiert wird. Weiter gilt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_{1-\alpha}) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto -H_\alpha).$$

3.4 Anwendungsbeispiel

Sei $H_\alpha \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L}))$ für $L \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0,1]$ gegeben durch

$$H_\alpha = \sum_{|m| \le r} c_m (S_\alpha^m + \overline{S_\alpha}^m) + W$$

für $r \in \mathbb{N}$, wobei c_m, für $m \in \mathbb{Z}$, $2L \times 2L$-Matrizen sind und W eine im Allgemeinen ortsabhängige $2L \times 2L$-Matrix ist und S_α durch

$$S_\alpha = \sum_{n \neq 0} |n\rangle\langle n+1| + e^{i\pi\alpha} |0\rangle\langle 1|$$

gegeben ist. Für

$$G = \sum_{n>0} |n\rangle\langle n| - \sum_{n \le 0} |n\rangle\langle n| \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$$

gilt $G = G^* = G^{-1} = \overline{G}$ und $G S_\alpha G = S_{1+\alpha}$. Im Folgenden wird G mit $G \otimes 1_{\mathbb{C}^{2L}}$ identifiziert. Es sei $H = H_0$ chiral bezüglich

$$J = \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{C}^L} & 0 \\ 0 & -1_{\mathbb{C}^L} \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})}$$

und zeitumkehrinvariant bezüglich

$$I = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z})},$$

wobei $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ mit $\sigma_2 \otimes 1_{\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{\frac{L}{2}})}$ identifiziert wird und L gerade sein muss. Damit gilt $J^2 = 1_{\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L})}$ und $I^2 = 1_{\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^{2L})}$ und $[I, J] = 0$.
Weiter sei vorausgesetzt, dass H_0 invertierbar ist. Da $G S_0 G = S_1$ gilt, folgt $G H_0 G = H_1$ und damit ist auch H_1 invertierbar. Aus der Chiralität von H_0 folgt, dass H_α für alle α chiral ist. Für $m \neq 0$ gilt

$$S_\alpha^m + \overline{S_\alpha}^m = 2(\sum_{n \notin \{0,\ldots,m\}} |n\rangle\langle n+m| + \sum_{n \in \{0,\ldots,m\}} \cos(\pi\alpha) |n\rangle\langle n+m|),$$

was insbesondere reell ist und $S_\alpha^0 = 1_{\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C})}$, was auch reell ist. Damit folgt aus der Zeitumkehrinvarianz von H_0, dass H_α für alle α zeitumkehrinvariant ist. Damit ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ entlang des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ wohldefiniert.

Lemma 3.15. *Für einen stetigen Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ wie oben, ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen an der Stelle $\alpha = \frac{1}{2}$ von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2, gegeben.*

Beweis. Der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ ist analytisch. Also ist der Paritätsfluss $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha)$ durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2, gegeben. Es gilt $GS_\alpha G = S_{1+\alpha}$ und damit

$$\begin{aligned}
G(S_\alpha^m + \overline{S_\alpha}^m)G &= S_{1+\alpha}^m + \overline{S_{1+\alpha}}^m \\
&= 2\Big(\sum_{n\notin\{0,\dots,m\}} |n\rangle\langle n+m| + \sum_{n\in\{0,\dots,m\}} \cos(\pi(1+\alpha))|n\rangle\langle n+m|\Big) \\
&= 2\Big(\sum_{n\notin\{0,\dots,m\}} |n\rangle\langle n+m| + \sum_{n\in\{0,\dots,m\}} \cos(\pi(1-\alpha))|n\rangle\langle n+m|\Big) \\
&= S_{1-\alpha}^m + \overline{S_{1-\alpha}}^m
\end{aligned}$$

und damit $GH_\alpha G = H_{1-\alpha}$. Daraus folgt $\sigma(H_\alpha) = \sigma(H_{1-\alpha})$ und damit gilt für $t \in (0, \frac{1}{2})$, sodass H_t invertierbar ist $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,t] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [1-t,1] \mapsto H_\alpha)$. Daraus folgt $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [t,1-t] \mapsto H_\alpha)$. Da der Weg $\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha$ analytisch ist, und H_α damit für alle bis auf endlich viele $\alpha \in [0,1]$ invertierbar ist, kann t so gewählt werden, dass H_α für $\alpha \in [t,1-t]\setminus\{\frac{1}{2}\}$ invertierbar ist. Nach Satz 3.12 ist $\mathrm{PF}_2(\alpha \in [t,1-t] \mapsto H_\alpha)$ dann durch die Anzahl der Eigenwerte von H_α die ihr Vorzeichen an der Stelle $\alpha = \frac{1}{2}$ von $-$ auf $+$ ändern, gezählt mit ihrer Vielfachheit, modulo 2 gegeben. □

Beispiel 3.16. Sei $S_\alpha \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}))$ durch

$$S_\alpha = \sum_{n\neq 0} |n\rangle\langle n+1| + e^{i\pi\alpha}|0\rangle\langle 1|$$

gegeben. Auf $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}^2)$ sei $\tilde{I} = \hat{I}$ durch $\tilde{I}(w \otimes |n\rangle) = \sigma_3 w \otimes |n\rangle$ für

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dann ist

$$\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{i}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha}) \\ 0 & 0 & i1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 \\ 0 & -i1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 & 0 \\ -\frac{i}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha})^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein stetiger Weg chiraler, zeitumkehrinvarianter, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ für den H_0 und H_1 invertierbar sind. Für die oben beschriebene Wurzel von I gilt

$$K = \begin{pmatrix} 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i1_{\ell^2(\mathbb{Z})} \end{pmatrix}$$

und damit

$$\widetilde{H_\alpha} = K^* H_\alpha K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha}) \\ 0 & 0 & 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 \\ 0 & 1_{\ell^2(\mathbb{Z})} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha})^* & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\frac{1}{2}(S_\alpha + \overline{S_\alpha}) = \sum_{n\neq 0} |n\rangle\langle n+1| + \cos(\pi\alpha)|0\rangle\langle 1|.$$

Für das Spektrum von $\widetilde{H_\alpha}$ folgt $\sigma(\widetilde{H_\alpha}) = \{-1, -\cos(\pi\alpha), \cos(\pi\alpha), 1\}$ wobei $-\cos(\pi\alpha)$ und $\cos(\pi\alpha)$ einfache Eigenwerte sind. Dabei ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \otimes |0\rangle - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes |1\rangle$ Eigenvektor von $\widetilde{H_\alpha}$ zum Eigenwert $\cos(\pi\alpha)$ und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \otimes |0\rangle + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes |1\rangle$ Eigenvektor von $\widetilde{H_\alpha}$ zum Eigenwert $-\cos(\pi\alpha)$. Es gibt also genau einen einfachen Eigenwert, der im Verlauf des Weges $\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha}$ sein Vorzeichen von $-$ zu $+$ ändert. Daraus folgt

$$\mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto H_\alpha) = \mathrm{PF}_2(\alpha \in [0,1] \mapsto \widetilde{H_\alpha}) = 1.$$

4 Zusammenfassung

In der vorliegenden Masterarbeit werden zwei $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Flüsse betrachtet. Sei $\alpha \in [0,1] \mapsto F_\alpha$ ein stetiger Weg selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf einem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit komplexer Konjugation und I ein reeller, unitärer Operator auf $\mathcal{H}$ für den $I^2 = -1_\mathcal{H}$ gilt. Falls $I^*(F_0)^t I = F$ gilt, $F_\alpha - F_0$ für alle α kompakt ist und $F_{1-\alpha} = (IU)^*(F_\alpha)^t(IU)$ für einen unitären Operator U gilt, für den $I^*U^tI = U$ erfüllt ist, ist durch den gewöhnlichen spektralen Fluss entlang des Weges $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F_\alpha$, modulo 2 ein wohldefinierter $\mathbb{Z}_2$-wertiger spektraler Fluss gegeben. Dieser hängt lediglich von F_0 und U ab und ist als Abbildung von (F_0, U) nach $\mathbb{Z}_2$ lokal konstant. Sei $\mathcal{K}$ ein weiterer separabler Hilbertraum mit komplexer Konjugation und $I_\mathcal{K}$ ein reeller, unitärer Operator auf $\mathcal{K}$, für den $I_\mathcal{K}^2 = -1_\mathcal{K}$ gilt und T eine wesentlich unitäre Kontraktion auf $\mathcal{K}$. Für eine unitäre Dilatation U_T auf $\mathcal{H}$ von T mit reeller partieller Isometrie π für die $I_\mathcal{K} = \pi^* I \pi$ gilt, ist die Dimension des Kernes von T durch den gewöhnlichen spektralen Fluss entlang des Wegs $\alpha \in [0, \frac{1}{2}] \mapsto F + \alpha(U_T)^*[F, U_T]$ für $F = 2\pi\pi^* - 1_\mathcal{H}$, modulo 2, gegeben.
Für stetige Wege chiraler, selbstadjungierter Fredholm-Operatoren auf einem separablen Hilbertraum mit invertierbaren Endpunkten, wird ein $\mathbb{Z}_2$-wertiger spektraler Fluss untersucht. Dieser ist unabhängig von der Orientierung des Weges, homotopieinvariant und ein Homomorphismus bezüglich Verkettung von solchen Wegen. Für analytische Wege ist der $\mathbb{Z}_2$-wertige spektrale Fluss durch die Anzahl der Eigenwerte, die ihr Vorzeichen im Verlauf des Weges von $-$ auf $+$ ändern, modulo 2, gegeben. Für die beiden betrachteten spektralen Flüsse werden Anwendungen auf topologische Isolatoren aufgezeigt.

Literatur

[1] M. F. Atiyah, I. M. Singer: *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques 37 (1969), S. 5-26.

[2] J. Avron, R. Seiler, B. Simon: *The Index of a Pair of Projections*, Journal of Functional Analysis 120 (1994), S. 220-237.

[3] A. L. Carey, H. Schulz-Baldes: *Laughlin arguments in arbitrary dimensions*, preprint 2017, erscheint in Communications in Mathematical Physics.

[4] A. L. Carey, J. Phillips, H. Schulz-Baldes: *Spectral flows for skew-adjoint Fredholm operators*, preprint 2016, erscheint in Journal of Spectral Theory.

[5] G. De Nittis, H. Schulz-Baldes: *Spectral flows of dilations of Fredholm operators*, Canadian Mathematical Bulletin 58 (2015), S. 51-68.

[6] G. De Nittis, H. Schulz-Baldes: *Spectral flows associated to flux tubes*, Annales Henri Poincaré 17 (2016), S. 1-35.

[7] J. Großmann, H. Schulz-Baldes: *Index Pairings in Presence of Symmetries with Applications to Topological Insulators*, Communications in Mathematical Physics 343 (2016), S. 477-513.

[8] L.-K. Hua: *On the Theory of Automorphic Functions of a Matrix Variable I-Geometrical Basis*, American Journal of Mathematics. 66 (1944), S. 470-488.

[9] J. Phillips: *Self-adjoint Fredholm operators and spectral flow*, Canadian Mathematical Bulletin 39 (1996), S. 460-467.

[10] J. Phillips: *Spectral Flow in Type I and Type II factors - a New Approach*, Fields Institute Communications 17 (1997), S. 137-153.

[11] H. Schulz-Baldes: $\mathbb{Z}_2$*-indices and factorization properties of odd symmetric Fredholm operators*, Dokumenta Mathematica 20 (2015), S. 1481-1500.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Erlangen, den 21. November 2018

Lebenslauf

Nora Doll

Zur Person

Name	Nora Doll
Geboren	01.10.1993
Adresse	Arberstraße 31 94256 Drachselsried

Schule

09/2000 - 07/2004	Aktive Montessori-Schule Bayrischer Wald
09/2004 - 07/2010	Staatliche Realschule Viechtach
09/2010 - 07/2013	Staatliche Fachoberschule Regen

Studium

10/2013 - 08/2016	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg Studium der Mathematik Abschluss: Bachelor of Science
10/2016 - 12/2018	Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg Studium der Mathematik Abschluss: Master of Science