Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Übungsblatt 2 (24.4.2026)

Aufgabe 6: Sei $p_1, p_2, p_3, \dots$ die Folge der Primzahlen. Zeige:

(1) Für $n \geq 0$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} < \frac{1}{10^{2^n}}.$$

(Hinweis: Benutze die aus Aufgabe 5 folgende Aussage $p_k \leq 2^{2^k}$.) Insbesondere wird dann durch

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{10^{2^k}} = 0.0203000500000007000000000000001100000000\dots$$

eine reelle Zahl definiert.

(2) Für $n \geq 0$ gilt

$$\left\lfloor 10^{2^n} \alpha \right\rfloor = \sum_{k=1}^{n} p_k \cdot 10^{2^n - 2^k}.$$

(3) Für $n \geq 1$ gilt

$$p_n = \left\lfloor 10^{2^n} \alpha \right\rfloor - 10^{2^{n-1}} \left\lfloor 10^{2^{n-1}} \alpha \right\rfloor$$

(Sierpinski-Formel für die n-te Primzahl).

Aufgabe 7: Bestimme die größte Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{x} + O(\frac{1}{x^\alpha}).$$

Aufgabe 8: Zeige:

(1) Es gilt die aysymptotische Gleichheit

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \sim \frac{x}{(\log x)^2},$$

d.h. definiert man (für $x > 1$) $\gamma(x)$ durch

$$\int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} = \gamma(x) \frac{x}{(\log x)^2},$$

so gilt

$$\lim_{x \to \infty} \gamma(x) = 1.$$

(2) Für $x > 1$ gilt

$$\int_2^x \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} - \frac{2}{\log 2}.$$

(3) Für alle reellen Zahlen a, b mit $a < 1 < b$ gibt es eine reelle Zahl $x_{ab} > 1$ mit der Eigenschaft, dass gilt

$$\frac{x}{\log x} + a \frac{x}{(\log x)^2} < \int_2^x \frac{dt}{\log t} < \frac{x}{\log x} + b \frac{x}{(\log x)^2} \text{ für alle } x \geq x_{ab}.$$

Datei: anazt_u2.tex. Version vom 23.4.2026

Aufgabe 9:

(1) Bestimme mit Hilfe des Primzahlsatzes das asymptotische Verhalten von

$$\frac{|\{p \text{ prim} : \frac{x}{2} < p \leq x\}|}{|\{p \text{ prim} : 0 < p \leq \frac{x}{2}\}|}.$$

(2) De la Vallée Poussin hat gezeigt, dass

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + O(\frac{x}{(\log x)^3})$$

gilt. Folgere daraus die Beziehung

$$2\pi(\frac{x}{2}) - \pi(x) \sim \log 2 \cdot \frac{x}{(\log x)^2}.$$

(3) Was kann man über das asymptotische Verhalten der Differenz

$$\left|\left\{p \text{ prim} : 0 < p \leq \frac{x}{2}\right\}\right| - \left|\left\{p \text{ prim} : \frac{x}{2} < p \leq x\right\}\right|$$

sagen?

Aufgabe 10:

(1) Bestimme alle Primzahlzwillinge der Gestalt

$$2^n - 1, \quad 2^n + 1.$$

(2) Bestimme mindestens vier Primzahlzwillinge der Gestalt

$$3 \cdot 2^n - 1, \quad 3 \cdot 2^n + 1.$$