Die Inklusions-Exklusions- oder Sieb-Formel

Diese grundlegende kombinatorische Formel wird zumeist in Büchern *kombinatorisch* bewiesen, indem die Auftretenshäufigkeit der Elemente von Teilmengen gezählt wird, wobei die Formel $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$ $(n \geq 1)$ (*Jede nichtleere endliche Menge hat gleich viele gerade und ungerade Teilmengen*) benutzt wird. Siehe z.B.: Martin Aigner, *A Course in Enumeration*, Springer 2007; Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford UP 1989; Konrad Jacobs, *Einführung in die Kombinatorik*, de Gruyter 1983. Das macht sachlich wie didaktisch Sinn, da diese Bücher ja unter anderem das (didaktische) Ziel haben, den Lesern kombinatorisches Denken und Argumentieren nahezubringen.

Dennoch bevorzuge ich einen *anderen* reinen Induktionsbeweis der Formel. Erstens ist dieser Beweis recht kurz und benutzt keinerlei Hilfsmittel; zweitens führt *der Induktionsschritt selbst* in diesem Fall ganz einfach zur Formel hin, schon der Schritt von $n = 2$ nach $n = 3$; und drittens kann man so die Formel von vornherein *allgemeiner* formulieren und damit ihren ganz simplen algebraischen Kern klarmachen.

Satz: Sei $\mathcal{M}$ eine nichtleere Menge von Mengen und $\varphi : \mathcal{M} \to \mathbb{G}$ eine Abbildung mit

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B) \quad (A,\ B \in \mathcal{M}); \tag{$\star$}$$

dabei sei $(\mathbb{G}, +)$ eine abelsche Gruppe.[1] Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \quad (A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}) \tag{$\star\star$}$$

Beweis:

Induktion über n.
Den Induktionsanfang $\boldsymbol{n = 2}$ liefert $(\star)$. (Fall $n = 1$ von $(\star\star)$ trivial.)
Schluss auf $\boldsymbol{n+1}$:
Angenommen, $(\star\star)$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Zu zeigen: Dann gilt $(\star\star)$ auch für $n + 1$.

$$\begin{aligned}\varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \varphi\big((A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}\big) \\ &= \varphi(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + \varphi(A_{n+1}) - \varphi\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big)\end{aligned}$$

nach $(\star)$. Nun wenden wir die Induktionsannahme an und erhalten insbesondere

$$\begin{aligned}\varphi\big((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \cdots \cup (A_n \cap A_{n+1})\big) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \\ &= -\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{k-1} \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1}).\end{aligned}$$

Da

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n+1} \varphi(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{k-1} \leq n} \varphi(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{k-1}} \cap A_{n+1})$$

für $2 \leq k \leq n + 1$, folgt $(\star\star)$ mit $n + 1$ anstelle von n. ■

φ kann die *Kardinalzahl* endlicher Mengen sein, ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* bei einer Sigma-Algebra, die *Summe der Elemente* bei absolut summierbaren Zahlen- oder Vektormengen, ...
Wählt man $\varphi \equiv 1$, *folgt* aus $(\star\star)$ die ganz zu Anfang erwähnte Binomial-Identität.

[1] Die Voraussetzung $(\star)$ des Satzes beinhaltet *implizit*: Die Menge $\mathcal{M}$ ist bzgl. $\cup$ und $\cap$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{M}$ auch bzgl. Differenzen $A \setminus B$ abgeschlossen, kann man die Hypothese $(\star)$ durch die *Additivität* $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ $(A \cap B = \emptyset)$ ersetzen, da diese zusammen mit den disjunkten Zerlegungen $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$, $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$, $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ unmittelbar $(\star)$ ergibt. Allerdings z.B. für *konstante* Funktionen gilt zwar $(\star)$, aber *nicht* die Additivität.