0-1-Folgen und Kontinuum

Als Kontinuum betrachten wir das halboffene Intervall $[0,1)$ der reellen Zahlengeraden. Dieses teilen wir durch fortgesetzte Halbierung in gleichlange Teilintervalle auf, erst in zwei Intervalle $I_{1\,0}$ und $I_{1\,1}$ der Länge ½, dann in vier Intervalle $I_{2\,0}, I_{2\,1}, I_{2\,2}, I_{2\,3}$ der Länge ¼, usw.; allgemein

$$\boldsymbol{I_{n\,k} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) \; (0 \leq k \leq 2^n - 1,\; n \in \mathbb{N}).}$$

Gegeben ein Punkt $x \in [0,1)$, definieren wir eine 0-1-Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, durch welche die sich auf den Punkt x zusammenziehende Folge $(I_{n\,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ der Halbierungsintervalle mit $x \in I_{n\,k_n}\; (n \in \mathbb{N})$ schrittweise charakterisiert wird:

$$d_1 = \begin{cases} 0, & x \text{ liegt in } [0,1/2), \text{ der \textit{linken} Hälfte von } [0,1), \\ 1, & x \text{ liegt in } [1/2,1), \text{ der \textit{rechten} Hälfte von } [0,1). \end{cases}$$

Die Hälfte von $[0,1)$, in der x liegt, nennen wir $I_{1\,k_1}$; $k_1 \in \{0,1\}$.

$$d_2 = \begin{cases} 0, & x \text{ liegt in der \textit{linken} Hälfte von } I_{1\,k_1}, \\ 1, & x \text{ liegt in der \textit{rechten} Hälfte von } I_{1\,k_1}. \end{cases}$$

Die Hälfte von $I_{1\,k_1}$, in der x liegt, nennen wir $I_{2\,k_2}$; $k_2 \in \{0,1,2,3\}$. Usw.

Es gilt dann offenbar für alle $n \in \mathbb{N}$

$$d_1/2 + d_2/4 + d_3/8 + \ldots + d_n/2^n \leq x < d_1/2 + d_2/4 + d_3/8 + \ldots + d_n/2^n + 1/2^n\;.$$

Und indem man alles auf den Nenner 2^n bringt, hat man

$$(d_1 2^{n-1} + d_2 2^{n-2} + \cdots + d_n)/2^n \leq x < (d_1 2^{n-1} + d_2 2^{n-2} + \cdots + d_n)/2^n + 1/2^n\;.$$

Damit folgt $\boldsymbol{k_n} = d_1 2^{n-1} + d_2 2^{n-2} + \cdots + d_n = \sum_{i=1}^{n} d_i 2^{n-i}$, also $\boldsymbol{k_{n+1} = 2k_n + d_{n+1}}$.

Anders gesagt (die 0-1-Folge als Funktion von x ausgedrückt): Jedem $x \in [0,1)$ entspricht eine eindeutig bestimmte 0-1-Folge $(\boldsymbol{d_n(x)})_{\boldsymbol{n}\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x)}{2^k} \leq x < \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x)}{2^k} + \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N}).} \qquad (*)$$

Keine solche Folge $(d_n(x))$ endet in lauter Einsen, da $\sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n_0-1}}$, weshalb im Falle $d_n(x) = 1\; (n \geq n_0)$ sich $x \geq \sum_{k=1}^{n_0-1} \frac{d_k(x)}{2^k} + \frac{1}{2^{n_0-1}}$ ergäbe; Widerspruch zu $(*)$.

Anschaulich klar: Die alle denselben Punkt x enthaltenden rechtsseitig halboffenen $I_{n\,k_n}$ können sich *nicht* auf einen *gemeinsamen rechten* Randpunkt zusammenziehen.

Für die zu x gehörende *Intervallschachtelung* gilt (wie schon oben bemerkt)

$$k_n := \sum_{i=1}^{n} d_i(x)\, 2^{n-i}\; (n \in \mathbb{N}),\;\; x \in I_{n\,k_n} = \left[k_n 2^{-n}, (k_n+1)2^{-n}\right)\; (n \in \mathbb{N}),\;\; \{x\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{n\,k_n}\;.$$

Eigentlich bilden die *abgeschlossenen* Intervalle $\overline{I_{n\,k_n}}\; (n \in \mathbb{N})$ eine Intervallschachtelung. Bei diesem *speziellen* Schachtelungstyp enthält aber auch der Durchschnitt aller rechtsseitig *halboffenen* Intervalle den eingeschachtelten Punkt.

Die bei einer Zuordnung gemäß $(*)$ nicht vorkommenden *Ausnahme-Folgen*, die in lauter Einsen enden, bilden eine offenbar *abzählbare* Gesamtheit, die wir ausklammern. (Es gibt jeweils nur *endlich viele* 0-1-Folgen, bei denen genau ab der ersten, ab der zweiten, ..., ab der n-ten, ... Stelle nur noch Einsen vorkommen.)

Zu jeder 0-1-Folge (d_n), die nicht in lauter Einsen endet, *gibt es* ein $x \in [0,1)$ mit $(d_n) = (d_n(x))$; aus $(*)$ folgt unmittelbar, dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$ geeignet ist.

Umgekehrt ist festzuhalten: *Verschiedenen* 0-1-Folgen entsprechen auch *verschiedene* Zahlen x, da immer $\sum_{k>n} \frac{d_k}{2^k} < \frac{1}{2^n}$ (unendlich viele d_k sind ja gleich 0).

Fazit also (denkt man an die zugeordneten $I_{n\,k_n}$, ist das *unmittelbar klar*):

> Die Punkte des Kontinuums $[0,1)$ entsprechen via $(*)$ *umkehrbar eindeutig* den nicht in lauter Einsen endenden 0-1-Folgen.

Die *Vollständigkeit* des Kontinuums, geometrisch ausdrückbar dadurch, dass zu *jeder* Intervallschachtelung ein Punkt existiert, auf den sie sich zusammenzieht,[1] kommt hier zur Geltung als Konvergenz *jeder* Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{2^n}$ gegen eine reelle Zahl x, einen Punkt des Kontinuums.

> Eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten des Kontinuums $[0,1)$ umfasst niemals *alle* Punkte dieses Kontinuums.

Beweis:
Wir betrachten die zugehörigen 0-1-Folgen $(d_n^{(k)})$ mit $d_n^{(k)} := d_n(x_k)\; (n,k \in \mathbb{N})$ und definieren eine weitere 0-1-Folge (d_n) dadurch, dass wir d_{2n} *abweichend von* $d_{2n}^{(n)}$ wählen, während wir die ungeraden Stellen d_{2n-1} mit sämtlichen Gliedern *irgendeiner* nicht in lauter Einsen endenden 0-1-Folge auffüllen. So unterscheidet sich der zu (d_n) gehörende Punkt x von *allen* Punkten x_k. Und zugleich folgt: Die Menge solcher Punkte x ist gleichmächtig zum gesamten Kontinuum $[0,1)$. ∎

> *Überabzählbarkeit ohne Umwege:*
> Gegeben eine Punktfolge (x_k) aus $[0,1)$, wählen wir ein nichtleeres abgeschlossenes Intervall $I_1 \subseteq [0,1)$ mit $x_1 \notin I_1$, dann $I_2 \subseteq I_1$ mit $I_2 \neq \emptyset$, $x_2 \notin I_2$, $|I_2| \leq |I_1|/2$, dann $I_3 \subseteq I_2$ mit $I_3 \neq \emptyset$, $x_3 \notin I_3$, $|I_3| \leq |I_2|/2$, usw. Diese Intervallschachtelung zieht sich auf einen *von allen* x_k *verschiedenen* Punkt $x \in [0,1)$ zusammen.
>
> Also ist $[0,1)$ *nicht* abzählbar („überabzählbar“).

---

1 Bei Beschränkung auf *rationale* Punkte gilt dies *nicht*. Man kann z.B. leicht eine Intervallschachtelung obigen Typs angeben, die sich auf den Punkt x mit $x^2 = 1/2$ zusammenzieht: $I_n = [k_n 2^{-n}, (k_n+1)2^{-n}]$ mit $k_n^2 < 2^{2n-1} < (k_n+1)^2$. Klar: $k_{n+1} \in \{2k_n, 2k_n+1\}$.

Man kann leicht direkt zeigen, dass die Menge aller nicht in lauter Einsen endenden 0-1-Folgen gleichmächtig ist zur Menge *aller* 0-1-Folgen.

Wir weisen dies nach durch Angeben einer möglichst expliziten Bijektion:

Wir gehen aus von *allen* 0-1-Folgen und bilden alle diejenigen Folgen, die weder in lauter Einsen noch in lauter Nullen enden, jeweils *auf sich selbst* ab. Die restlichen Folgen bilden wir auf die in lauter Nullen endenden Folgen ab, und zwar so:

$$\mathbf{000\ldots \mapsto 000\ldots,\qquad 111\ldots \mapsto 1000\ldots,}$$

$$\boldsymbol{d_1\ldots d_k 1000\ldots \mapsto 0d_1\ldots d_k1000\ldots,\ d_1\ldots d_k0111\ldots \mapsto 1d_1\ldots d_k1000\ldots\ (k\geq 0)}$$

mit $d_1,\ldots,d_k\in\{0,1\}$. Der Fall $k=0$ ist derjenige, bei dem keine Glieder $d_1\ldots d_k$ vorkommen.

Die Menge aller 0-1-Folgen lässt sich auf natürliche Weise identifizieren mit der Gesamtheit aller Teilmengen, der *Potenzmenge* $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ einer *abzählbar* unendlichen Menge $\mathcal{M}=\{m_1,m_2,m_3,\ldots\}$. Jeder Teilmenge $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{M}$ entspricht umkehrbar eindeutig die 0-1-Folge (d_n) mit $d_n=1 :\Leftrightarrow m_n\in\mathcal{N}$. Also ist die Menge aller 0-1-Folgen *gleichmächtig* zu $\mathcal{P}(\mathcal{M})$. Wir wissen daher auch:

$$\mathcal{M}=\{m_1,m_2,m_3,\ldots\}\ \Rightarrow\ \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ ist gleichmächtig zum Kontinuum.}$$

In abstrakter Form zeigt das Überabzählbarkeits-Argument für die 0-1-Folgen, dass die Potenzmenge jeder Menge *mächtiger* ist als die Menge selbst, wie wir jetzt zeigen.

Jeder Teilmenge $\mathcal{N}$ einer Menge $\mathcal{M}$ entspricht umkehrbar eindeutig die Abbildung $\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{N}}:\mathcal{M}\to\{0,1\}$ mit $\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{N}}(m)=1 :\Leftrightarrow m\in\mathcal{N}$.

(Formulierung der Abbildung als „Familie“ $(d_m)_{m\in\mathcal{M}}$ mit $d_m:=\boldsymbol{\chi}_{\mathcal{N}}(m)\ (m\in\mathcal{M})$ zeigt die Analogie zum abzählbaren Fall der 0-1-Folgen.)

Sei ein $f:\mathcal{M}\to\mathcal{P}(\mathcal{M})$ gegeben. Da die Anzahl der in $f(\mathcal{M})$ vorkommenden Teilmengen von $\mathcal{M}$ höchstens genauso groß ist wie die Anzahl der „Freiheitsgrade“ bei der Definition *einer einzelnen* Teilmenge (statt von „Anzahl“ müsste man strenggenommen natürlich von *Mächtigkeit* reden), kann man eine in $f(\mathcal{M})$ *nicht vorkommende* Teilmenge $\mathcal{N}_0$ ganz einfach definieren durch

$$m\in\mathcal{N}_0\ :\Leftrightarrow\ m\notin f(m)\ (m\in\mathcal{M})\ \text{ (d.h. } \chi_{\mathcal{N}_0}(m)\neq\chi_{f(m)}(m)\ (m\in\mathcal{M})\text{).}$$

Jedes $m\in\mathcal{M}$ ist genau dann Element von $\mathcal{N}_0$, wenn es *nicht* Element von $f(m)$ ist, also $\mathcal{N}_0$ verschieden von allen $f(m)$, d.h. $\mathcal{N}_0\notin f(\mathcal{M})$.

Also ist $f:\mathcal{M}\to\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *nicht surjektiv*; es *gibt keine* Surjektion von $\mathcal{M}$ auf $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Da $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ *mindestens* die Mächtigkeit von $\mathcal{M}$ besitzt (die einelementigen Teilmengen sind ja eine zu $\mathcal{M}$ gleichmächtige Teilmenge von $\mathcal{P}(\mathcal{M})$), folgt:

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ ist stets von *höherer* Mächtigkeit als $\mathcal{M}$ selbst.

$|\mathcal{M}|$ bezeichne die *Mächtigkeit* einer Menge. *Kontinuumshypothese*: Es gibt keine Menge $\mathcal{M}$ mit $|\mathbb{N}|<|\mathcal{M}|<|\mathbb{R}|$. *Verallgemeinerte Kontinuumshypothese*: Ist $\mathcal{M}$ eine unendliche Menge, gibt es keine Menge $\mathcal{N}$ mit $|\mathcal{M}|<|\mathcal{N}|<|\mathcal{P}(\mathcal{M})|$. Die Hypothesen, von Georg Cantor formuliert, *stehen nicht im Widerspruch* zu den der Mathematik zugrundegelegten Axiomen (ZFC), zeigte Kurt Gödel. Sie *können* aber auf der Basis dieser Axiome *nicht bewiesen werden*, zeigte Paul Cohen.

Nachbemerkung:

Die Erkenntnisse hinsichtlich der Kontinuumshypothesen gehören zu den spektakulärsten Resultaten der Mathematik des 20. Jahrhunderts. Bis heute ist nicht wirklich klar, welche Konsequenzen für die axiomatische Grundlegung der Mathematik daraus zu ziehen sind. Die schon vorher bewiesenen *Gödelschen Unvollständigkeitssätze* hatten bereits gezeigt, dass axiomatische Systeme nie endgültig abgeschlossen sind (wenn sie die elementare Zahlentheorie umfassen). Dieser Einsicht wurden nun, als Beispiele für durch die übliche mathematische Axiomatik unbestimmte Sachverhalte, fundamentale Aussagen aus dem Bereich der mathematischen Grundlagenbegriffe an die Seite gestellt. Es zeigt sich, dass die *Menge der reellen Zahlen* – entgegen dem intuitiven alltäglichen Eindruck – durch unsere akzeptierten logisch-mengentheoretischen Argumentationsprinzipien *nicht* eindeutig umrissen und festgelegt ist.

Zwar haben sich die *Grundlagenkrise*, der *Grundlagenstreit* im mathematischen Alltag verflüchtigt. Unter dem nicht unmaßgeblichen Einfluss des Bourbaki-Kreises akzeptierte man ganz allgemein den Statusquo der mathematischen Axiomatik als – bei Bedarf eben zu revidierende bzw. zu ergänzende – Geschäftsgrundlage mathematischen Schließens.

Eigentlich stellt sich aber weiterhin die Frage: Was ist der Wesenskern der mathematischen Erkenntnisse? Was hat dauerhaft Bestand, unabhängig von allen verschiedenen Begründungs- und Fundierungsversuchen?

Schließlich kann man auch als heutiger Mathematiker die Werke von Euklid, Archimedes und Apollonios mit großem Erkenntnisgewinn lesen. Warum ist das so? Worin besteht der ewige, grundlagenunabhängige Gehalt an mathematischen Einsichten? Und wenn es gelungen ist, sich dies bewusst zu machen: Führt dies zu einer Abkehr von der bisherigen axiomatischen Fundierung der Mathematik oder zu ihrer Bestätigung?

Ein paar Literaturhinweise zum Kontinuumsproblem:

Raymond M. Smullyan / Melvin Fitting, *Set Theory and the Continuum Problem*, Dover 2010

Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis*, Dover 2008 (urspr. W.A. Benjamin 1966)

Kurt Gödel, *What is Cantor’s Continuum Problem?,* The American Mathematical Monthly 1947

Zur Grundlagenproblematik allgemein:

Philip J. Davis / Reuben Hersh, *Erfahrung Mathematik*, Birkhäuser 1986

Paul Benacerraf / Hilary Putnam, *Philosophy of Mathematics – Selected Readings*, Cambridge University Press 1983

(Der Aufsatz von Gödel ist, in revidierter Fassung von 1963, im letztgenannten Band enthalten.)