Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 9 (11.6.2021)

Aufgabe 41: Sei K ein Körper der Charakteristik 2, $t \in K$ und C die durch $y^2 = x^3 + t$ definierte ebene affine Kurve. Zeige:

(1) C ist absolut irreduzibel.
(2) C besitzt genau eine Singularität $S \in C(\overline{K})$.
(3) Ist K vollkommen, so gilt $S \in C(K)$.
(4) Ist $K = \mathbb{F}_2(t) = \{\frac{f(t)}{g(t)} : f(t), g(t) \in \mathbb{F}_2[t], g(t) \neq 0\}$ der rationale Funktionenkörper in t über $\mathbb{F}_2$, so gilt $S \notin C(K)$. (Die Singularität ist also über dem Grundkörper nicht „sichtbar“.)

Aufgabe 42: Im $\mathbb{P}^5$ der ebenen Quadriken (über $\mathbb{C}$) betrachte man

$$X = \{Q \text{ ebene Quadrik} : (1:0:0) \in Q, (0:1:0) \in Q, Q \text{ reduzibel}\}.$$

(1) Beschreibe X durch Gleichungen (in den Variablen $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$).
(2) Zerlege X in irreduzible Komponenten.
(3) Wie sehen die zu den Komponenten von X gehörigen Quadriken aus?

Aufgabe 43: Im Polynomring $K[x, y]$ sei $\mathfrak{a}$ das von den Polynomen

$$f_n = x^n - y^{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

erzeugte Ideal, d.h. $\mathfrak{a} = (\{f_n : n \in \mathbb{N}\})$. Da $K[x, y]$ ein noetherscher Ring ist, besitzt $\mathfrak{a}$ ein endliches Erzeugendensystem. Bestimme ein solches.

Aufgabe 44: Durch $x_0x_2^2 = x_1^3 - x_0^3$ wird eine irreduzible nichtsinguläre projektive ebene Kurve C über $\mathbb{C}$ definiert. Durch

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto ((x_0 : x_1), (x_0 : x_2))$$

erhält man eine rationale Abbildung $\phi : C \to \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(1) Die angegebene Darstellung für ϕ ist im Punkt $(0 : 0 : 1)$ nicht definiert. Zeige durch eine geeignete explizite Beschreibung, dass ϕ auch in $(0 : 0 : 1)$ definiert ist. (Also ist ϕ sogar ein Morphismus.)
(2) Zeige, dass ϕ injektiv ist.
(3) Da ϕ ein Morphismus und C projektiv ist, ist $\phi(C)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Beschreibe $\phi(C)$ durch Gleichungen. (Hinweis: $\phi(C)$ genügt einer Gleichung vom Bigrad $(3, 2)$.)
(4) Zeige, dass $\phi(C)$ singulär ist. (Also ist ϕ kein Isomorphismus.)

Aufgabe 45:

(1) Durch

$$\alpha(x, y) = (x + x^2 - 2xy + y^2, y + x^2 - 2xy + y^2)$$

wird ein Morphismus $\alpha : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definiert. Zeige, dass α ein Automorphismus ist (durch Bestimmung von α^{-1}).

(2) Für $f \in K[x]$ wird durch

$$\beta_f(x, y) = (x, y + f(x))$$

ein Morphismus $\beta_f : \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ definiert.

(a) Zeige, dass für $f, g \in K[x]$ gilt

$$\beta_{f+g} = \beta_f \circ \beta_g.$$

(b) Zeige, dass β_f ein Automorphismus ist.

(Die obigen Beispiele zeigen, dass es Automorphismen von $\mathbb{A}^2$ gibt, die keine Koordinatenwechsel sind.)