

Stabilität von Ruhelagen autonomer Systeme

1. Einführung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. (Dann ist f natürlich auch stetig.) Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

$$x' = f(x).$$

Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt eine **Ruhelage**, ein **kritischer Punkt**, ein **stationärer Punkt**, ein **Gleichgewichtspunkt** oder eine **Gleichgewichtslage**, wenn

$$f(x_0) = 0$$

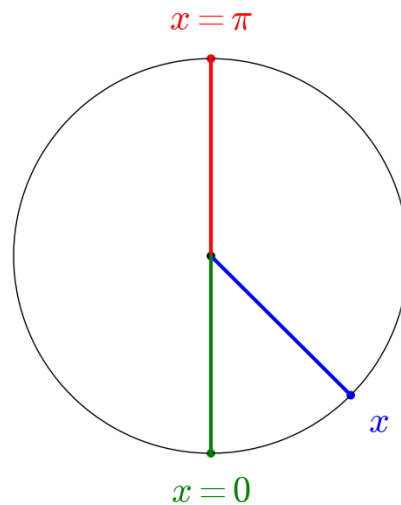
gilt. In diesem Fall ist die konstante Funktion

$$\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_{x_0}(t) = x_0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.

Beispiele:

- (1) (Physikalisches Pendel) Wir betrachten ein starres Pendel, bei dem eine Masse m an einem starren Stab der Länge 1 aufgehängt ist. (Man kann sich eine Schiffschaukel vorstellen, allerdings ohne Dämpfung.) x bezeichne den Winkel zwischen Pendel und der Vertikalen.



Auf das Pendel wirkt die Kraft $-mg \sin(x)$. Es gilt dann die Bewegungsgleichung

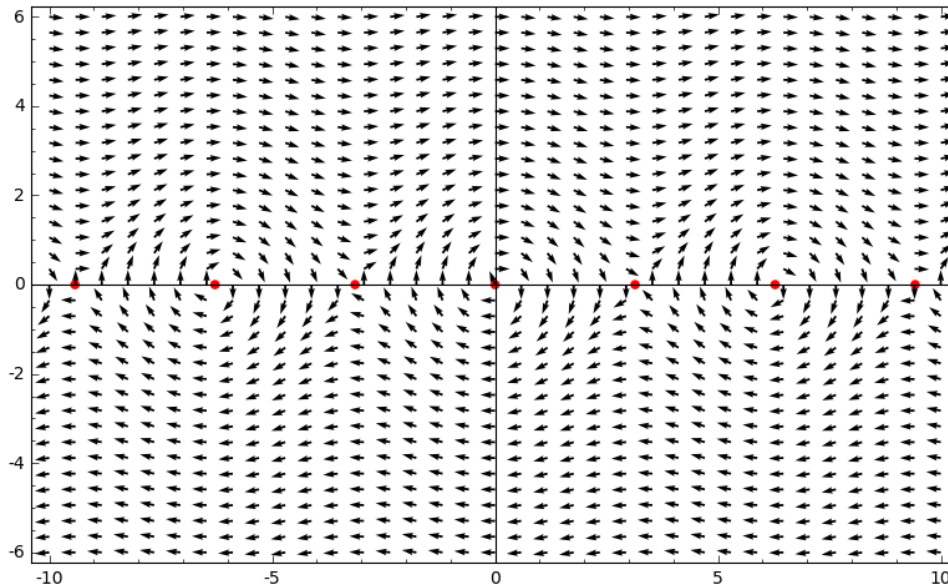
$$mx'' = -mg \sin(x).$$

Führen wir $y = x'$ ein, so erhalten wir ein autonomes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -g \sin(x) \end{aligned}$$

Ruhelagen sind die Punkte

$$(x, y) = (k \cdot \pi, 0) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$



Für $(x, y) = (0, 0)$ zeigt das Pendel nach unten. Bei leichten Auslenkungen bleibt das Pendel in der Nähe. (Man nennt eine solche Ruhelage **stabil**.) Auch $(x, y) = (\pi, 0)$ ist eine Ruhelage, das Pendel zeigt senkrecht nach oben. Bei einer leichten Auslenkung wird sich das Pendel aber nach unten bewegen. (Eine solche Ruhelage nennt man **instabil**.)

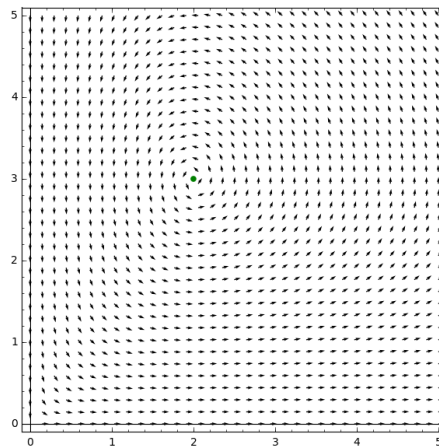
- (2) (Räuber-Beute-Modell - Lotka-Volterra-Gleichungen) Wir hatten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= (a - cy)x \\ y' &= (-b + dx)y \end{aligned}$$

betrachtet, und zwar für $x > 0$ und $y > 0$. (Als Definitionsmenge wird also $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ verwendet.) Man sieht sofort, dass

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{b}{d}, \frac{a}{c}\right)$$

die einzige Ruhelage (bei dieser Wahl des Definitionsbereichs) ist.

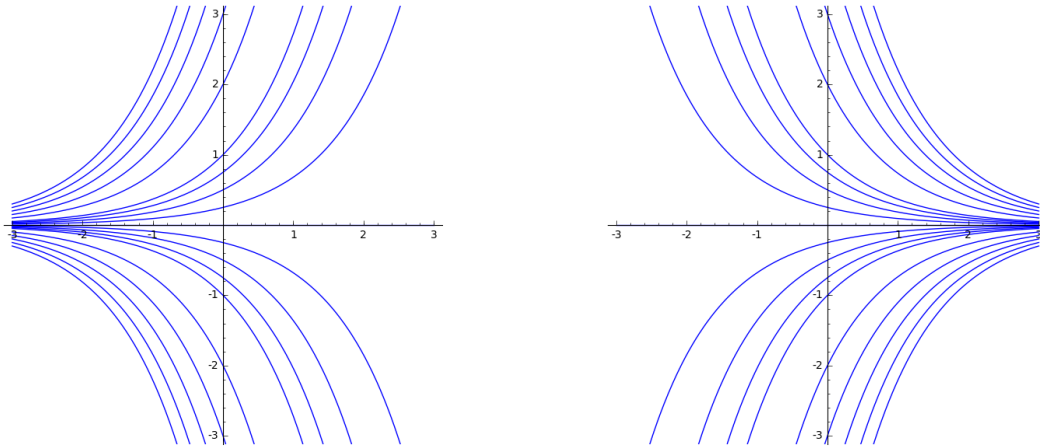


- (3) Wir betrachten in Dimension 1 die homogene lineare Differentialgleichung

$$x' = ax$$

im Fall $a \neq 0$. Einzige Ruhelage ist $x_0 = 0$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$\varphi_c(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$



Hier unterscheiden sich die Fälle $a > 0$ und $a < 0$ in ihrem Verhalten: Im Fall $a > 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_c(t)| = \infty$, im Fall $a < 0$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_c(t) = 0$.

Ist x_0 eine Ruhelage der Differentialgleichung $x' = f(x)$, so wird das Anfangswertproblem

$$x' = f(x), \quad x(0) = x_0$$

durch die konstante Funktion

$$\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi_{x_0}(t) = x_0$$

gelöst. Was passiert, wenn man die Anfangsbedingung leicht variiert? Die vorangegangenen Beispiele zeigen unterschiedliches Verhalten.

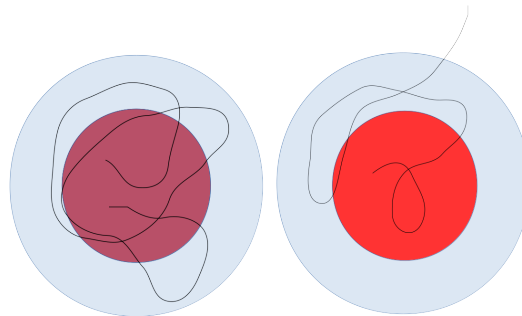
DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $x' = f(x)$ das zugehörige autonome Differentialgleichungssystem. Sei $x_0 \in D$ eine Ruhelage der Differentialgleichung $x' = f(x)$, d.h. $f(x_0) = 0$. Dann heißt x_0 bzw. die konstante Lösung φ_{x_0} **stabil** (oder **Liapunov-stabil**¹), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit folgender Eigenschaft:

Für alle $\xi \in D$ mit $\|\xi - x_0\| < \delta$ ist die Lösung φ_ξ des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = \xi$ für alle $t \geq 0$ definiert und es gilt

$$\|\varphi_\xi(t) - x_0\| < \varepsilon \text{ für alle } t \geq 0.$$

Ist dies nicht der Fall, heißt die Ruhelage x_0 **instabil**.

Das linke Bild soll eine stabile Ruhelage, das rechte eine instabile andeuten:



Beispiele:

¹Bei Knauf steht „Liapunov“, bei Wirsching „Ljapunow“

- (1) In \mathbb{R} mit $x' = ax$ ist die Ruhelage im Fall $a \leq 0$ stabil, im Fall $a > 0$ nicht stabil.
 (2) Das lineare autonome System

$$\begin{aligned}x' &= -y \\y' &= x\end{aligned}$$

hat die Hauptfundamentalmatrix

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

in $t = 0$. Die einzige Ruhelage ist $(0, 0)$. Für $\xi \in \mathbb{R}^2$ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \xi$$

$$\varphi_\xi(t) = \Phi(t)\xi$$

und es gilt

$$\|\varphi_\xi(t)\| = \|\xi\|,$$

woraus sofort folgt, dass die Ruhelage stabil ist. (Man kann $\delta = \varepsilon$ wählen.)

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $x' = f(x)$ das zugehörige autonome System. Eine Ruhelage x_0 des Systems heißt **attraktiv**, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle $\xi \in D$ mit $\|\xi - x_0\| < \delta$ die Lösung φ_ξ des Anfangswertproblems $x' = f(x)$, $x(0) = \xi$ für alle $t \geq 0$ definiert ist und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_\xi(t) = x_0$$

gilt.

Beispiele:

- (1) Für $a < 0$ ist die Ruhelage des Systems $x' = ax$ attraktiv, für $a \geq 0$ nicht.
 (2) Wir betrachten die autonome Differentialgleichung

$$x' = x(1 - x).$$

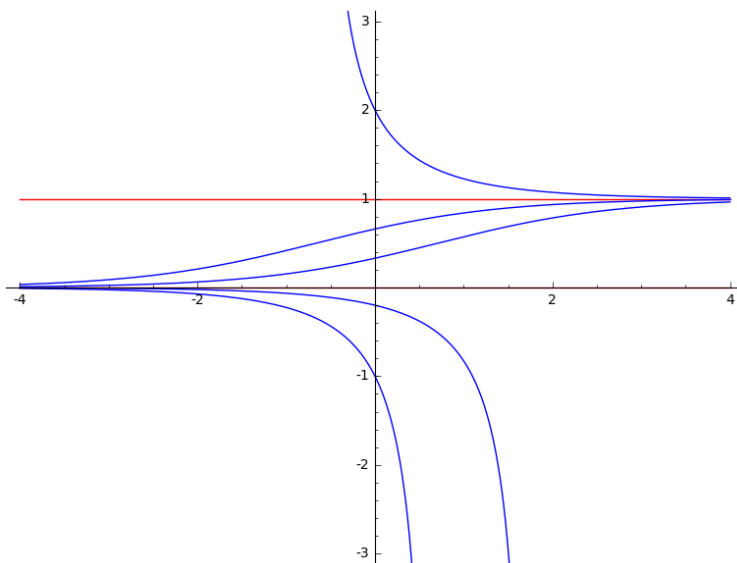
Die Ruhelagen sind 0 und 1. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = x(1 - x), \quad x(0) = \xi$$

ist

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\xi}{\xi + (1 - \xi)e^{-t}},$$

wobei wir auf die Angabe des maximalen Definitionsbereichs verzichtet haben.



Man überlegt sich schnell, dass die Ruhelage 0 instabil, die Ruhelage 1 aber attraktiv und stabil ist.

Bemerkung: Dass Stabilität nicht Attraktivität impliziert, sieht man am Beispiel $x' = 0$. Die Umkehrung klingt plausibel, stimmt aber nicht mehr in Dimension ≥ 2 .

Beispiel: Man betrachte das ebene autonome System, das in Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$r' = r(1 - r), \quad \varphi' = \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

gegeben wird.

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $x' = f(x)$ das zugehörige autonome System. Eine Ruhelage x_0 des Systems heißt **asymptotisch stabil**, wenn die Ruhelage stabil und attraktiv ist.

Beispiele:

- (1) Die Ruhelage $(0, 0)$ des autonomen Systems

$$\begin{aligned} x' &= -y \\ y' &= x \end{aligned}$$

ist nicht asymptotisch stabil, aber stabil. (Wir haben zuvor gesehen, dass $\|\varphi_\xi(t)\| = \|\xi\|$ gilt.)

- (2) Die Ruhelage 0 Differentialgleichung $x' = -x^3$ ist asymptotisch stabil. Die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = \xi$ ist

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2 t}}.$$

2. Stabilität linearer Systeme

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, so hat die autonome homogene lineare Differentialgleichung

$$x' = Ax$$

die Ruhelage $x_0 = 0$. Die Matrix e^{tA} ist die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$, d.h. ist $\xi \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\varphi_\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \varphi(t) = e^{tA}\xi$$

die maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = Ax, \quad x(0) = \xi.$$

LEMMA. Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die homogene lineare Differentialgleichung

$$x' = Ax.$$

Dann gilt:

- (1) Die Ruhelage $x_0 = 0$ ist genau dann stabil, wenn $\sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| < \infty$ gilt.
- (2) Die Ruhelage $x_0 = 0$ ist genau dann attraktiv, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$ gilt.
- (3) Die Ruhelage $x_0 = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$ gilt.

Beweis:

- (1) • Wir setzen voraus, dass $M = \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| < \infty$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wir setzen $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Sei nun $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| < \delta$ beliebig gegeben. Dann gilt für die Lösung $e^{tA}\xi$ des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(0) = \xi$

$$\|e^{tA}\xi\| \leq \|e^{tA}\| \|\xi\| \leq M \|\xi\| < M\delta = \varepsilon.$$

Dies beweist, dass die Ruhelage stabil ist.

- Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass die Ruhelage 0 stabil ist. Zu $\varepsilon = 1$ gibt es dann ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| \leq \delta$ für die Lösung $e^{tA}\xi$ des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(0) = \xi$ gilt $\|e^{tA}\xi\| \leq \varepsilon = 1$ für alle $t \geq 0$. Wir wählen $\xi = \delta e_i$, wo e_i der i -te Einheitsvektor ist. Dann ist $\|\xi\| = \delta$, und wir erhalten

$$\|e^{tA}\delta e_i\| \leq 1 \text{ für alle } t \geq 0.$$

Daher gilt

$$\|e^{tA}e_i\| \leq \frac{1}{\delta} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Es folgt

$$\|e^{tA}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e^{tA}e_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 = \frac{n}{\delta^2} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Daher gilt $\sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\| < \infty$.

- (2) • Gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$, so folgt für jeden Anfangswert $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\xi - 0\| = 0,$$

also ist die Ruhelage 0 attraktiv.

- Sei nun umgekehrt die Ruhelage 0 attraktiv. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft: Ist $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\xi\| \leq \delta$, so gilt für die Lösung $e^{tA}\xi$ des Anfangswertproblems $x' = Ax$, $x(0) = \xi$ die Beziehung $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\xi\| = 0$. Wählt man $\xi = \delta e_i$, so folgt $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\delta e_i\| = 0$, also $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}e_i\| = 0$, d.h. die i -te Spalte von e^{tA} konvergiert gegen 0. Damit folgt natürlich auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0.$$

- (3) Aus $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0$ folgt natürlich die Beschränktheit von $\|e^{tA}\|$. Daher ergibt sich die Aussage aus (1) und (2). ■

Beispiel: Wir betrachten für $\lambda \in \mathbb{R}$ das 2-dimensionale homogene lineare autonome System

$$x' = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Die Hauptfundamentalmatrix in $t = 0$ ist

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung mit Anfangswert $\xi = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ist also

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 + tc_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Norm erhält man

$$\|e^{tA}\| = e^{\lambda t} \sqrt{2 + t^2}.$$

Wir betrachten verschiedene Fälle:

- (1) **Fall $\lambda < 0$:** Für $M \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir die äquivalenten Bedingungen

$$\begin{aligned} \|e^{tA}\| \leq Me^{\frac{\lambda}{2}t} &\iff e^{\lambda t} \sqrt{2 + t^2} \leq Me^{\frac{\lambda}{2}t} \iff 2 + t^2 \leq M^2 e^{-\lambda t} \iff \\ &\iff 2 + t^2 \leq M^2 \left(1 + |\lambda|t + \frac{1}{2}|\lambda|^2 t^2 + \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} |\lambda|^k t^k\right) \iff \\ &\iff 2 + t^2 \leq M^2 + M^2 |\lambda|t + \frac{M^2 |\lambda|^2}{2} t^2 + M^2 \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} |\lambda|^k t^k \end{aligned}$$

Die Abschätzung gilt, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$2 \leq M^2 \text{ und } 1 \leq \frac{M^2 |\lambda|^2}{2},$$

was sich auch in der Form

$$M^2 \geq \max\left(2, \frac{2}{|\lambda|^2}\right)$$

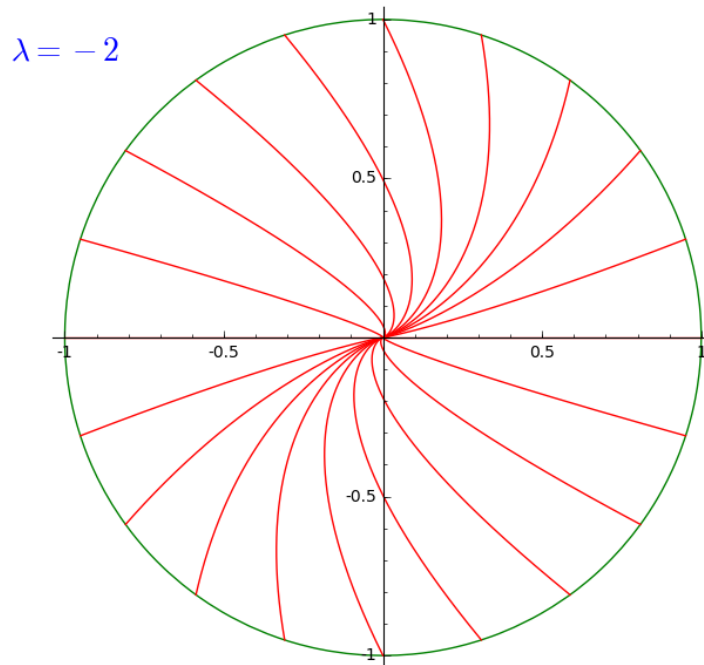
schreiben lässt. Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\|e^{tA}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \max(1, |\lambda|) \cdot e^{\frac{\lambda}{2}t}.$$

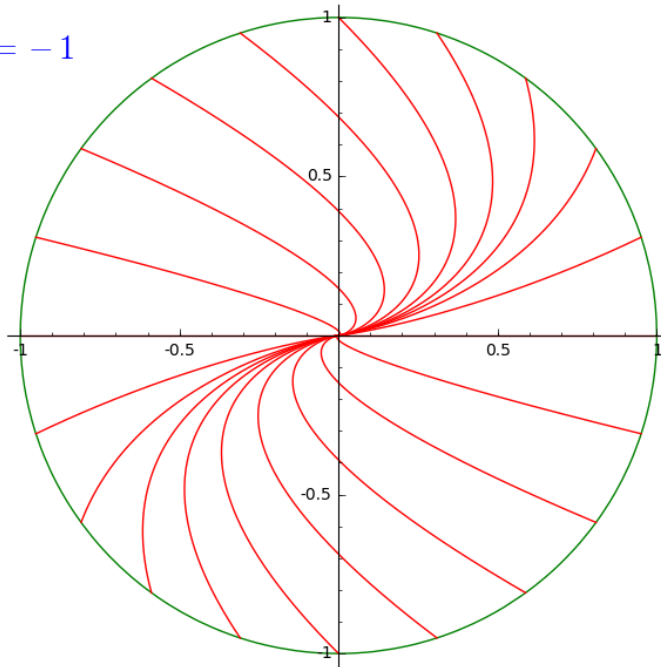
Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0,$$

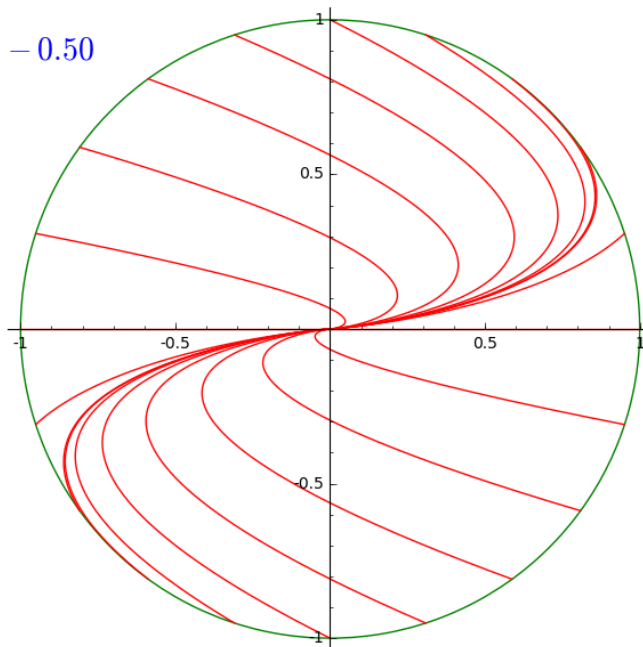
was beweist, dass die Ruhelage hier asymptotisch stabil ist. (Um dies zu sehen, hätten wir die Abschätzung nicht so explizit gebraucht.) Bei den folgenden Bildern haben wir jeweils 20 Punkte $\xi \in \mathbb{R}^2$ mit $\|\xi\| = 1$ gewählt. Die Lösungen starten auf dem Einheitskreis und laufen dann auf den Nullpunkt zu.

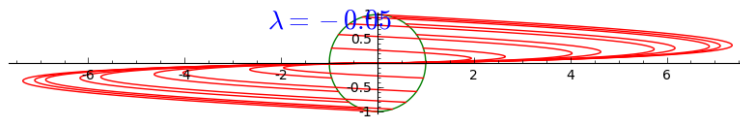
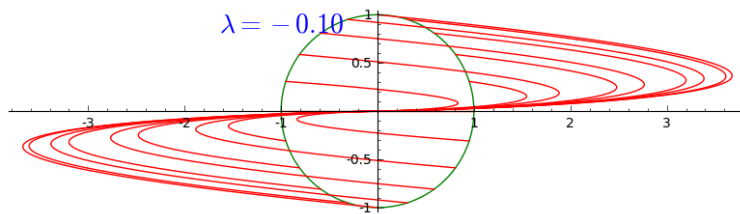
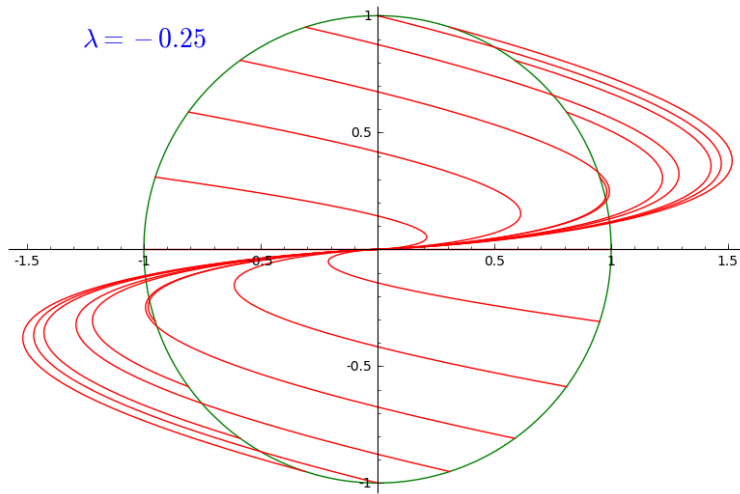


$$\lambda = -1$$

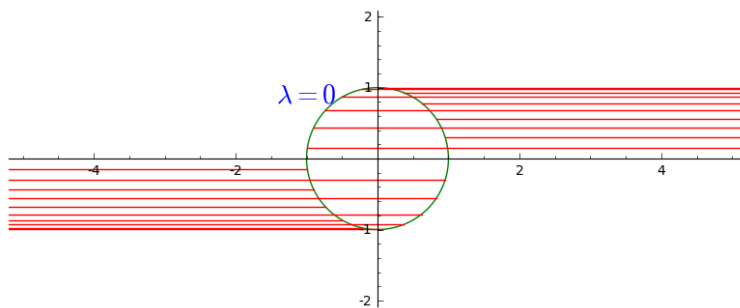


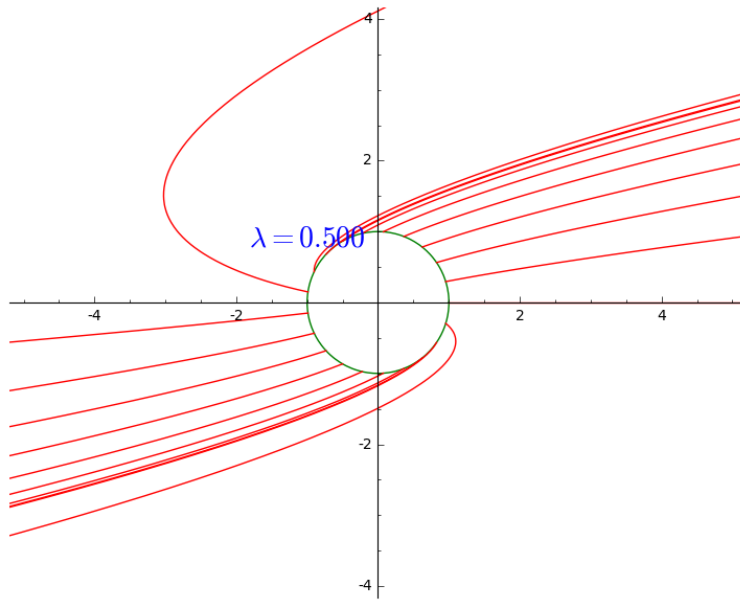
$$\lambda = -0.50$$





(2) **Fall $\lambda \geq 0$:** Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = \infty$ ist hier die Ruhelage 0 instabil.





Wir brauchen nun eine Abschätzung für $\|e^{tA}\|$ um ein handliches Stabilitätskriterium für die Differentialgleichung $x' = Ax$ zu erhalten.

LEMMA. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ die (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerte von A . Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $M(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$, sodass gilt

$$\|e^{tA}\| \leq M(\varepsilon)e^{(\max(\operatorname{Re}(\lambda_i)) + \varepsilon)t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweisidee:

- (1) Sei $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Jordansche Normalform von A und T eine Transformationsmatrix, sodass gilt $A = TJT^{-1}$. Dann gilt

$$e^{tA} = e^{tTJT^{-1}} = Te^{tJ}T^{-1},$$

und damit

$$\|e^{tA}\| \leq \|T\| \cdot \|e^{tJ}\| \cdot \|T^{-1}\| = \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \|e^{tJ}\|,$$

sodass wir nur noch $\|e^{tJ}\|$ abschätzen müssen.

- (2) Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$.

- (a) **Fall** $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$: Dann gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}.$$

O.E. können wir $\lambda_1 \leq \lambda_2$ annehmen. Dann gilt

$$\|e^{tJ}\| = \sqrt{e^{2\lambda_1 t} + e^{2\lambda_2 t}} \leq \sqrt{2e^{2\lambda_2 t}} = \sqrt{2} \cdot e^{\lambda_2 t} = \sqrt{2} \cdot e^{\max(\lambda_1, \lambda_2)t}.$$

Mit $M(\varepsilon) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \sqrt{2}$ folgt die Behauptung, sogar für $\varepsilon = 0$.

- (b) **Fall** $J = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & 0 \\ 0 & \alpha - i\beta \end{pmatrix}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$: Es gilt

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t} & 0 \\ 0 & e^{(\alpha-i\beta)t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} e^{i\beta t} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta t} \end{pmatrix},$$

und damit

$$\|e^{tJ}\| = e^{\alpha t} \sqrt{|e^{i\beta t}|^2 + |e^{-i\beta t}|^2} = \sqrt{2}e^{\alpha t} = \sqrt{2} \cdot e^{\max(\operatorname{Re}(\alpha \pm i\beta))t}.$$

Wie eben folgt die Behauptung mit $M(\varepsilon) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \sqrt{2}$, sie gilt sogar für $\varepsilon = 0$.

(c) **Fall** $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ **mit** $\lambda \in \mathbb{R}$: Es gilt

$$e^{tJ} = \exp\left(\lambda tI + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp(\lambda tI) \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\|e^{tJ}\| = e^{\lambda t} \sqrt{2 + t^2}.$$

Da für $\varepsilon > 0$ die Exponentialfunktion $e^{\varepsilon t}$ schneller gegen 0 konvergiert als $\sqrt{2 + t^2}$, gibt es eine Zahl $\widetilde{M}(\varepsilon) > 0$ mit

$$\sqrt{2 + t^2} \leq \widetilde{M}(\varepsilon) \cdot e^{\varepsilon t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Es folgt

$$\|e^{tJ}\| \leq \widetilde{M}(\varepsilon) \cdot e^{(\lambda + \varepsilon)t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Mit $M(\varepsilon) = \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \widetilde{M}(\varepsilon)$ folgt die Behauptung.

(3) Im Allgemeinfall setzt sich J aus Blockmatrizen zusammen:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_m \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & & \\ & e^{tJ_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{tJ_m} \end{pmatrix}$$

und

$$\|e^{tJ}\| = \sqrt{\|e^{tJ_1}\|^2 + \|e^{tJ_2}\|^2 + \dots + \|e^{tJ_m}\|^2},$$

sodass es genügt, die Abschätzung für die einzelnen Blöcke e^{tJ_j} zu zeigen.

(a) **Fall** $J_j = (\lambda_j)$ **mit** $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$: Hier gilt

$$\|e^{t(\alpha_j + i\beta_j)}\| = |e^{t(\alpha_j + i\beta_j)}| = e^{\alpha_j t} = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t}.$$

(b) **Fall** $J_j = \lambda_j I + N$ **mit** $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ **und** $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$: Es gilt in jedem

Fall $N^n = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned} e^{tJ_j} &= \exp(\lambda_j tI + tN) = \exp(\lambda_j tI) \exp(tN) = e^{\lambda_j t} \exp(tN) = \\ &= e^{\lambda_j t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = e^{\lambda_j t} \left(I + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{t^k}{k!} N^k \right), \\ \|e^{tJ_j}\| &\leq |e^{\lambda_j t}| \cdot \left(\|I\| + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|t|^k}{k!} \|N\|^k \right) = \\ &= e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} \cdot \left(\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n-1}^k}{k!} \cdot t^k \right). \end{aligned}$$

Nun gibt es eine Zahl $M_j(\varepsilon) > 0$, sodass gilt

$$\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n-1}^k}{k!} \cdot t^k \leq e^{\varepsilon t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Es folgt

$$\|e^{tJ_j}\| \leq M_j(\varepsilon) \cdot e^{(\operatorname{Re}(\lambda_j)+\varepsilon)t} \text{ für alle } t \geq 0.$$

Setzt man die Einzelergebnisse zusammen, folgt die Behauptung. ■

Geht man den vorangegangenen Beweis nochmals durch, so erhält man auch folgendes Lemma:

LEMMA. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A .

- (1) Gibt es einen Index j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = \infty.$$

- (2) Gibt es einen Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$, sodass die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts größer als die geometrische Vielfachheit ist, so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = \infty.$$

- (3) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für alle i , gibt es (mindestens) einen Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ und stimmt für jeden Eigenwert λ_j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ die algebraische Vielfachheit mit der geometrischen Vielfachheit überein, so gilt

$$0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| < \infty.$$

- (4) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i , so ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{tA}\| = 0.$$

Mit dem ersten Lemma dieses Abschnitts und dem vorangegangenen Lemma erhält man sofort folgenden Satz:

SATZ. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten wir die autonome Differentialgleichung

$$x' = Ax$$

mit der Ruhelage $x_0 = 0$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Eigenwerte von A . Dann gilt:

- (1) Die Ruhelage $x_0 = 0$ ist genau dann stabil wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:
- $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für alle i .
 - Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, so ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts λ_i .
- (2) Die Ruhelage $x_0 = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i gilt.

Beweis: Dies folgt sofort aus den vorangegangenen beiden Lemmas. ■

Beispiel: Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung

$$x' = Ax \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 3 & 15 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix ist $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$, die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Daher ist die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

3. Das Prinzip der linearisierten Stabilität

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x' = f(x)$$

und nehmen an, dass in x_0 eine Ruhelage ist, d.h. $f(x_0) = 0$. Die Funktion f wird in $x = x_0$ approximiert durch die lineare Abbildung $x \mapsto Df(x_0) \cdot (x - x_0)$, weswegen man fragen kann, wie gut die Lösungen der ursprünglichen Differentialgleichung $x' = f(x)$ durch Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$x' = Df(x_0)(x - x_0)$$

approximiert werden. Tatsächlich kann in Bezug auf Stabilitätsfragen folgender Satz gezeigt werden:

SATZ. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x_0 \in D$ eine Ruhelage der Differentialgleichung $x' = f(x)$, d.h. $f(x_0) = 0$. Sei $Df(x_0)$ die Jacobi-Matrix von f in x_0 und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Eigenwerte von $Df(x_0)$. Dann gilt:

- (1) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i , so ist die Ruhelage x_0 asymptotisch stabil.
- (2) Gibt es einen Index i mit $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, so ist die Ruhelage x_0 instabil.

Einen Beweis des Satzes findet man bei Prüss/Wilke auf den Seiten 112-115.

Beispiel: (nach F2004/1/5) Das autonome System

$$\begin{aligned} x' &= -\sin(x) \cos(y) + y(1 - 2e^y) \\ y' &= x \cos(x) - e^x \sin(y) \end{aligned}$$

hat die Ruhelage $(0, 0)$. Die Jacobi-Matrix ist

$$J = \begin{pmatrix} -\cos(x) \cos(y) & -2ye^y + \sin(x) \sin(y) - 2e^y + 1 \\ -x \sin(x) - e^x \sin(y) + \cos(x) & -\cos(y)e^x \end{pmatrix}$$

und

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom von $J(0, 0)$ ist $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, die Eigenwerte sind

$$\lambda_{1/2} = -1 \pm i.$$

Daher ist die Ruhelage $(0, 0)$ asymptotisch stabil.

Beispiel: (nach H2018/3/3) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_1(x_2 + 1) - 2, -2x_2)^t.$$

- a) Bestimmen Sie die Gleichgewichtspunkte von $x' = f(x)$. Sei $f_1 = x_1^2 - x_1(x_2 + 1) - 2$, $f_2 = -2x_2$. Wir setzen $f_1 = f_2 = 0$ um die Ruhelagen zu bestimmen:

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 = 0 &\iff x_1^2 - x_1(x_2 + 1) - 2 = 0 \text{ und } -2x_2 = 0 \iff \\ &\iff x_1^2 - x_1(x_2 + 1) - 2 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \iff \\ &\iff x_1^2 - x_1 - 2 = 0 \text{ und } x_2 = 0 \iff \\ &\iff (x_1 - 2)(x_1 + 1) = 0 \text{ und } x_2 = 0 \iff \\ &\iff (x_1, x_2) \in \{(-1, 0), (2, 0)\}. \end{aligned}$$

Die Gleichgewichtspunkte sind also

$$(-1, 0) \quad \text{und} \quad (2, 0).$$

- b) Überprüfen Sie, ob die Gleichgewichtspunkte aus a) asymptotisch stabile Lösungen sind.
Wir bilden die Jacobi-Matrix:

$$J(x_1, x_2) = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)}(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 - 1 & -x_1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J(2, 0) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $J(-1, 0)$ sind also -3 und -2 . Da $J(-1, 0)$ zwei negative Eigenwerte hat, ist die Ruhelage $(-1, 0)$ asymptotisch stabil.

Die Eigenwerte von $J(2, 0)$ sind 3 und -2 . Da $J(2, 0)$ einen positiven Eigenwert hat, ist die Ruhelage $(2, 0)$ instabil.

Bemerkung: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x_0 eine Ruhelage des Systems $x' = f(x)$, d.h. $f(x_0) = 0$. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte der Jacobi-Matrix $Df(x_0)$. Der Linearisierungssatz führt in folgenden Situationen zum Ziel:

- (1) Gilt $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für alle i , so ist die Ruhelage asymptotisch stabil.
- (2) Gibt es einen Index j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, so ist die Ruhelage x_0 instabil.

In der folgenden Situation macht der Linearisierungssatz keine Aussage:

- (3) Falls $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für alle i gilt und es einen Index j mit $\operatorname{Re}(\lambda_j) = 0$ gibt, ist keine Aussage mit dem Linearisierungssatz möglich. (Dies zeigen auch die folgenden Beispiele.)

Beispiele: Wir betrachten stetig differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(0) = f'(0) = 0$. Dann ist 0 eine Ruhelage des Systems $x' = f(x)$, die Jacobi-Matrix $Df(0) = f'(0)$ ist 0 , hat also den Eigenwert 0 .

- (1) Ist $f(x) = -x^3$, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil, die Lösungen sind

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\xi}{\sqrt{1 + 2\xi^2 t}}.$$

- (2) Ist $f(x) = x^2$, so ist die Lösung des Anfangswertproblems $x(0) = \xi$

$$\varphi_\xi(t) = \frac{\xi}{1 - \xi t}.$$

Für kein $\xi > 0$ ist die Lösung für alle $t \geq 0$ definiert, die Ruhelage 0 ist instabil.

- (3) Ist $f(x) = 0$, so sind die Lösungen

$$\varphi_\xi(t) = \xi.$$

Die Ruhelage 0 ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

4. Liapunov-Funktionen

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$x' = f(x).$$

Sei $f = (f_1, \dots, f_n)^t$.

- (1) Eine Funktion $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Liapunov-Funktion** für das autonome System, falls L stetig differenzierbar ist und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) f_i(x) \leq 0 \quad \text{für alle } x \in D$$

gilt. (Alternativ kann man schreiben $\nabla L(x) \cdot f(x) \leq 0$ für alle $x \in D$.)

- (2) Eine Funktion $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **strikte Liapunov-Funktion** für das autonome System, falls L stetig differenzierbar ist und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) f_i(x) < 0 \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } f(x) \neq 0$$

gilt.

Das folgende Lemma enthält eine wesentliche Eigenschaft von Liapunov-Funktionen:

LEMMA. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$x' = f(x).$$

Sei $\varphi : (t_-, t_+) \rightarrow D$ eine Lösung der Differentialgleichung.

- (1) Ist $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Liapunov-Funktion für das autonome System, so ist die Funktion

$$(t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto L(\varphi(t))$$

monoton fallend.

- (2) Ist $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikte Liapunov-Funktion für das System $x' = f(x)$ und ist φ nicht konstant, so ist die Funktion

$$(t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto L(\varphi(t))$$

streng monoton fallend.

Beweis: Wir definieren

$$\sigma : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } \sigma(t) = L(\varphi(t)).$$

Dann gilt nach der Kettenregel

$$\sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi'_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial x_i}(\varphi(t)) f_i(\varphi(t)) = \nabla L(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)).$$

- Ist L eine Liapunov-Funktion, so folgt $\sigma'(t) \leq 0$, also ist σ monoton fallend.
- Sei nun L eine strikte Liapunov-Funktion und φ nicht konstant. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit jedes Anfangswertproblems läuft φ durch keine Ruhelage, d.h. $f(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in (t_-, t_+)$. Es folgt $\sigma'(t) < 0$ für alle $t \in (t_-, t_+)$. Es folgt die Behauptung. ■

SATZ. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$x' = f(x)$$

mit der Ruhelage x_0 .

- (1) Ist $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Liapunov-Funktion für das System und hat L in x_0 ein striktes lokales Minimum, so ist die Ruhelage x_0 stabil.
- (2) Ist $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine strikte Liapunov-Funktion für das System, hat L in x_0 ein striktes lokales Minimum und ist x_0 isoliert in $\{x \in D : f(x) = 0\}$, so ist die Ruhelage x_0 asymptotisch stabil.

Beweis:

- (1) Die Funktion L habe nun ein striktes lokales Minimum in x_0 , wo x_0 eine Ruhelage von $x' = f(x)$ ist.

- Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Für die folgenden Überlegungen können wir ε verkleinern. Deswegen können wir annehmen, dass gilt

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\} \subseteq D$$

und

$$L(x_0) < L(x) \text{ für alle } x \in D \text{ mit } \|x - x_0\| \leq \varepsilon \text{ und } x \neq x_0.$$

Sei

$$M = \min\{L(x) : x \in D \text{ und } \|x - x_0\| = \varepsilon\}.$$

Dann gilt $L(x_0) < M$. Wegen der Stetigkeit von L und $L(x_0) < M$ gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

$$\|x - x_0\| < \delta \implies L(x) < M.$$

- Sei nun $\xi \in D$ mit $\|\xi - x_0\| < \delta$. Sei $\varphi : [0, t_+)$ die nach rechts maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = f(x), \quad x(0) = \xi.$$

Dann können wir $t \mapsto L(\varphi(t))$ betrachten. Da diese Funktion monoton fällt, folgt

$$L(\varphi(t)) \leq L(\varphi(0)) = L(\xi) < M \text{ für alle } t \in [0, t_+).$$

- Angenommen, es existiert ein t_1 mit

$$\|\varphi(t_1) - x_0\| = \varepsilon.$$

Dann würde folgen

$$L(\varphi(t_1)) \geq M,$$

im Widerspruch zu $L(\varphi(t)) < M$ für alle $t \in [0, t_+)$. Es folgt

$$\|\varphi(t) - x_0\| < \varepsilon \text{ für alle } t \in [0, t_+).$$

Die Lösung kommt also dem Rand nicht nahe und ist beschränkt, woraus nach dem Satz über das Randverhalten

$$t_+ = \infty$$

folgt. Außerdem folgt die Stabilität.

- (2) Ein Beweis findet sich bei Prüss/Wilke auf Seite 126. ■

Bemerkungen:

- (1) (nach Aulbach, S.361) Leider gibt es keine generelle Antwort, wie man zu einem vorgegebenen System eine Liapunov-Funktion bestimmen kann, außer im Fall $n = 1$.
- (2) Für die Anwendung braucht man keine auf dem ganzen Definitionsbereich D definierte Liapunov-Funktion mit entsprechenden Eigenschaften, es reicht, wenn dies auf einer offenen Teilmenge $\tilde{D} \subseteq D$ mit $x_0 \in \tilde{D}$ der Fall ist.

Beispiele:

- (1) (nach F2014/1/1) Das autonome System

$$\begin{aligned} x' &= -x^3 + y^5 \\ y' &= -xy^4 - y^3 \end{aligned}$$

hat die Ruhelage $(0, 0)$. Die Jacobi-Matrix ist

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 5y^4 \\ -y^4 & -4xy^3 - 2y^2 \end{pmatrix}$$

und $J(0, 0) = 0$. Daher kann man mit Hilfe des Linearisierungssatzes keine Aussage über die Stabilität der Ruhelage $(0, 0)$ machen. Wir setzen

$$f(x, y) = -x^3 + y^5, \quad g(x, y) = -xy^4 - y^3.$$

Wir versuchen eine Liapunov-Funktion zu finden und probieren es einfach mal mit $L(x, y) = x^2 + y^2$, da diese Funktion in $(0, 0)$ ein striktes globales Minimum hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x, y)f(x, y) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y)g(x, y) &= 2x \cdot (-x^3 + y^5) + 2y \cdot (-xy^4 - y^3) = \\ &= -2x^4 + 2xy^5 - 2xy^5 - 2y^4 = \\ &= -2x^4 - 2y^4. \end{aligned}$$

Offensichtlich handelt es sich sogar um eine strikte Liapunov-Funktion für das System. Da L in $(0, 0)$ ein striktes Minimum hat, ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

- (2) (nach F2002/1/4) Wir betrachten das autonome System

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x^2y - \sin(x) \end{pmatrix},$$

das offensichtlich die Ruhelagen $(k\pi, 0)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ hat. Wir bilden die Jacobi-Matrix:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2xy - \cos(x) & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Es ist

$$J(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1} & -k^2\pi^2 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + k^2\pi^2\lambda + (-1)^k$$

und den Eigenwerten

$$\lambda_{+/-} = \frac{-k^2\pi^2 \pm \sqrt{k^4\pi^4 - 4(-1)^k}}{2}.$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

- **Fall $k = 0$:** Dann ist $\lambda_{+/-} = \pm i$. Der Linearisierungssatz macht hier keine Aussage.
- **Fall $k \neq 0$, k gerade:** Dann ist

$$\lambda_+ = \frac{-k^2\pi^2 + \sqrt{k^4\pi^4 - 4}}{2} < 0 \text{ und } \lambda_- = \frac{-k^2\pi^2 - \sqrt{k^4\pi^4 - 4}}{2} < 0,$$

die Ruhelage $(k\pi, 0)$ ist also asymptotisch stabil.

- **Fall $k \neq 0$, k ungerade:** Dann ist

$$\lambda_+ = \frac{-k^2\pi^2 + \sqrt{k^4\pi^4 + 4}}{2} > 0 \text{ und } \lambda_- = \frac{-k^2\pi^2 - \sqrt{k^4\pi^4 + 4}}{2} < 0.$$

Die Ruhelage $(k\pi, 0)$ ist instabil.

Zur Untersuchung der Ruhelage $(0, 0)$ versuchen wir eine Liapunov-Funktion L zu finden. Wir brauchen also eine Funktion L mit der Eigenschaft

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) \cdot y + \frac{\partial L}{\partial y} \cdot (-x^2y - \sin(x)) \leq 0.$$

Man sieht schnell, dass der Ansatz $L(x, y) = x^2 + y^2$ nicht funktioniert. Wir probieren es mit $L(x, y) = u(x) + v(y)$. Wir erhalten die Bedingung

$$u'(x)y + v'(y)(-x^2y - \sin(x)) \leq 0.$$

Wir probieren $v(y) = y^2$. Dann lautet die Bedingung

$$u'(x)y + 2y(-x^2y - \sin(x)) \leq 0, \quad \text{also} \quad -2x^2y^2 + (u'(x) - 2\sin(x))y \leq 0.$$

Wählen wir $u(x) = -2\cos(x)$, so folgt $L(x, y) = -2\cos(x) + y^2$ und

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y) \cdot y + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y) \cdot (-x^2y - \sin(x)) = 2\sin(x)y + 2y(-x^2y - \sin(x)) = -2x^2y^2 \leq 0.$$

Die Funktion

$$L(x, y) = -2\cos(x) + y^2$$

ist also tatsächlich eine Liapunov-Funktion für das System. $L(x, y)$ hat in $(0, 0)$ ein striktes lokales Minimum, was beweist, dass die Ruhelage $(0, 0)$ stabil ist. (Auch in $(k\pi, 0)$ mit geradem k hat L ein striktes lokales Minimum, sodass auch die Ruhelagen $(k\pi, 0)$ für gerades k stabil sind. Oben haben wir sogar eine bessere Aussage gezeigt, nämlich die asymptotische Stabilität.)

SATZ. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig und $L : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $-f$, d.h. $L'(x) = -f(x)$. Dann ist L eine strikte Liapunov-Funktion für die autonome Differentialgleichung

$$x' = f(x).$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{dL}{dx}(x) \cdot f(x) = -f(x)^2 \begin{cases} = 0, & \text{falls } f(x) = 0, \\ < 0, & \text{falls } f(x) \neq 0. \end{cases}$$

Also ist L eine strikte Liapunov-Funktion für die autonome Differentialgleichung $x' = f(x)$. ■

Beispiel: Für die autonome Differentialgleichung $x' = -x^3$ ist $L(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine strikte Liapunov-Funktion. Da L in der Ruhelage $x = 0$ ein absolutes striktes Minimum hat, ist die Ruhelage 0 asymptotisch stabil.

5. Erhaltungsgrößen - erste Integrale für ebene autonome Systeme

DEFINITION. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das autonome System

$$x' = f(x)$$

und schreiben $f = (f_1, \dots, f_n)^t$. Eine Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Erhaltungsgröße** oder ein **erstes Integral** für das autonome System, wenn F stetig differenzierbar ist und

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x) f_i(x) = 0 \text{ für alle } x \in D$$

gilt. (Alternativ kann man auch schreiben $\nabla F(x) \cdot f(x) = 0$ für alle $x \in D$.)

Jede Erhaltungsgröße ist also insbesondere eine Liapunov-Funktion für das autonome System. Eine wesentliche Eigenschaft von Erhaltungsgrößen gibt das folgende Lemma an:

LEMMA. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral für das autonome System

$$x' = f(x).$$

Ist dann $\varphi : (t_-, t_+) \rightarrow D$ eine Lösung der Differentialgleichung, so gibt es eine Konstante c mit

$$F(\varphi(t)) = c \text{ für alle } t \in (t_-, t_+),$$

d.h. F ist konstant auf den Lösungskurven.

Beweis: Wir definieren

$$\sigma : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R} \text{ durch } \sigma(t) = F(\varphi(t)).$$

Dann gilt mit der Kettenregel

$$\sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(t)) \varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\varphi(t)) f_i(\varphi(t)) = 0,$$

woraus sofort die Behauptung folgt. ■

Wir betrachten im Folgenden nur ebene autonome Systeme:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ lokal Lipschitz-stetig. Wir betrachten das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned}$$

Nach dem globalen Existenz- und Eindeigkeitssatz hat jedes Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung. Sei

$$\varphi : (t_-, t_+) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

eine maximale Lösung des Differentialgleichungssystems. Dann wird die Bildmenge

$$\{\varphi(t) \in \mathbb{R}^2 : t \in (t_-, t_+)\}$$

auch **Trajektorie**, **Orbit** oder **Bahn** genannt.

Man kann nicht hoffen, dass sich jedes Differentialgleichungssystem explizit lösen lässt. Manchmal kann man aber mit folgenden Überlegungen Aussagen über die Lösungskurven und Trajektorien erhalten. Ist $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ ein erstes Integral des autonomen Systems und $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ (mit $t \in (t_-, t_+)$) eine Lösung des Systems, so gibt es eine Konstante c mit

$$F(x(t), y(t)) = c \text{ für alle } t \in (t_-, t_+).$$

Insbesondere sind die Lösungskurven/Trajektorien in den Niveaumengen

$$\{(x, y) \in D : F(x, y) = c\}$$

enthalten.

Überlegungen: Wie kann man erste Integrale finden?

- Wir betrachten

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

Wir versuchen y als Funktion von x zu betrachten. Wir schreiben

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'}{x'} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$$

und „kürzen“ im ersten Ausdruck dt . Dann folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)},$$

und damit

$$g(x, y) - f(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Diese Differentialgleichung haben wir im Zusammenhang mit exakten Differentialgleichungen betrachtet. Angenommen, wir finden einen integrierenden Faktor $\mu(x, y)$, der die Differentialgleichung exakt macht:

$$\mu(x, y)g(x, y) - \mu(x, y)f(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)g(x, y)) = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y)f(x, y)).$$

Wenn der Definitionsbereich \mathbb{R}^2 oder ein Rechteck ist, können wir eine Stammfunktion ausrechnen:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x \mu(t, y)g(t, y)dt - \int_{y_0}^y \mu(x_0, t)f(x_0, t)dt.$$

Dann gilt also

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mu(x, y)g(x, y), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -\mu(x, y)f(x, y).$$

- Wir zeigen, dass die Stammfunktion $F(x, y)$ ein erstes Integral für das Differentialgleichungssystem ist:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot f(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot g(x, y) = \mu(x, y)g(x, y) \cdot f(x, y) + (-\mu(x, y)f(x, y)) \cdot g(x, y) = 0.$$

Wir fassen das Ergebnis in folgendem Satz zusammen:

SATZ. Gegeben sei das ebene autonome System

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\y' &= g(x, y)\end{aligned}$$

Ist $\mu(x, y)$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung

$$g(x, y) - f(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

und $F(x, y)$ eine Stammfunktion der exakten Differentialgleichung

$$\mu(x, y)g(x, y) - \mu(x, y)f(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

so ist $F(x, y)$ ein erstes Integral des autonomen Systems.

Beispiel: Wir betrachten das zum Pendel gehörige Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -g \sin(x)\end{aligned}$$

Wir bilden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{g \sin(x)}{y}$$

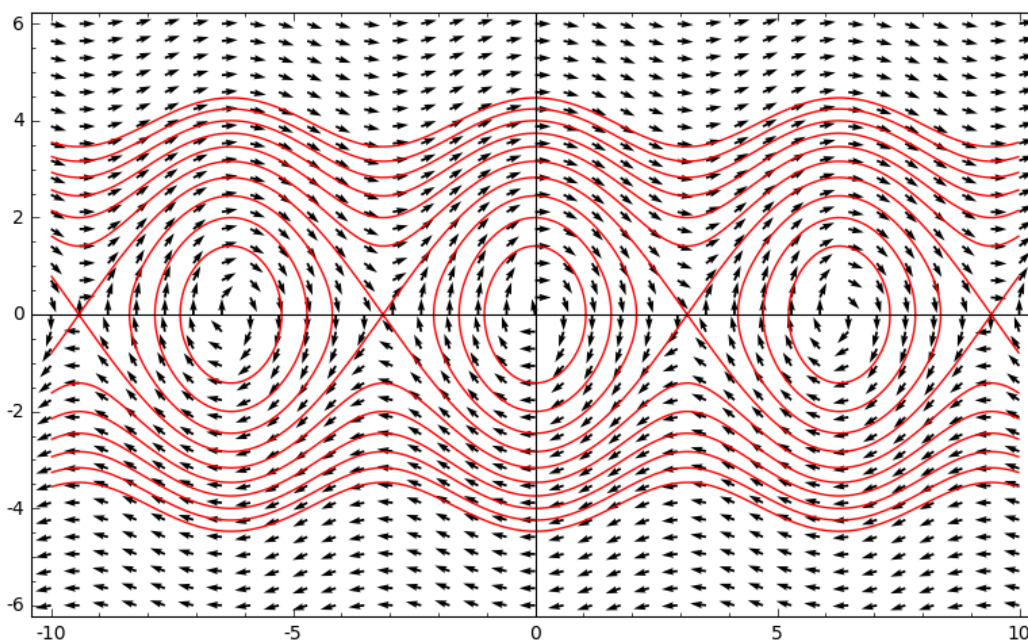
und damit

$$g \sin(x) + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist bereits exakt. Wir berechnen eine Stammfunktion und damit ein erstes Integral:

$$F(x, y) = \int_0^x g \sin(t) dt + \int_0^y t dt = g [-\cos(t)]_{t=0}^x + \frac{1}{2}y^2 = g(1 - \cos(x)) + \frac{1}{2}y^2$$

Das Bild zeigt das Richtungsfeld (im Fall $g = 2$) zusammen mit einigen Niveaulinien $F(x, y) = c$:

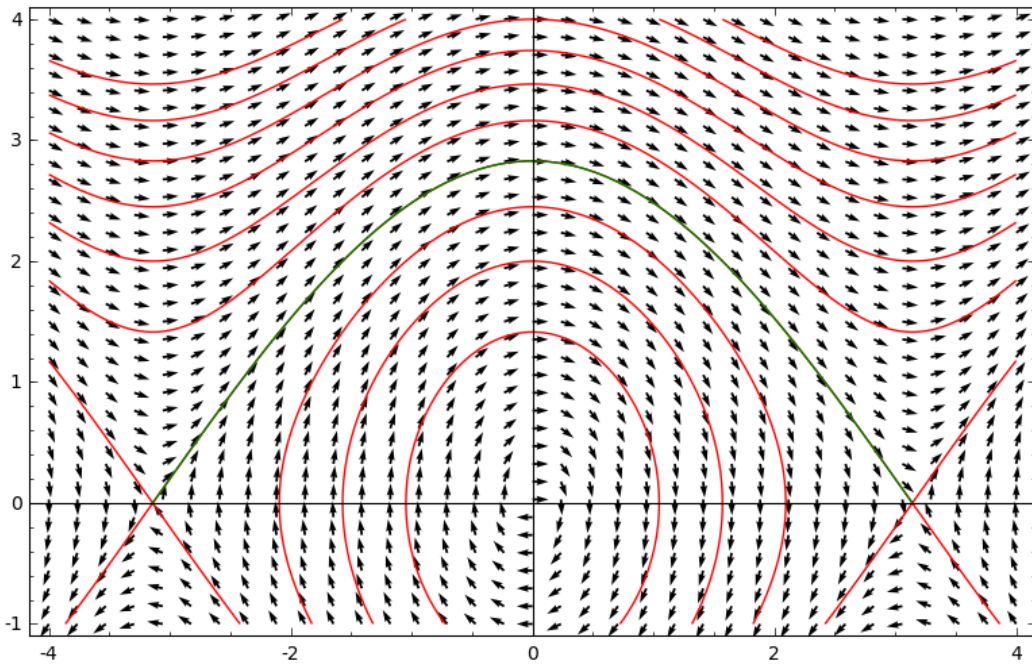


Wir betrachten die Niveaulinie, die die Ruhelage $(\pi, 0)$ enthält:

$$\begin{aligned}F(x, y) = F(\pi, 0) &\iff F(x, y) = g(1 - \cos(\pi)) \iff g(1 - \cos(x)) + \frac{1}{2}y^2 = 2g \iff \\ &\iff \frac{1}{2}y^2 = g(1 + \cos(x)) \iff y = \pm \sqrt{2g(1 + \cos(x))}.\end{aligned}$$

Die Niveaulinie enthält auch den Punkt $(0, 2\sqrt{g})$. Da $(-\pi, 0)$ und $(\pi, 0)$ Ruhelagen sind, ist die $(0, 2\sqrt{g})$ enthaltende Trajektorie die Kurve

$$y = \sqrt{2g(1 + \cos(x))} \text{ mit } -\pi < x < \pi.$$



Beispiel: (Räuber-Beute-Modell - Lotka-Volterra-Gleichungen) Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}x' &= (a - cy)x \\y' &= (-b + dx)y\end{aligned}$$

(Für die Bilder haben wir $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$ gewählt.) Wir wollen versuchen, ein erstes Integral zu bestimmen:

- Wir bilden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{(-b + dx)y}{(a - cy)x},$$

und damit

$$(b - dx)y + (a - cy)x \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial y}((b - dx)y) = b - dx \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}((a - cy)x) = a - cy$$

ist diese Differentialgleichung nicht exakt.

- Wir brauchen einen integrierenden Faktor. Wir wählen $\mu(x, y) = \frac{1}{xy}$. Multiplikation der Differentialgleichung mit $\frac{1}{xy}$ liefert die Differentialgleichung

$$\left(\frac{b}{x} - d\right) + \left(\frac{a}{y} - c\right) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

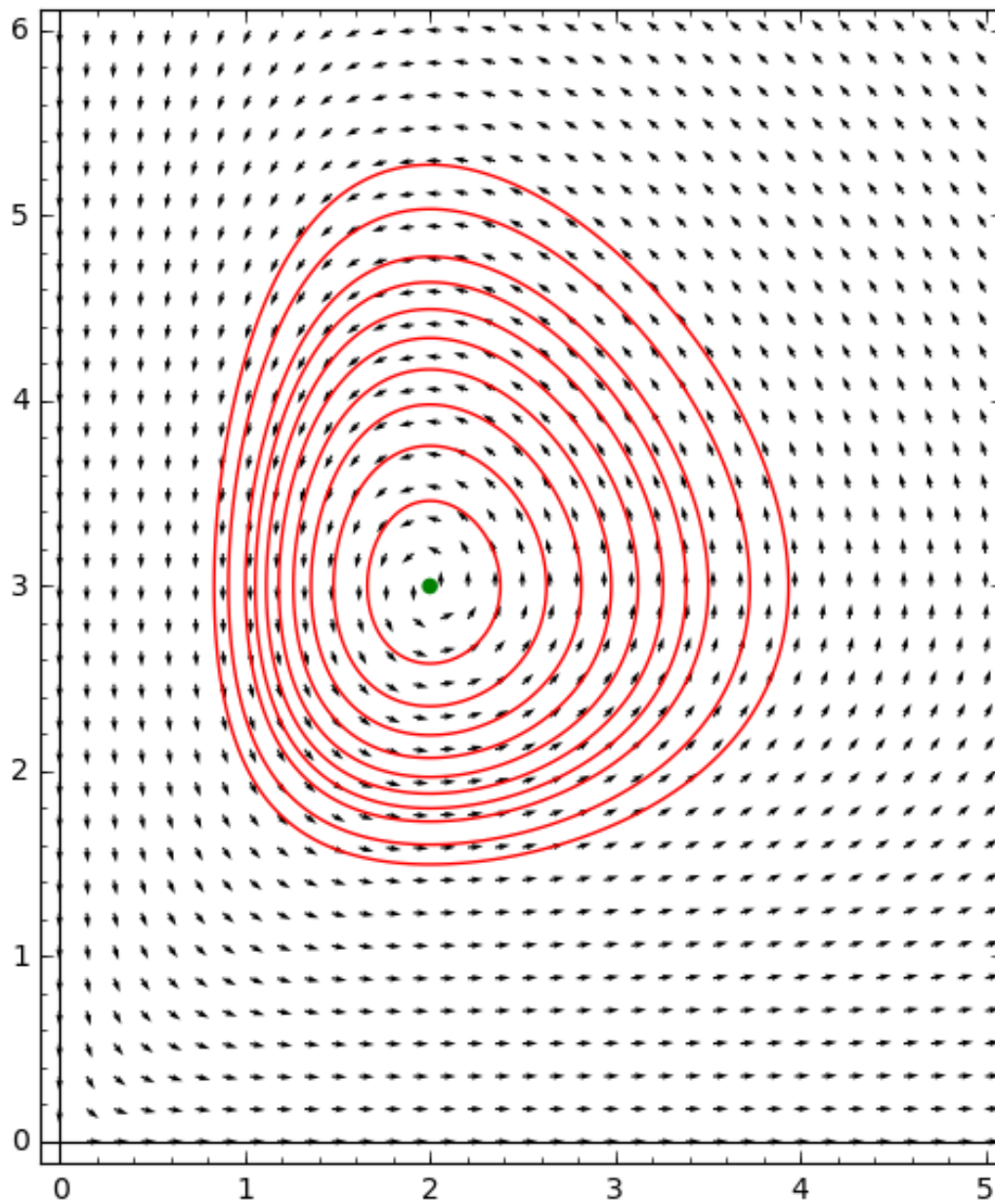
Diese Differentialgleichung ist exakt. Wir berechnen eine Stammfunktion:

$$\begin{aligned}F(x, y) &= \int_1^x \left(\frac{b}{t} - d\right) dt + \int_1^y \left(\frac{a}{t} - c\right) dt = [b \ln(t) - d \cdot t]_{t=1}^x + [a \ln(t) - c \cdot t]_{t=1}^y = \\ &= b \ln(x) - d \cdot x + d + a \ln(y) - c \cdot y + c\end{aligned}$$

Da es bei der Stammfunktion wie beim ersten Integral nicht auf eine additive Konstante ankommt, wählen wir als Stammfunktion und erstes Integral die Funktion

$$F(x, y) = b \ln(x) - d \cdot x + a \ln(y) - c \cdot y.$$

Das Bild zeigt einige Niveaulinien, grün ist die Ruhelage:

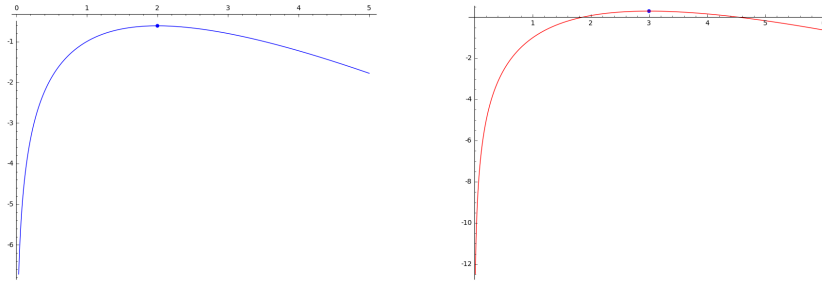


Es sieht so aus, als wären die Trajektorien geschlossene Kurven. Man kann dies auch mathematisch, ausgehend vom ersten Integral $F(x, y)$, erläutern:

- Wir definieren

$$A(x) = b \ln(x) - dx \quad \text{und} \quad B(y) = a \ln(y) - cy.$$

Die folgenden Bilder zeigen links $A(x)$ und rechts $B(y)$.



Eine einfache Diskussion zeigt, dass $A(x)$ ein globales Maximum in

$$(x, A(x)) = \left(\frac{b}{d}, b \ln\left(\frac{b}{d}\right) - b\right)$$

und $B(y)$ ein globales Maximum in

$$(y, B(y)) = \left(\frac{a}{c}, a \ln\left(\frac{a}{c}\right) - a\right)$$

hat. Insbesondere gilt

$$F(x, y) = A(x) + B(y) \leq b \ln\left(\frac{b}{d}\right) - b + a \ln\left(\frac{a}{c}\right) - a.$$

Außerdem ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow 0} B(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} B(y) = -\infty.$$

- Sei $(x(t), y(t))$ eine Lösungskurve mit $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Dann gilt

$$A(x(t)) = F(x(t), y(t)) - B(y(t)) = F(x_0, y_0) - B(y(t)) \geq F(x_0, y_0) - \left(a \ln\left(\frac{a}{c}\right) - a\right).$$

Daher ist $x(t)$ beschränkt. Zu jedem $x(t)$ sind wegen

$$B(y(t)) = F(x_0, y_0) - A(x(t))$$

und der Gestalt der Kurve $B(y)$ auch nur zwei Werte für $y(t)$ möglich. Dies erklärt die Form unserer (bereits gezeichneten) Lösungskurven.

Beispiel: Wir betrachten das ebene autonome System

$$\begin{aligned} x' &= y(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

- Die Ruhelagen erhält man als Lösungen des Gleichungssystems

$$y(1 - x^2 - y^2) = x(1 - x^2 - y^2) = 0.$$

Offensichtlich sind die Ruhelagen der Nullpunkt $(0, 0)$ die alle Punkte des Einheitskreises $x^2 + y^2 = 1$, also

$$(0, 0) \quad \text{und} \quad (x, y) \text{ mit } x^2 + y^2 = 1.$$

- Wir wollen versuchen, ein erstes Integral zu bestimmen. Wir bilden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{x(1 - x^2 - y^2)}{y(1 - x^2 - y^2)} = \frac{x}{y},$$

was wir auch zu

$$x - y \cdot \frac{dy}{dx}$$

umformen können. Wegen

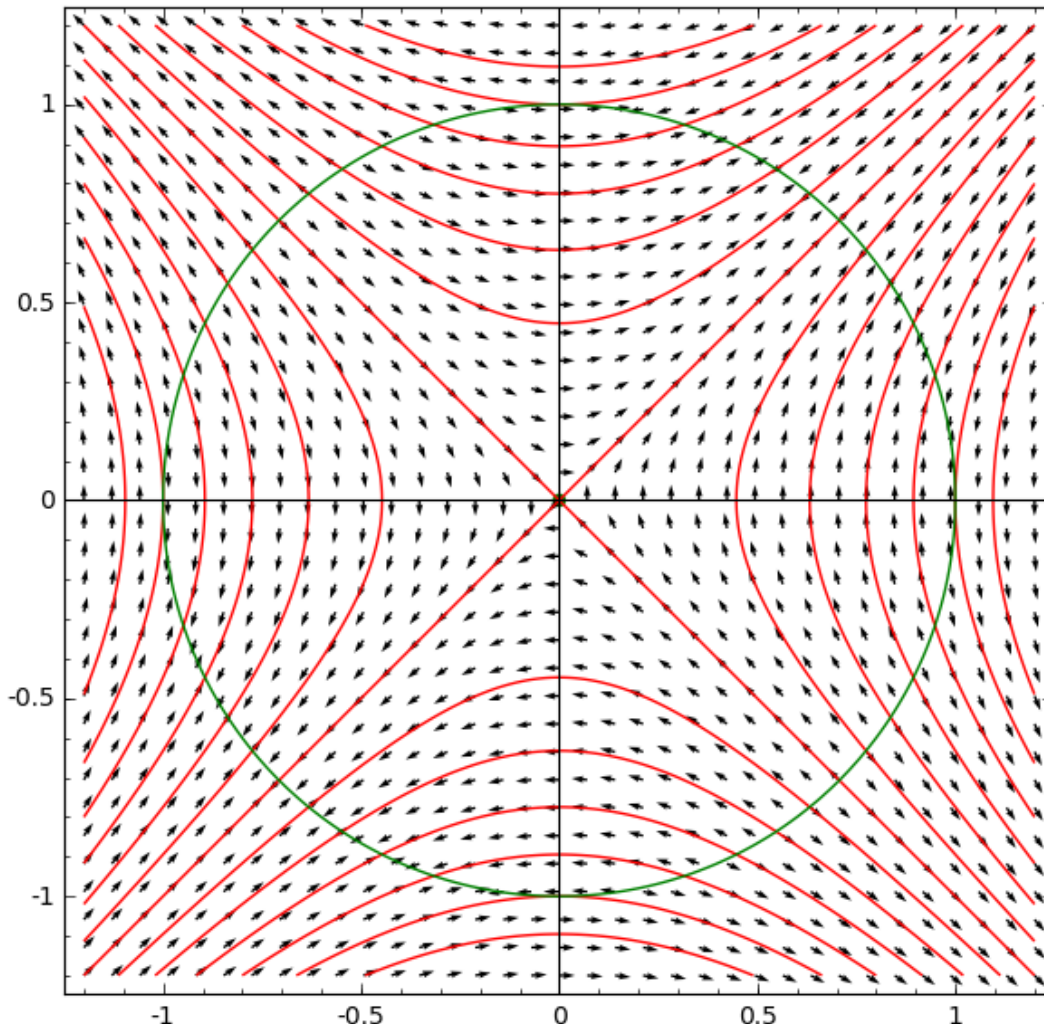
$$\frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x}(-y)$$

ist die Differentialgleichung exakt und wir können einfach eine Stammfunktion bestimmen:

$$F(x, y) = \int_0^x t dt + \int_0^y (-t) dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

Man überprüft auch einfach, dass $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ tatsächlich ein erstes Integral ist.

Das folgende Bild zeigt das Richtungsfeld, die Ruhelagen (grün) und einige Niveaulinien $F(x, y) = c$:



6. Anhang: Ein numerisches Lösungsverfahren

Wenn man ein Differentialgleichungssystem nicht explizit lösen kann, ist es oft sinnvoll, sich Näherungslösungen mit numerischen Verfahren zu bestimmen. Stellt man keine zu hohen Ansprüche gibt es dafür ganz einfache Möglichkeiten. Wir stellen das **Euler-Verfahren** vor:

- Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{aligned}$$

durch die Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ und die Werte x_0, y_0 . Gegeben sei weiter eine reelle Zahl t_{\max} . (Wir wollen eine Näherungslösung für $0 \leq t \leq t_{\max}$ finden.)

- Wir wählen eine natürliche Zahl N und definieren

$$h = \frac{t_{\max}}{N} \quad \text{und} \quad t_j = j \cdot h \quad \text{für} \quad j = 0, \dots, N,$$

sodass insbesondere $t_N = t_{\max}$ gilt.

- *Zwischenüberlegung:* Ist $x(t), y(t)$ des Anfangswertproblems, so gilt

$$\frac{x(t_{j+1}) - x(t_j)}{h} = \frac{x(t_j + h) - x(t_j)}{h} \approx x'(t_j) = f(x(t_j), y(t_j)),$$

und damit

$$x(t_{j+1}) \approx x(t_j) + h \cdot f(x(t_j), y(t_j)),$$

und analog natürlich

$$y(t_{j+1}) \approx y(t_j) + h \cdot g(x(t_j), y(t_j)).$$

Daher liegen die folgenden Formeln nahe:

- Wir berechnen rekursiv Zahlen x_j, y_j beginnend mit den gegebenen Werten x_0, y_0 für $j = 0, \dots, N - 1$ durch die Formeln

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + h \cdot f(x_j, y_j), \\ y_{j+1} &= y_j + h \cdot g(x_j, y_j). \end{aligned}$$

- Die Hoffnung ist nun, dass

$$x(t_j) \approx x_j \quad \text{und} \quad y(t_j) \approx y_j \quad \text{für } j = 0, \dots, N$$

gilt.

Wir haben zu dem Verfahren eine Python3-Funktion geschrieben, die dann die Listen $[t_0, t_1, \dots, t_N], [x_0, x_1, \dots, x_n], [y_0, y_1, \dots, y_n]$ ausgibt:

```
def euler(f,g,x_0,y_0,t_max,N):
    h=t_max/N
    t=(N+1)*[0]
    x=(N+1)*[0]
    y=(N+1)*[0]
    t[0]=0
    x[0]=x_0
    y[0]=y_0
    for j in range(N):
        t[j+1]=(j+1)*h
        x[j+1]=x[j]+h*f(x[j],y[j])
        y[j+1]=y[j]+h*g(x[j],y[j])
    return t,x,y
```

Mit `matplotlib.pyplot` werden daraus ganz einfach Bilder: Man beginnt mit

```
import matplotlib.pyplot
t,x,y=euler(f,g,x_0,y_0,t_max,N)
```

Will man ein Bild in der xy -Ebene, also eine Trajektorie, gibt man ein:

```
matplotlib.pyplot.plot(x,y)
matplotlib.pyplot.show()
```

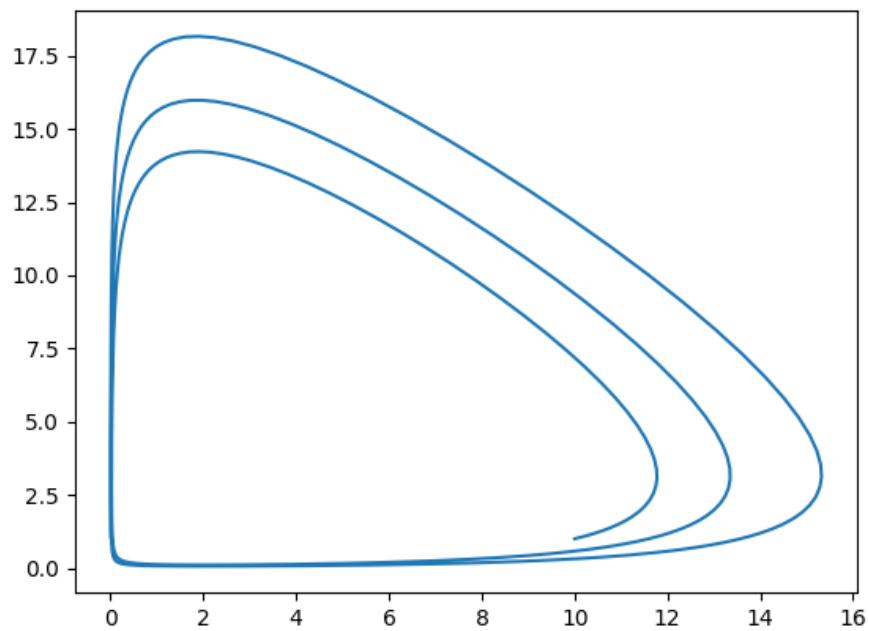
Will man $x(t)$ und $y(t)$ als Funktionen von t sehen, gibt man ein:

```
matplotlib.pyplot.plot(t,x,t,y)
matplotlib.pyplot.show()
```

Beispiel: Wir betrachten unser Beute-Räuber-Modell mit $a = 3$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 1$, also

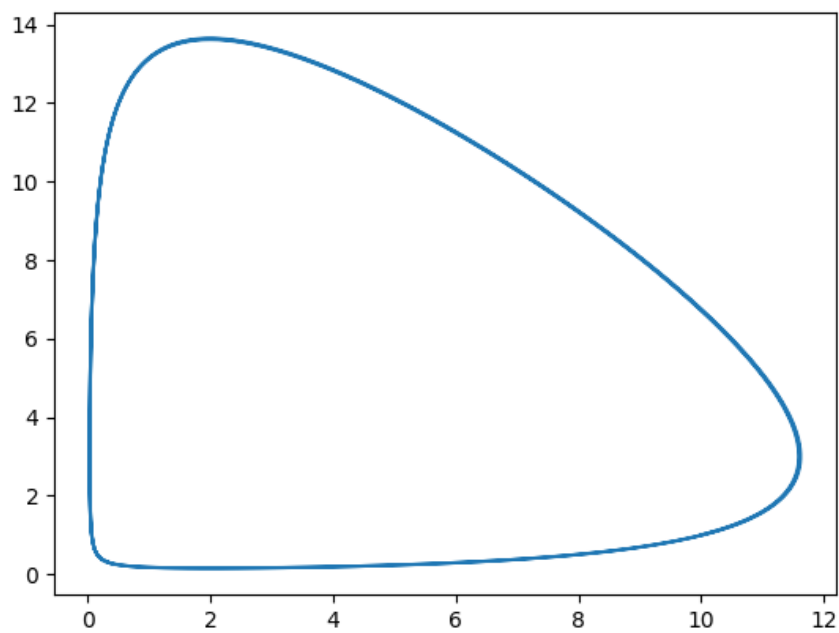
$$\begin{aligned} x' &= (3 - y)x & \text{und} & \quad x(0) = 10, \quad y(0) = 1. \\ y' &= (-2 + x)y \end{aligned}$$

- Bei der Wahl von $N = 1000$ und $t_{\max} = 10$ ergibt sich folgendes Bild in der xy -Ebene:



Da wir erwarten, dass die Trajektorien geschlossen sind, kann dieses Bild noch nicht sehr nahe an der Wirklichkeit sein.

- Für $N = 100000$ erhalten wir folgendes Bild:



Nun lassen wir die zugehörigen Funktion $x(t)$ und $y(t)$ für $0 \leq t \leq 10$ zeichnen:

