Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Fragen zur Prüfungsvorbereitung

(1) Grundlagen
  (a) Erklärung der Begriffe „Teilbarkeit“, „Primzahl“, „kongruent“.
  (b) Was besagt der Fundamentalsatz der Arithmetik? Beispiel $n = 185$.
  (c) Was ist die p-adische Bewertung $v_p(n)$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$? Was ist $v_2(84)$?
  (d) Formel für $v_p(n!)$? Was ist $v_5(1000!)$?
  (e) Wie sehen die Teiler einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ aus, wenn man die Primfaktorzerlegung von n kennt?
  (f) Wie kann man die Anzahl der Teiler $\tau(n)$ einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ berechnen, wenn man die Faktorisierung von n kennt?
  (g) Wie ist $\mathrm{ggT}(a, b)$ definiert? Wie kann man $\mathrm{ggT}(a, b)$ ausrechnen, wenn man die Primfaktorzerlegung von a und b kennt? Wie, wenn man die Primfaktorzerlegung nicht kennt?
  (h) Was bedeutet $f(x) = O(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$ und $f(x) \sim g(x)$ für Funktionen $f(x)$ und $g(x)$? Beispiele.

(2) Ganzwertige Polynome
  (a) Wie lassen sich Polynome $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit $f(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ - ganzwertige Polynome - beschreiben?
  (b) Wie kann man zu vorgegebenen Zahlen $a_0, \dots, a_n$ ein Polynom f vom Grad $\leq n$ bestimmen mit $f(0) = a_0, \dots, f(n) = a_n$?
  (c) Wie kann man für ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ die Zahl $\mathrm{ggT}(\{f(k) : k \in \mathbb{Z}\})$ berechnen?

(3) Wie findet man Primzahlen?
  (a) Wie erhält man weitere Primzahlen, wenn man $p_1, \dots, p_r$ bereits kennt?
  (b) Was ist eine Mersennesche Zahl, was eine Mersennesche Primzahl? Beispiele?
  (c) Wann nennt man ein k-Tupel $(a_1, \dots, a_k)$ zulässig? Welche Rolle spielt dies, wenn man nach Primzahl-k-Tupeln der Gestalt $(n + a_1, \dots, n + a_k)$ sucht? (Gibt es unendlich viele Primzahldrillinge der Form $p, p + 2, p + 4$?)
  (d) Was besagt die Primzahl-k-Tupel-Vermutung? (Anwendung auf Primzahlzwillinge und Primzahldrillinge)
  (e) Was besagt Schinzels Hypothese H? Nenne eine Anwendung.

(4) Der Primzahlsatz
  (a) Wie ist $\pi(x)$ definiert? Was ist $\pi(11.7)$?
  (b) Was besagt der Primzahlsatz?
  (c) Wie ist $\mathrm{li}(x)$ definiert? Wie lässt sich damit der Primzahlsatz formulieren?
  (d) Welche Aussage für die n-te Primzahl p_n ist äquivalent zum Primzahlsatz?
  (e) Wie sind $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ definiert? Was ist $\vartheta(11.7)$, was $\psi(11.7)$?
  (f) Einfache, vergleichende Ungleichungen zwischen $\pi(x)$, $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$?
  (g) Welche Aussagen über $\vartheta(x)$ und $\psi(x)$ sind äquivalent zum Primzahlsatz?
  (h) Nenne einfache Abschätzungen für $\pi(x)$, $\vartheta(x)$, $\psi(x)$, die man elementar herleiten kann (Tchebychev/Chebyshev).
  (i) Was ist das Bertrandsche Postulat?

(5) Summenfunktionen
  (a) Wie lautet die Formel für die partielle Summation? Beispiel.
  (b) Wie wächst $\sum_{n \leq x} \frac{1}{n}$? Was ist die Eulersche Konstante γ?
  (c) Was ist die Mangoldt-Funktion $\Lambda(n)$?
  (d) Wie wächst $\sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{n}$?
  (e) Wie wächst $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$?

(6) Die Möbiusfunktion $\mu(n)$
  (a) Definition von $\mu(n)$.
  (b) Was ist $\sum_{d|n} \mu(d)$?
  (c) Wie erhält man $a(n)$ aus $b(n) = \sum_{d|n} a(d)$? (Möbiussche Umkehrformeln)
  (d) Zeige an einem Beispiel, wie die Möbiusschen Umkehrformeln funktionieren.

Datei: anazt_prf.tex. Version vom 18.7.2024

(7) Dirichlet-Reihen
   (a) Absolutbetrag, Real- und Imaginärteil von $\frac{1}{n^s}$ (für $s = \sigma + it$).
   (b) Was ist eine Dirichlet-Reihe?
   (c) Konvergenzverhalten einer Dirichlet-Reihe? Was ist die Konvergenzabszisse, was die absolute Konvergenzabszisse? (Erläuterung an den Beispielen $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ und $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.)
   (d) Was kann man über die Konvergenz von $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ sagen, wenn $a_n = O(n^\alpha)$ gilt, oder wenn für $s = s_0$ die Partialsummen beschränkt sind?
   (e) Was ist $\lim_{\mathrm{Re}\,(s)\to\infty} \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$?
   (f) Kann eine Dirichlet-Reihe unendlich viele Nullstellen besitzen? Was kann man über die Lage der Nullstellen sagen?
   (g) Bestimme die Nullstellen der Dirichlet-Reihe $1 + \frac{1}{3^s}$.
   (h) Wie differenziert man Dirichlet-Reihen?
   (i) Wie multipliziert man Dirichlet-Reihen?
   (j) Durch welche Dirichlet-Reihe wird die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ definiert?
   (k) Wie lässt sich die Riemannsche Zeta-Funktion meromorph auf $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ fortsetzen?
   (l) Welche Dirichlet-Reihen werden durch $\frac{1}{\zeta(s)}$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ beschrieben?
   (m) Was kann man über $F(s) = \int_1^\infty \frac{f(x)}{x^{s+1}}dx$ sagen, wenn $f(x) = O(x^\alpha)$ gilt?
   (n) Wie kann man eine Dirichlet-Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ als Integral $s\int_1^\infty \frac{A(x)}{x^{s+1}}dx$ darstellen?
   (o) Wie sehen die Integraldarstellungen der Funktionen $\zeta(s)$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ aus?
   (p) Was weiß man über Nullstellen und Polstellen von $\zeta(s)$ und $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1}$ für $\mathrm{Re}\,(s) > 0$?
   (q) Was besagt der Korevaar-Newman-Taubersatz?
   (r) Wie kann die Formel $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{s}{s-1} = s\int_1^\infty (\frac{\psi(x)}{x} - 1)\frac{dx}{x^s}$ zum Beweis des Primzahlsatzes verwendet werden?
   (s) Wann gibt es die Euler-Produktdarstellung einer Dirichlet-Reihe? Wie sieht sie für die Riemannsche Zeta-Funktion aus?

(8) Dirichlet-Charaktere und Dirichletsche L-Reihen
   (a) Wie ist $\pi(x, a, N)$ für $N \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ definiert?
   (b) Wie unterscheidet sich $\pi(x, a, N)$ in den Fällen $\mathrm{ggT}(a, N) > 1$ und $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$?
   (c) Wie lautet der Dirichletsche Primzahlsatz?
   (d) Was ist ein Charakter einer endlichen abelschen Gruppe?
   (e) Was ist ein Dirichlet-Charakter modulo N? Wieviele gibt es? Was ist der Hauptcharakter?
   (f) Beschreibe für ein $N \in \{3, 4, 5\}$ alle Dirichlet-Charaktere modulo N.
   (g) Wie lauten die Orthogonalitätsrelationen für Dirichlet-Charaktere?
   (h) Was ist eine Dirichletsche L-Reihe? Konvergenzabszisse? Absolute Konvergenzabszisse?