

Fledermäuse in Flaschen — Über die Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$; Teil I

Edgar M. E. Wermuth
Zentralinstitut für Angewandte Mathematik
Forschungszentrum Jülich GmbH, D-52425 Jülich

Zusammenfassung

Bekanntlich sind schon die einfachsten Beispiele für diskrete nichtlineare dynamische Systeme, etwa die logistische Abbildung oder die Hénon-Abbildung, nicht leicht zu analysieren.

Thema des vorliegenden Artikels sind einige Eigenschaften der einfachsten *dreigliedrigen* nichtlinearen Rekursion und ihre Begründung mit möglichst einfachen Argumentationsmitteln. Es soll also ein Beitrag geleistet werden zum elementaren Bestiarium der nichtlinearen Dynamik. In einem zweiten Artikel [4] werden diese Überlegungen weitergeführt und verallgemeinert und auch Bezüge zu einschlägigen allgemeinen Aussagen der Theorie dynamischer Systeme aufgezeigt.

1 Einführende Betrachtungen

Wie lautet die einfachste dreigliedrige nichtlineare Rekursion?

Als Kandidaten sind $x_{n+2} = \pm x_{n+1} \cdot x_n$, $x_{n+2} = \pm (x_{n+1} \pm x_n)$, $x_{n+2} = \pm (x_{n+1} \pm x_n^2)$ plausibel. Von diesen ist im wesentlichen nur $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$ nichttrivial,¹ und bei dieser Rekursion bereitet es schon Schwierigkeiten, im Falle der Startwerte $x_0 = 1, x_1 = \alpha \in \mathbf{R}$ Parameterwerte α zu finden, für die Konvergenz stattfindet.² Ein spezieller Wert α , für den Konvergenz vorliegt, wird charakterisiert durch

Satz 1:

Sei

$$p_0(x) := 1, p_1(x) := x, p_{n+2}(x) := p_{n+1}^2(x) - p_n(x) \quad (n \in \mathbf{N}_0, x \in \mathbf{R}).$$

Dann besitzen die Polynome p_n für $n \in \mathbf{N}$ eine größte reelle Nullstelle ξ_n , und für diese Nullstellen gilt:

$$\text{i) } \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 1,$$

¹ $x_{n+2} = -x_{n+1}^2 - x_n$ wird durch $y_n = -x_n$ auf diese Rekursion zurückgeführt, und bei den anderen hat man einfache Monotonieverhältnisse oder kann auf die Fibonacci-Rekursion zurückgreifen.

²Vgl. [3], p. 78 und p. 365.

$$\xi_n < \xi_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

$$\xi_n < 2 \quad (n \in \mathbf{N}).$$

ii) Mit

$$\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n < 2$$

strebt die Folge $(p_n(\xi))_{n \in \mathbf{N}}$ streng monoton gegen 2.

iii) Für $\alpha > \xi$ strebt die Folge $(p_n(\alpha))_{n \in \mathbf{N}}$ streng monoton gegen unendlich; für $\alpha = \xi_k$ mit einem $k \in \mathbf{N}$ strebt die Folge $(p_n(\alpha))_{n \in \mathbf{N}}$ gegen unendlich.

Bemerkung: Es gilt $\xi = 1.708875563275425\dots$

Beweis:

Wir zeigen zunächst:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Aus } |p_n(x)| \geq 2 > |p_{n-1}(x)| \text{ folgt} \\ 2 < p_{n+k}(x) < p_{n+k+1}(x) \quad (k \in \mathbf{N}) \text{ und} \\ p_n(x) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{array} \right\} \quad (1)$$

Aus

$$|p_{n-1}(x)| < 2 \leq |p_n(x)|$$

folgt

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= p_n^2(x) - p_{n-1}(x) \\ &> |p_n(x)| \cdot (|p_n(x)| - 1) \\ &\geq |p_n(x)| \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

und induktiv allgemeiner für $k \in \mathbf{N}$

$$p_{n+k+1}(x) > p_{n+k}(x) \geq p_{n+1}(x) \cdot \underbrace{(p_{n+1}(x) - 1)^{k-1}}_{> 1},$$

womit sich auch

$$p_{n+k}(x) \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty)$$

ergibt.

Wegen $p_1(x) \geq 2$ für $x \geq 2$ folgt mit (1) insbesondere

$$p_n(x) \geq 2 \quad (x \geq 2, n \in \mathbf{N}). \quad (2)$$

Num zum Beweis von (i):

$\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ ist klar, und per Induktion können wir die Existenz von ξ_n für alle $n \in \mathbf{N}$ sowie

$$\xi_n < \xi_{n+1} < 2 \quad (n \in \mathbf{N}) \quad (3)$$

erschließen: Aus $\xi_{n-1} < \xi_n (< 2)$ folgt $p_{n-1}(\xi_n) > 0$ (wegen $p_{n-1}(2) > 0$) und somit

$$p_{n+1}(\xi_n) = \underbrace{p_n^2(\xi_n)}_{=0} - \underbrace{p_{n-1}(\xi_n)}_{>0} < 0;$$

wegen (2) folgt die Existenz von ξ_{n+1} und insbesondere

$$\xi_n < \xi_{n+1} < 2.$$

Nun zu (ii):

Wir bezeichnen für $n \in \mathbf{N}$ mit $K_n = (\alpha_n, \beta_n)$ diejenige Zusammenhangskomponente der offenen Menge

$$\{x \in \mathbf{R} \mid |p_n(x)| < 2\},$$

in der ξ_n liegt.

Dann gilt offenbar $(\alpha_1, \beta_1) = (-2, 2)$, $(\alpha_2, \beta_2) = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, und mit (1) folgt per Induktion

$$\beta_{n+1} < \beta_n, \quad p_{m+1}(\beta_n) > p_m(\beta_n) \geq 2 \quad (m \geq n, n \in \mathbf{N}); \quad (4)$$

$$\alpha_n < \alpha_{n+1}, \quad p_{m+1}(\alpha_n) > p_m(\alpha_n) \geq 2 \quad (m \geq n, n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}). \quad (5)$$

Insbesondere gilt

$$p_n(\beta_n) = 2 \quad (n \in \mathbf{N}), \quad p_n(\alpha_n) = 2 \quad (n \in \mathbf{N} \setminus \{1\}).$$

Klar ist auch (wegen $\xi_m \in K_n$ für $m \geq n$)

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \in \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_n. \quad (6)$$

Wir werden genauer zeigen, daß sogar $\{\xi\} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_n$, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \xi. \quad (7)$$

Wegen $\xi > \xi_n$ und $\xi \in (\alpha_n, \beta_n)$ gilt

$$0 < p_n(\xi) < 2 \quad (n \in \mathbf{N}). \quad (8)$$

Angenommen nun, die Folge $(p_n(\xi))_{n \in \mathbf{N}_0}$ wäre nicht streng monoton wachsend. Dann gäbe es ein kleinstes $n_0 \in \mathbf{N}$; $n_0 > 1$, so daß $p_{n_0+1}(\xi) \leq p_{n_0}(\xi)$. Mit (8) folgte

$$\begin{aligned} p_{n_0+2}(\xi) &= p_{n_0+1}^2(\xi) - p_{n_0}(\xi) \\ &\leq p_{n_0+1}^2(\xi) - p_{n_0+1}(\xi) \\ &< p_{n_0+1}(\xi), \end{aligned}$$

und per Induktion ergäbe sich, daß $(p_{n_0+k}(\xi))_{k \in \mathbf{N}}$ eine streng monoton fallende, nach (8) beschränkte und somit konvergente Folge wäre. Wegen der Rekursionsrelation

$$p_{n+2} = p_{n+1}^2 - p_n$$

kommen als mögliche Limites nur 0 und 2 in Frage. Aus der (bei Konvergenz gegen 0 eintretenden) Ungleichung

$$0 < p_{n_0+k+1}(\xi) < p_{n_0+k}(\xi) < 1$$

folgte aber mit der Rekursionsgleichung

$$p_{n_0+k+2}(\xi) < 0,$$

im Widerspruch zu (8)! Also ist gezeigt:

$$p_n(\xi) \nearrow 2 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Damit ist (ii) bewiesen.

Nun zum Beweis von (iii) und (7):

Sei $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$. Nach (6) ist $\beta \geq \xi$. Für $\eta \in [\xi, \beta]$ folgt analog zu (8):

$$0 < p_n(\eta) < 2 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

und der Beweis von (9) läßt sich auf alle diese η anstelle von ξ übertragen. Insbesondere erhält man

$$p_n(\eta) \geq p_1(\eta) = \eta \geq \xi > \xi_\beta > 1$$

und daher wegen

$$p'_0 \equiv 0, \quad p'_1 \equiv 1, \quad p'_{n+2}(x) = 2p_{n+1}(x) \cdot p'_{n+1}(x) - p'_n(x)$$

per Induktion $p'_n(\eta) \leq p'_{n+1}(\eta)$ ($n \in \mathbf{N}_0$) sowie

$$p'_n(\eta) \geq (2\eta - 1)^{n-1} \quad (n \in \mathbf{N}, \xi \leq \eta \leq \beta), \quad (10)$$

was wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung im Falle $\beta > \xi$ im Widerspruch stünde zu

$$\frac{p_n(\beta) - p_n(\xi)}{\beta - \xi} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Also folgt $\beta = \xi$.

Wir zeigen nun, daß $p_n(\xi_k) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. (Daraus folgt unmittelbar auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \xi$.) Es ist klar, daß $p_n(\xi_k) > 0$ für $n < k$. Also folgt aufgrund

der Rekursionsrelation $p_{n+2} = p_{n+1}^2 - p_n$ und wegen $p_0 = 1$, daß $p_n(\xi_k) > 1$ für $1 < n < k$. Folglich ergibt sich für $k > 2$ (die Fälle $k = 1, 2$ sind leicht direkt zu diskutieren)

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\xi_k) &= -p_{k-1}(\xi_k) < -1, \\ p_{k+2}(\xi_k) &> 1, \\ p_{k+3}(\xi_k) &> 2, \end{aligned}$$

und mit (1) folgt $p_n(\xi_k) \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Es ist nur noch zu zeigen, daß $p_n(\alpha)$ für $\alpha > \xi$ streng monoton gegen unendlich strebt. Klar ist $p_n(\alpha) > 0$ für alle n . Da $x^2 - x - 1$ monoton wächst für $x \geq 1/2$ und $\xi^2 - 1 > \xi$, gilt mit $\alpha > \xi$ auch $\alpha^2 - 1 > \alpha$ und daher

$$p_2(\alpha) = \alpha^2 - 1 > \alpha = p_1(\alpha) > 1 = p_0(\alpha).$$

Angenommen, für ein erstes $n_0 \geq 2$ träte $p_{n_0+1}(\alpha) \leq p_{n_0}(\alpha)$ ein. Dann müßte wegen (1) noch $p_{n_0}(\alpha) < 2$ gelten. Wie beim Monotoniebeweis für $(p_n(\xi))$ ergäbe sich ein Widerspruch. Also ist $(p_n(\alpha))$ monoton wachsend, und weiter oben wurde schon gezeigt ((10) und Mittelwertsatz!), daß für $\alpha > \xi$ nicht $p_n(\alpha) \nearrow 2$ eintreten kann. ■

Ein paar Plots der ersten Polynome p_n :

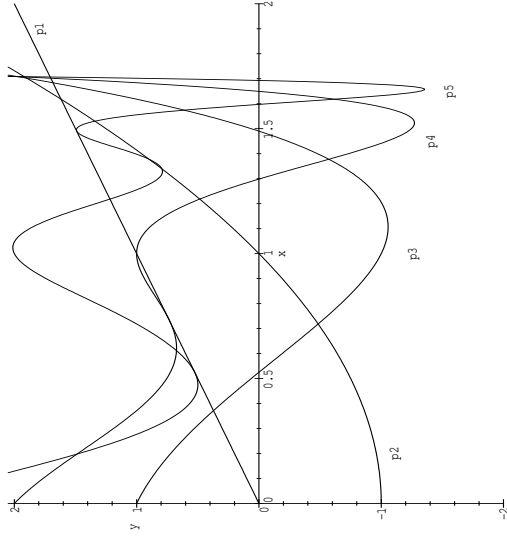


Bild 1: Die Polynome p_1, p_2, p_3, p_4, p_5

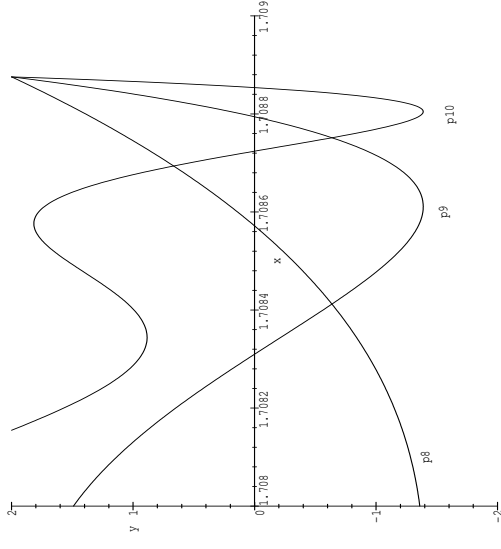


Bild 2: Die Polynome p_8, p_9, p_{10}

Hier zeigt sich das typische, durch die Rekursionsbeziehung zwischen den Polynomen bedingte Ähnlichkeitsphänomen.

Durch Überlegungen, die weiter unten dargestellt werden, wird sich zeigen, daß es viele weitere (auch komplexe!) Startwerte gibt, für welche die Folge beschränkt bleibt; es muß dabei aber natürlich nicht Konvergenz vorliegen.

Ein einfaches Beispiel ³:

Für $\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ lautet die Folge

$$1, \alpha, \alpha, 1, 1 - \alpha, 1 - \alpha, 1, \alpha, \dots$$

Wir beziehen nun auch komplexe Startwerte α ein, betrachten also die Folge (z_n) mit

$$z_0 = 1, z_1 = z \in \mathbf{C}, z_{n+2} = z_{n+1}^2 - z_n. \quad (11)$$

Einfachheitshalber benutzen wir im folgenden die Schreibweise $|z_n| = 2$ anstelle von $|p_n(z)| = 2$, etc.

³Dieses Beispiel verdanke ich Andreas Bernig und Roland Hildebrand, Leipzig

Satz 2:

- a) Aus $|z_n| < 2 \leq |z_{n+1}|$ für ein $n \in \mathbf{N}_0$ folgt:
 $(|z_{n+k}|)_{k \in \mathbf{N}_0}$ strebt streng monoton wachsend gegen ∞ .
 - b) $|z_n| = 2$ impliziert:
 $|z_k| < 2$ für $k < n$,
 $|z_k| > 2$ für $k > n$.
- Insbesondere besitzen die Kurven $|z_n| = 2$, also die Kurven $|z| = 2$, $|z^2 - 1| = 2$, $|(z^2 - 1)^2 - z| = 2$, usw. keine gemeinsamen Punkte.

- c) Für die Gebiete
- $$G_n := \{z \in \mathbf{C} \mid |z_n| < 2\} \tag{12}$$

gilt:

- i) $G_n \supset \overline{G_{n+1}}$ ($n \in \mathbf{N}_0$).
- ii) Das Zwischengebiet zwischen den Kurven $|z_n| = 2$ und $|z_{n+1}| = 2$ ist gegeben durch

$$G_n \setminus \overline{G_{n+1}} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z_n| < 2 < |z_{n+1}|\},$$

und für $z \in G_n \setminus \overline{G_{n+1}}$ gilt $|z_k| > 2$ für alle $k > n$.

Beweis:

- a) und b) ergeben sich in gleicher Weise wie (1) im Beweis von Satz 1.
- Zu c) (i):
 $|z_{n+1}| = 2 \subset G_n$ nach b). Für $z \in G_{n+1} \setminus G_n$ müßte $|z_{n+1}| < 2$ und $|z_n| \geq 2$ gelten. Nach b) ist $|z_n| = 2$ ausgeschlossen, also hätte man $|z_{n+1}| < 2$, $|z_n| > 2$. Auf der Verbindungsstrecke von z mit einem Punkt von $|z_{n+1}| = 2$ müßte irgendwo zugleich $|z_n| = 2$ und $|z_{n+1}| < 2$ gelten, Widerspruch zu b)!
- Zu c) (ii):
 $G_n \setminus \overline{G_{n+1}} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z_n| < 2 < |z_{n+1}|\}$ ist klar, und $|z_k| > 2$ für $k > n$ ergibt sich aus a).

Im Prinzip ergibt sich also für die Kurven $|z_n| = 2$ und ihre Zwischengebiete folgende Struktur: ■

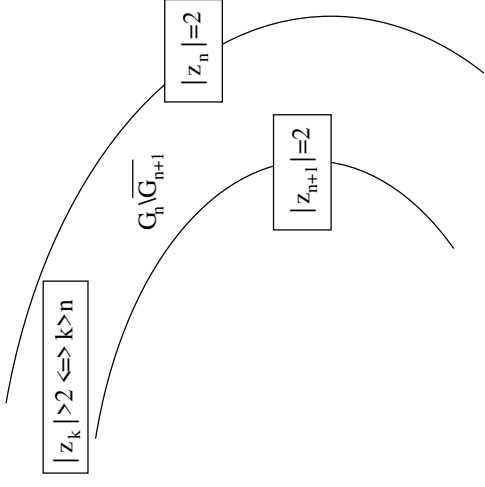


Bild 3: Die Zwischengebiete

Bemerkenswerterweise besitzen die Gebiete G_n für $n \geq 4$ mehrere Zusammenhangskomponenten. (Schon G_2 wird von einer Lemniskate begrenzt; $|z^2 - 1| = 2$ besitzt aber keinen singulären Punkt, so daß es eine einfach geschlossene Kurve ist.)
 Qualitativ ergibt sich folgendes Bild:

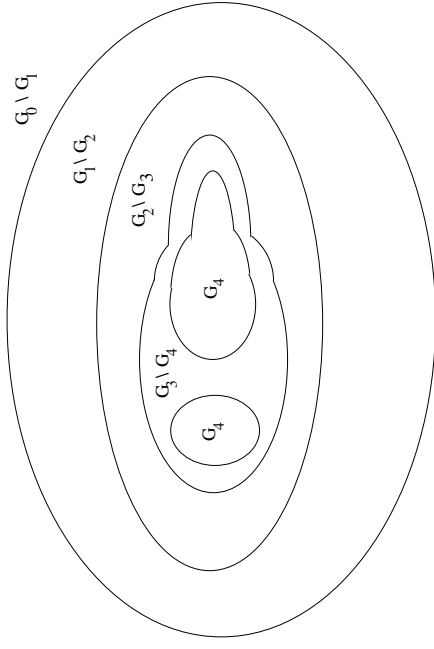


Bild 4: Ab G_4 mehrere Zusammenhangskomponenten

Satz 3:

- a) Jede Zusammenhangskomponente von G_n ist einfachzusammenhängend.
- b) Für jede Zusammenhangskomponente K von G_n gilt

$$G_{n+1} \cap K \neq \emptyset;$$

d.h.: Jede Zusammenhangskomponente von G_n enthält mindestens eine Zusammenhangskomponente von G_{n+1} .

- c) Jede Zusammenhangskomponente von G_n enthält Punkte z , für welche die Folge (z_n) beschränkt bleibt.

Beweis:

Zu a) und b):

Auf einer in G_n verlaufenden einfach geschlossenen Kurve nimmt $|z_n|$ nur Werte < 2 an, so daß nach dem Maximumprinzip auch das Innengebiet der Kurve ganz in G_n liegt. Eine Zusammenhangskomponente von G_n ist also ein von einer einfach geschlossenen Teilkurve von $|z_n| = 2$ berandetes einfachzusammenhängendes Gebiet. In diesem Gebiet kann das Polynom z_n (als Funktion von z) kein Betragminimum $\neq 0$ annehmen (Maximumprinzip!). Da aber auf dem Rand stets $|z_n| = 2$, im Inneren hingegen stets $|z_n| < 2$ gilt, muß ein Betragminimum im Inneren angenommen werden. Also gilt irgendwo $z_n = 0$. Da nun nach Satz 2 innerhalb von G_n überall $|z_{n-1}| < 2$ ist, folgt wegen $z_{n+1} = z_n^2 - z_{n-1}$ für die Nullstelle von z_n

$$|z_{n+1}| < 2.$$

Zu c):

Ist K_{n_0} eine Zusammenhangskomponente von G_{n_0} , so gibt es nach a) eine Folge $K_{n_0}, K_{n_0+1}, \dots$ von Zusammenhangskomponenten von $G_{n_0}, G_{n_0+1}, \dots$ mit $K_{n_0} \supset K_{n_0+1} \supset \dots$. Für $z \in \bigcap_{n \geq n_0} K_n$ gilt dann wegen Satz 2 c) (i) auch

$$z \in \bigcap_{n \geq n_0} K_n \subseteq \bigcap_{n \geq n_0} G_n,$$

und solche z erfüllen offenbar die Behauptung. ■

Computerexperimente, bei denen die Zwischengebiete abwechselnd schwarz und weiß gefärbt wurden, zeigen, daß die Anzahl der Komponenten von G_n für $n \rightarrow \infty$ gegen unendlich strebt, aber das Volumen von G_n mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null strebt.

Es folgen einige der erhaltenen Bilder.



Bild 5: Dieses Bild zeigt den Grundbereich $-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2$. Man erkennt, daß die Anzahl der Komponenten von G_n mit wachsendem n über alle Grenzen wächst, die Fläche von G_n dabei aber auf Null zusammenschrumpft.

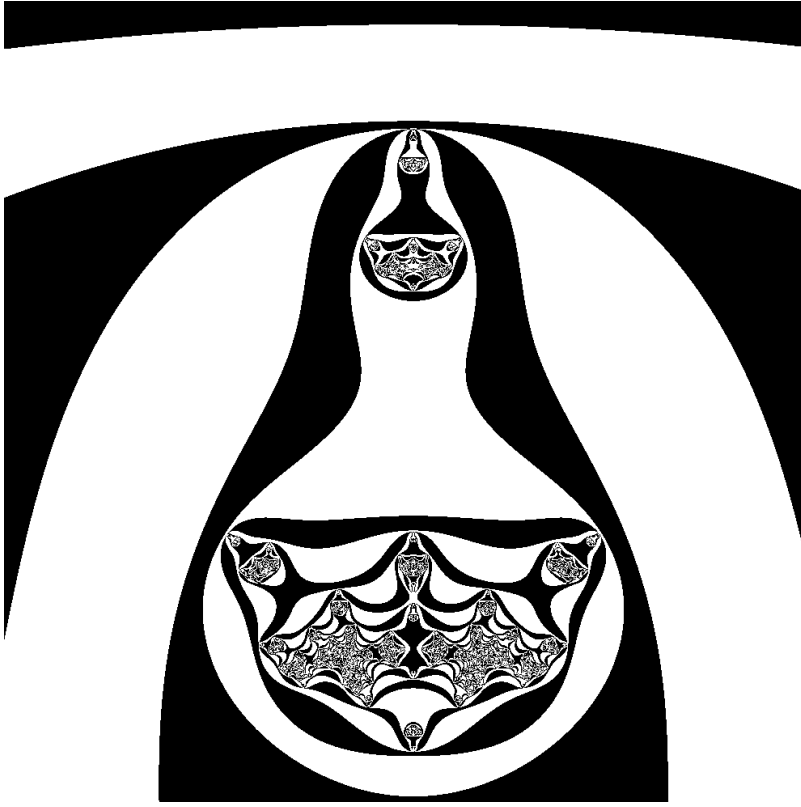


Bild 6: Dieses Bild zeigt den Bereich $1.5596 \leq x \leq 1.7374$, $-0.092929 \leq y \leq 0.09697$, der sich ergibt, wenn man die ganz kleine weiße „liegende Flasche“ rechts im Grundbild herausvergrößert. Man sieht, wie sich in faszinierender Weise die Strukturen näherungsweise wiederholen und die Flaschen (oder: russischen Puppen) so ineinandergeschachtelt sind, daß sich insgesamt gemäß Satz 3 auch schon auf der reellen Achse (die als Symmetrieachse erkennbar ist) überabzählbar viele Beschränktheitspunkte ergeben.

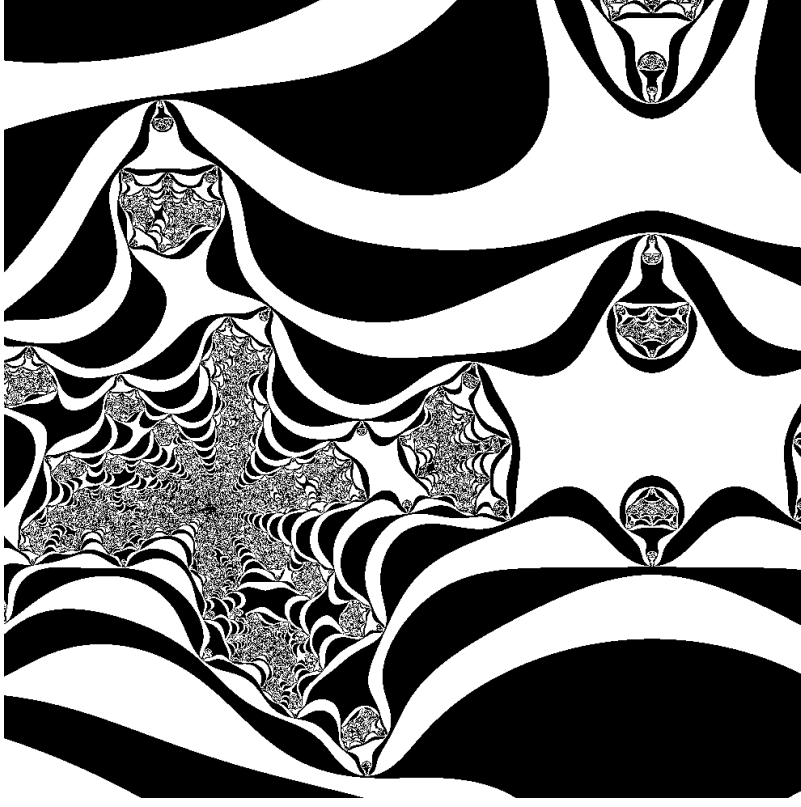


Bild 7: Dieses Bild zeigt den Bereich $1.67506 \leq x \leq 1.68242$, $-0.0014325 \leq y \leq 0.0060484$, der sich ergibt, wenn man einen Teil der „Fledermausstruktur“ im Bauch der schwarzen Flasche innerhalb der weißen Flasche des vorherigen Bildes herausvergrößert. Die reelle Achse wird durch die liegenden Flaschen im unteren Teil des Bildes markiert.

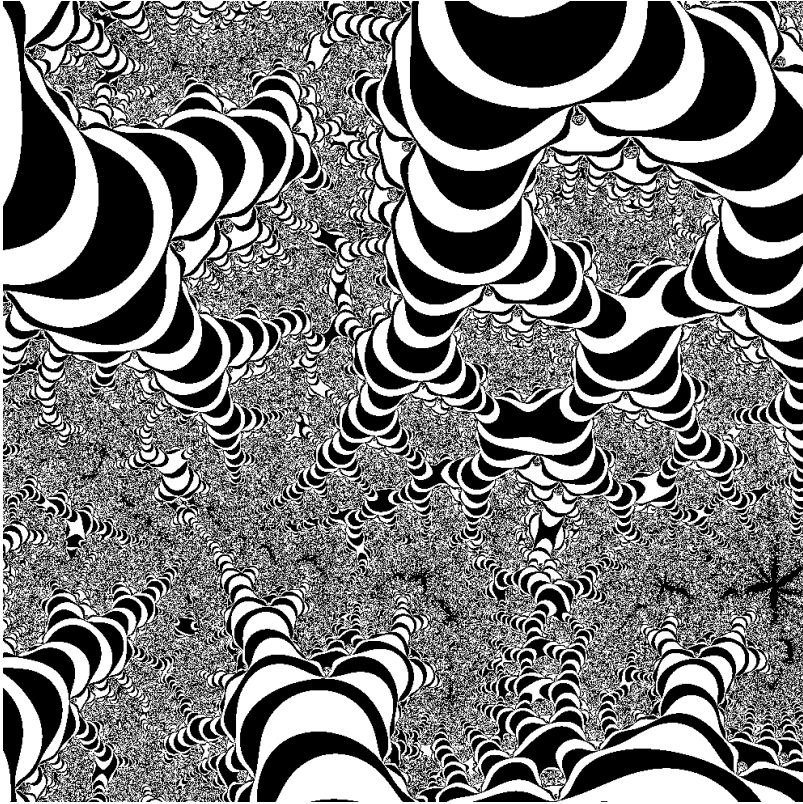


Bild 8: Dieses Bild zeigt den Bereich $1.6775382 \leq x \leq 1.6778431$, $0.0050887 \leq y \leq 0.0053985$, der nochmals ein Detail des vorigen Bildes herausvergrößert. Gewisse schwarze Strukturen, insbesondere am unteren Bildrand zu erkennen, sind durch die Einschränkung der Rechentiefe auf 256 Folgenglieder pro Bildpunkt (d.h.: Parameterwert z) bedingt und sind daher Zusammenhangskomponenten von G_{255} .

Die Bilder deuten darauf hin, daß es eine überabzählbare nirgends dichte Nullmenge von Werten $z \in \mathbb{C}$ gibt, für welche die Folge (11) beschränkt bleibt, darunter auch schon überabzählbar viele reelle. Konvergenz ist dabei natürlich nicht garantiert, wie schon das simple Beispiel $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ zeigte. Im Laufe der Untersuchung werden wir die Konvergenzfrage vollständig klären.

2 Der reelle Fall

Satz 1 (iii) zeigte, daß der Parameterwert $\xi = 1.7088\dots$, für welchen Konvergenz gegen 2 stattfindet, numerisch sehr „wackelig“ ist. Durch eine andere Betrachtungsweise wird sich nun unter anderem ein numerisch brauchbares Verfahren zur Berechnung von ξ ergeben.

Satz 4:

Die Rekursion

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= x \geq 0 \\ x_{n+2} &= x_{n+1}^2 - x_n \quad (n \in \mathbb{N}_0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

besitzt genau eine nichtverschwindende beschränkte Lösung in $[0, \infty)^{\mathbb{N}_0}$; diese konvergiert monoton gegen 2 und wird gliedweise approximiert durch die Iteration

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^{(0)} &= (x, \dots) \in [0, M]^{\mathbb{N}_0} \setminus \mathcal{E} \\ &\text{mit einem } M > 0, \\ \bar{x}^{(k+1)} &= \bar{f}(\bar{x}^{(k)}) \quad (k \in \mathbb{N}_0), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wobei

$$\mathcal{E} := \{\bar{x} \in \mathbf{R}^{\mathbb{N}_0} \mid x_j = 0 \text{ für } j \neq 1\}$$

und die Iterationsfunktion

$$\bar{f} = (f_0, f_1, f_2, \dots)$$

gegeben ist durch

$$\left. \begin{aligned} f_0(\bar{x}) &:= x_0, \\ f_j(\bar{x}) &:= \sqrt{f_{j-1}(\bar{x}) + x_{j+1}} \quad (j \in \mathbb{N}). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Die Folge $(\bar{x}^{(k)})$ konvergiert mindestens linear im Sinne der C ebyshev-Norm $\|\cdot\|_\infty$ f ur beschr ankte Folgen.

Bemerkung:

Es liegt nahe, in (14)

$$\bar{x}^{(0)} = (x, 2, 2, 2, \dots)$$

zu wählen. Die Konvergenz gegen die nichtverschwindende beschränkte Lösung findet aber immer statt, mit der einzigen Ausnahme, daß im Falle $x = 0$ nicht $\vec{x}^{(0)} = (0, x_1, 0, 0, \dots) \in \mathcal{E}$ gewählt werden darf, da $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ für $\vec{x} \in \mathcal{E}$.

Beweis:

Sei $\vec{x}^{(0)} = (x, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots) \in [0, M]^{\mathbf{N}_0} \setminus \mathcal{E}$ mit beliebigem $x \geq 0$ und mit $M \geq 2$ vorgegeben.

Wir betrachten die zugehörige Folge $(\vec{x}^{(k)})_{k \in \mathbf{N}_0}$ gemäß (14) und (15). Da

$$x_j^{(k+1)} = \sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k)}} \quad (j \in \mathbf{N}), \quad (16)$$

folgt per Induktion sofort (wegen $M \geq 2$)

$$\vec{x}^{(k)} \in [0, M]^{\mathbf{N}_0}$$

für alle $k \in \mathbf{N}$.

Da $x_j^{(0)} > 0$ für mindestens ein $j \neq 1$, folgt aus (16) zunächst

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} \geq 1 \quad (j \geq 1),$$

also auch $\liminf_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} \geq \sqrt{2}$ für $j \geq 2$, also $x_j^{(k)} \geq 1$ ($j \geq 1$) für fast alle k , und daher folgt schließlich die Existenz eines k_0 mit

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(k)} &\geq 1 \quad \text{für } k \geq k_0, \\ x_j^{(k)} &\geq \sqrt{2} \quad (j \geq 2) \quad \text{für } k \geq k_0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wir nehmen zunächst an, $\vec{x}^{(0)}$ habe die spezielle Gestalt

$$\vec{x}^{(0)} = (x, 2, 2, 2, \dots).$$

Dann folgt aus der Rekursionsbeziehung (16) per Induktion (über j und k), daß die Folgen $(x_j^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ für $j \geq 1$ im Falle $x < 2$ monoton fallend, im Falle $x > 2$ monoton steigend sind. Also konvergieren sämtliche Folgen gegen Grenzwerte x_j^* ($j \geq 1$), für die dann die Rekursionsbeziehung

$$x_0^* = x, \quad x_{j+2}^* = (x_{j+1}^*)^2 - x_j^* \quad (j \geq 0)$$

erfüllt ist.

Außerdem gilt nach (17)

$$x_1^* \geq 1, \quad x_j^* \geq \sqrt{2} \quad (j \geq 2), \quad (18)$$

und per Induktion ergibt sich aus (16) die Monotonie aller Folgen $(x_j^{(k)})_{j \in \mathbf{N}_0}$ und daher auch die Monotonie und Konvergenz gegen 2 der Grenzfolge $(x_j^*)_{j \in \mathbf{N}_0}$. Damit ist die Existenz einer monoton gegen 2 strebenden Lösung von (13) bewiesen.

Nun zur Eindeutigkeit:

Seien dazu \vec{x}^* , \vec{y}^* zwei nichtverschwindende beschränkte Lösungen von (13). Dann folgt für $j \geq 1$

$$\begin{aligned} |x_j^* - y_j^*| &= |\sqrt{x_{j-1}^* + x_{j+1}^*} - \sqrt{y_{j-1}^* + y_{j+1}^*}| \\ &\leq \frac{|x_{j-1}^* - y_{j-1}^*| + |x_{j+1}^* - y_{j+1}^*|}{\sqrt{x_{j-1}^* + x_{j+1}^*} + \sqrt{y_{j-1}^* + y_{j+1}^*}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sup_{k \in \mathbf{N}_0} |x_k^* - y_k^*|, \end{aligned}$$

da für beide Folgen (18) gilt, und somit $x_j^* = y_j^*$ für alle j .

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Iteration (14) stets gegen die Lösung konvergiert.

Sei $\vec{x}^{(0)} = (x, x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots) \in [0, M]^{\mathbf{N}_0} \setminus \mathcal{E}$. Dann gibt es nach (16) ein k_0 , so daß

$$x_1^{(k)} \geq 1, x_j^{(k)} \geq \sqrt{2} \quad (j \geq 2) \quad \text{für } k \geq k_0. \quad (19)$$

Es folgt für $j \geq 2$ und $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |x_j^{(k+1)} - x_j^*| &\leq \frac{|x_{j-1}^{(k+1)} - x_{j-1}^*| + |x_{j+1}^{(k+1)} - x_{j+1}^*|}{\sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k+1)}} + \sqrt{x_{j-1}^* + x_{j+1}^*}} \\ &\leq \frac{\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^*\|_\infty + \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \end{aligned}$$

wegen (17) und (18); ferner gilt

$$\begin{aligned} |x_1^{(k+1)} - x_1^*| &\leq \frac{|x_2^{(k)} - x_2^*|}{\sqrt{x + x_2^{(k)}} + \sqrt{x + x_2^*}} \\ &\leq \frac{\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty}{2\sqrt[3]{2}}. \end{aligned}$$

Mit

$$\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^*\|_\infty = L \cdot \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty$$

gilt also im Falle $k \geq k_0$

$$L \leq \max \left\{ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}, \frac{1+L}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \right\},$$

woraus

$$L \leq \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}-1} < \frac{1}{2}$$

folgt.

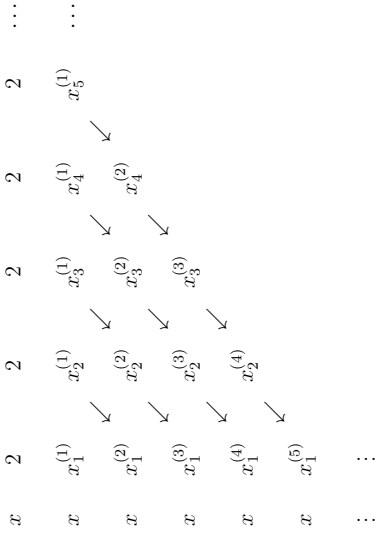
Also ergibt sich für $k \geq k_0$

$$\|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\|_\infty \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k-k_0} \|\bar{x}^{(k_0)} - \bar{x}^*\|_\infty, \quad (20)$$

was lineare Konvergenz bezüglich der Čebyšev-Norm $\|\cdot\|_\infty$ bedeutet. ■

Der Satz impliziert, daß es zu jedem $x \geq 0$ genau ein $f(x) > 0$ gibt, so daß die Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ im Falle $x_0 = x, x_1 = f(x)$ gegen 2 konvergiert, ohne den nichtnegativen Bereich zu verlassen.

Will man nur diese Funktion $f(x)$ durch Iteration gemäß (14) berechnen, empfiehlt es sich, mit $\bar{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$ die Iterierten $\bar{x}^{(k)}$ nach dem folgenden Schema mit (16) diagonalweise zu berechnen:



Nach (20) und (24) (siehe Satz 5a)) weiß man dann:

$$\left. \begin{array}{l}
 0 \leq x_1^{(k)} - f(x) \leq (2 - \sqrt[4]{2})/2^k \text{ für } 0 \leq x < 2, \\
 0 \leq f(x) - x_1^{(k)} \leq (\sqrt{2x} - 2)/2^k \text{ für } x > 2.
 \end{array} \right\} \quad (21)$$

(Die Existenz- und Eindeigkeitsaussage von Satz 4 und ein Rechenschema zur Bestimmung von $f(x)$ kann man in völlig analoger Weise auch auf der Basis der Iterationsvorschrift

$$x_j^{(k+1)} = \sqrt{x_{j-1}^{(k)} + x_{j+1}^{(k)}}$$

anstelle von (16) herleiten; man erhält aber eine schlechtere Kontraktionskonstante, und die Normkonvergenz ist nicht mehr für alle Startvektoren $\bar{x}^{(0)}$ gegeben.)

Wir stellen im folgenden einige auf der Hand liegende Eigenschaften der Funktion f zusammen.

Satz 5:

Die nach Satz 4 durch die Bedingung

$$\left. \begin{array}{l}
 x_0 = x, x_1 = y, x_{n+2} = x_{n+1} - x_n \quad (n \in \mathbf{N}_0) \\
 \Rightarrow (x_n)_{n \in \mathbf{N}_0} \in [0, M]^{\mathbf{N}_0} \setminus \{0\} \text{ für ein } M > 0
 \end{array} \right\} \quad (22)$$

eindeutig bestimmte Funktion

$$f : x \mapsto y \quad (x \geq 0)$$

hat folgende Eigenschaften:

- a) $f^2(x) - x = f(f(x)) \quad (x \geq 0);$ (23)
- $\sqrt[4]{2} \leq f(x) \leq 2 \quad (0 \leq x \leq 2),$ (24)
- $2 \leq f(x) \leq \sqrt{2x} \quad (x > 2).$ (24)

- b) f ist stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und strikt konkav.
- c) Definiert man für $x_0 \geq 0$

$p_0(x) := x_0, p_1(x) := x, p_{n+2}(x) := p_{n+1}(x) - p_n(x) \quad (x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}_0),$
so besitzt jedes Polynom $p_n(x) \quad (n \in \mathbf{N})$ eine größte reelle Nullstelle ξ_n ; für diese Nullstellen gilt:

$$\begin{aligned}
 &\xi_n < \xi_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}) \\
 &\text{mit der Ausnahme } \xi_1 = \xi_2 \text{ im Falle } x_0 = 0, \\
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = f(x_0), \\
 &\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(\xi_k) = \infty \quad (k \geq 3),
 \end{aligned}$$

und für $x > f(x_0)$ strebt $p_n(x)$ gegen unendlich, und zwar streng monoton im Falle $x > 1/2 + \sqrt{x_0 + 1/4}$, schließlich streng monoton im Falle $f(x_0) < x < 1/2 + \sqrt{x_0 + 1/4}$.

Bemerkung:

Die Abschätzungen (24) sind grob (siehe z.B. (31) weiter unten), und auch die Glattheitsaussage bei b) werden wir später wesentlich verschärfen (Satz 8 in [4]). Aus der wichtigen Funktionalgleichung (23) folgt unter anderem unmittelbar

$$f(x) = \sqrt{x + f(f(x))} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (25)$$

und

$$\left. \begin{aligned} x_0 = x, x_1 = f(x), x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n \quad (n \in \mathbf{N}_0) \\ \Rightarrow x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbf{N}_0). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Beweis:

Ist (x_0, x_1, x_2, \dots) eine (22) erfüllende (und daher nach Satz 4 monoton gegen 2 konvergierende) Folge, so auch (x_1, x_2, x_3, \dots) . Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage von Satz 4 gilt also nicht nur $x_1 = f(x_0)$, sondern auch

$$x_1^2 - x_0 = x_2 = f(x_1);$$

d.h.: mit $x_0 = x \geq 0$ gilt

$$(f(x))^2 - x = f(f(x)).$$

Die erste der Ungleichungen (24) ergibt sich, wenn man die Iteration (14), (15) mit $\tilde{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$ beginnt und die monotone Konvergenz der Komponenten von $\tilde{x}^{(k)}$ beachtet. Die zweite Ungleichung folgt analog, wenn man für $x > 2$ die Iteration mit $\tilde{x}^{(0)} = (x, x, \dots)$ beginnt.

Nun zu b):

Aus (14), (15) (oder (16)) folgt per Induktion, daß alle Folgenglieder $x_j^{(k)}$ stetige, monoton wachsende und konkave Funktionen von $x \geq 0$ sind, wenn man von der Startfolge

$$\tilde{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$$

ausgeht. Aufgrund der nach (21) lokalgleichmäßigen Konvergenz gegen die Grenzfolge sind also auch deren Glieder stetige, monoton wachsende und konkave Funktionen von x . Insbesondere gilt dies für $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{(k)}$.

Wegen (25) ist f als konkave Funktion *streng* monoton.

Wir beweisen nun die stetige Differenzierbarkeit von f .

Aus (16) folgen die Rekursionsbeziehungen

$$x_j^{(k+1)\prime} = \frac{x_{j-1}^{(k+1)\prime} + x_{j+1}^{(k+1)\prime}}{2\sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k+1)}}} \quad (j \in \mathbf{N}), \quad (27)$$

wenn wir für irgendeine Startfolge $\tilde{x}^{(0)} = (x, \dots)$ die Komponenten $x_j^{(k)}$ der Folgen $\tilde{x}^{(k)}$ als Funktionen von x betrachten.

Nach dem schon Bewiesenen sind mit

$$x_0 = x, x_1 = f(x), x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

alle x_j stetige, streng monoton wachsende und konkave Funktionen von x , haben also (monoton fallende) *einsseitige* Ableitungen. Sei \tilde{x}_j' die linksseitige Ableitung

von x_j . Dann folgt wegen $x_j = \sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}}$

$$\tilde{x}_j' = \frac{\tilde{x}_{j-1}' + \tilde{x}_{j+1}'}{2\sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}}} \quad (j \in \mathbf{N}),$$

und mit (27) ergibt sich für $j \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned} |x_j^{(k+1)\prime} - \tilde{x}_j'| \leq & \frac{|x_{j-1}^{(k+1)\prime} - \tilde{x}_{j-1}'| + |x_{j+1}^{(k+1)\prime} - \tilde{x}_{j+1}'|}{2\sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}}} \\ & + \frac{x_{j-1}^{(k+1)\prime} + x_{j+1}^{(k+1)\prime}}{2} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k+1)}}} \right|. \end{aligned} \quad (28)$$

Nun setzen wir $\tilde{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$ und zunächst $x \geq 1$ voraus. Wegen (18) gilt

$$\sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}} \geq \sqrt{1 + \sqrt{2}};$$

analog gilt auch

$$\sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k+1)}} \geq \sqrt{1 + \sqrt{2}},$$

und aus (27) folgt per Induktion

$$x_j^{(k)\prime} \in [0, 1] \quad (j, k \in \mathbf{N}_0).$$

Setzen wir

$$\varepsilon_k := \left| \frac{1}{\sqrt{x_{j-1} + x_{j+1}}} - \frac{1}{\sqrt{x_{j-1}^{(k+1)} + x_{j+1}^{(k+1)}}} \right|$$

und

$$\delta_k := \max_{j \in \mathbf{N}_0} |x_j^{(k)\prime} - \tilde{x}_j'|,$$

ergibt sich aus (28) also

$$\delta_{k+1} \leq \frac{\delta_{k+1} + \delta_k}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} + \varepsilon_k,$$

d.h.

$$\delta_{k+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} \delta_k + \frac{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} \varepsilon_k. \quad (29)$$

Da die ε_k nach (20) (unter den Voraussetzungen $x \geq 1$ und $\tilde{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$) mit $k_0 = 0$ zutreffend lokalgleichmäßig bzgl. $x \geq 1$ gegen 0 streben, folgt dies mit (29) auch für die δ_k ; denn mit

$$\tilde{\varepsilon}_k := \frac{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} \varepsilon_k \quad \text{und} \quad q := \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}} - 1} < \frac{1}{2}$$

folgt aus (29) per Induktion

$$\delta_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n \tilde{\varepsilon}_{n-k} q^k + \delta_0 q^{n+1},$$

also

$$\delta_{n+1} \leq \max_{\frac{n}{2} \leq k \leq n} \tilde{\varepsilon}_k \frac{1}{1-q} + q^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \max(\delta_0, \tilde{\varepsilon}_0, \dots, \tilde{\varepsilon}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}).$$

Damit ist gezeigt, daß die $x_j^{(k)'}$ für $x \geq 1$ lokalgleichmäßig gegen die \tilde{x}_j' streben. Da zugleich die $x_j^{(k)}$ lokalgleichmäßig gegen die x_j streben, ergibt sich: Die x_j sind stetig differenzierbar für $x \geq 1$, und die \tilde{x}_j' sind nicht nur linksseitige, sondern zugleich rechtsseitige Ableitungen der x_j , wobei $x_1 = f(x)$. Was gilt nun für $0 \leq x \leq 1$? Sei $x \in [0, 2]$, $t = f(x)$. Dann folgt

$$f(0) \leq t \leq 2, \quad f(f(x)) = (f(x))^2 - x,$$

also

$$\begin{aligned} x &= t^2 - f(t) =: \varphi(t) \quad (f(0) \leq t \leq 2), \\ f(x) &= t = \varphi^{-1}(x) \quad (0 \leq x \leq 2). \end{aligned}$$

Dabei ist φ^{-1} streng monoton und stetig differenzierbar, da dies nach dem schon Bewiesenen für φ gilt.

Daß f strikt konkav ist, ergibt sich ebenfalls aus (23) gemäß

$$f'(x) = \left(\sqrt{x + f(f(x))} \right)' = \frac{1 + f'(f(x)) \cdot f'(x)}{2\sqrt{x + f(f(x))}},$$

woraus ersichtlich ist, daß f' streng monoton fällt.

Nun zum Beweis von c):

Die Argumentationen des Beweises von Satz 1 gelten praktisch ohne Modifikation für den Fall $0 \leq x_0 \leq 2$, weshalb wir hier nur den Fall $x_0 > 2$ diskutieren. Zunächst ergibt sich $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \sqrt{x_0}$, und wie im Beweis von Satz 1 folgt

$$\xi_n < \xi_{n+1} \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Statt (1) benutzen wir nun die etwas modifizierte (aber genauso zu begründende) Aussage

$$\left. \begin{aligned} |p_n(x)| &> |p_{n-1}(x)|, \quad |p_n(x)| \geq 2 \\ \Rightarrow p_{n+1}(x) &> |p_n(x)|, \quad p_{n+k}(x) \nearrow \infty \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Aus (30) folgt, daß $\xi_n \leq 1/2 + \sqrt{x_0 + 1/4}$ für alle n :

Für $x > 1/2 + \sqrt{x_0 + 1/4}$ und $x_0 > 2$ gilt

$$p_2(x) = x^2 - x_0 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - x_0 + x - \frac{1}{4} > x - p_1(x) \geq \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}} > 2,$$

also nach (30) $p_n(x) \nearrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$).

Sei nun $\beta_n > \xi_n$ so gewählt, daß

$$p_n(\beta_n) = \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}}, \quad 0 < p_n(x) < \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}} \quad \text{für } \xi_n < x < \beta_n.$$

Dann gilt

$$\beta_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}} = \beta_2,$$

und aus $\beta_n \leq \beta_{n-1}$ folgt

$$\begin{aligned} p_{n+1}(\beta_n) &= p_n^2(\beta_n) - p_{n-1}(\beta_n) \\ &\geq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}}\right) \\ &= x_0 > \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

wegen $x_0 > 2$, also $\beta_{n+1} < \beta_n$. Folglich gilt

$$\xi_n < \xi_{n+1} < \xi < \beta_{n+1} < \beta_n \quad (n > 1),$$

also

$$0 < p_n(\xi) < \frac{1}{2} + \sqrt{x_0 + \frac{1}{4}} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

und mit Satz 4 folgt $\xi = f(x_0)$, d.h.

$$p_n(\xi) \searrow 2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Da, ebenfalls nach Satz 4, für kein $x > \xi$ die Folge $(p_n(x))$ beschränkt sein kann, ergibt sich mit (30), daß $(p_n(x))$ für $f(x_0) < x < 1/2 + \sqrt{x_0 + 1/4}$ schließlich monoton (da ja $p_2(x) < p_1(x)$) gegen unendlich strebt.

Es sind nun nur noch die Folgen $(p_n(\xi_k))_{n \in \mathbf{N}}$ für $k \geq 3$ zu betrachten.

Es gilt $\xi_3 = 1$ im Falle $x_0 = 0$ und ansonsten $\xi_3 > 1$. Wie im Beweis zu Satz 1 erschließt man daher $p_n(\xi_k) > 1$ für $1 < n < k$ und

$$p_{k+1}(\xi_k) < -1, \quad p_{k+2}(\xi_k) > 1, \quad p_{k+3}(\xi_k) > 2,$$

so daß mit (30) die schließlich monotone Konvergenz von $(p_n(\xi_k))$ gegen unendlich folgt. ■

Nebenbei hat sich die Abschätzung

$$\sqrt{x} < f(x) < \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad (x > 2) \quad (31)$$

ergeben.

Die Iterationsvorschrift (16) läßt sich auch noch für $-f(0) \leq x \leq 0$ uneingeschränkt anwenden:

$$\vec{x}^* = (-f(0), 0, f(0), f(f(0)), \dots)$$

ist eine gegen 2 strebende Lösung der Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$, und für $x \geq -f(0)$ bleiben alle Iterierten gemäß (16) von

$$\vec{x}^{(0)} = (x, 2, 2, \dots)$$

komponentenweise oberhalb von \vec{x}^* . Andererseits sind die Iterierten für $x < 2$ komponentenweise monoton fallend; also ist der Iterationsprozeß komponentenweise konvergent.

So gelangt man zu folgendem Bild der Funktion f :

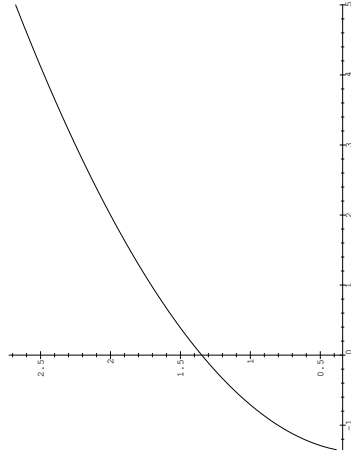


Bild 9: Die Funktion f

Diese zunächst langweilig anmutende Funktion liefert nun einen weitreichenden Zugang zum Verständnis der Dynamik der Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$. Denn die Funktionalgleichung (23) besagt, daß die Kurve $(x, f(x))$ ($x \geq 0$) eine *invariante Mannigfaltigkeit* der ebenen Transformation

$$\Phi : (x, y) \mapsto (y, y^2 - x) \quad (x, y \in \mathbf{R}) \quad (32)$$

darstellt, d.h.

$$\Phi(x, f(x)) = (f(x), f^2(x) - x) = (f(x), f(f(x)))$$

liegt stets wieder auf der Kurve. Und diese Abbildung Φ erzeugt gemäß

$$\Phi(x_n, x_{n+1}) = (x_{n+1}, x_{n+2})$$

die betrachtete Rekursion. Die Abbildung Φ ist trivialerweise bijektiv,

$$\Phi^{-1} : (u, v) \mapsto (u^2 - v, u) \quad (u, v \in \mathbf{R}), \quad (33)$$

und da die Funktionaldeterminante von Φ konstant gleich 1 ist, ist Φ nach der Transformationsformel für Mehrfachintegrale *flächentreu*. Man kann sich Φ geometrisch leicht veranschaulichen als Hintereinanderausführung einer „parabolischen Verbiegung“ der Parallelen zur y -Achse und einer Drehung um $\pi/2$ im Uhrzeigersinn.

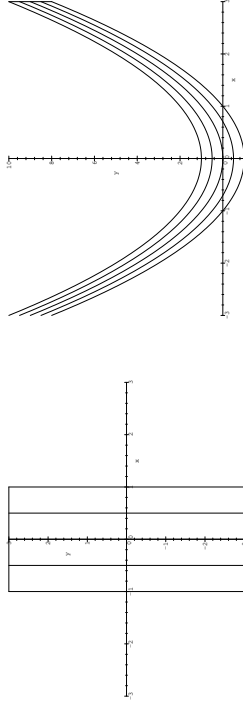


Bild 10: Biegen und Drehen

Punkte der Kurve $\{(x, f(x)) | x \geq 0\}$ werden durch Φ auf der Kurve näher herangerückt an den Punkt $(2, 2)$, der Fixpunkt von Φ ist, und es gilt

$$\Phi^n(x, f(x)) \rightarrow (2, 2) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Die Eindeutigkeitsaussage von Satz 4 besagt nun in dieser Terminologie, daß im Falle $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(a, b) = (2, 2)$ stets $\Phi^n(a, b)$ für alle genügend großen n auf der Kurve $\{(x, f(x)) \mid x \geq 0\}$ liegen muß. Anders gesagt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^n(a, b) = (2, 2) \Rightarrow (a, b) \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Phi^{-n}(\{(x, f(x)) \mid x \geq 0\}). \quad (34)$$

Damit ist die Gesamtheit der Startwerte $x_0 = a, x_1 = b$ charakterisiert, für welche die Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1} - x_n$ gegen 2 konvergiert: Diese Punktepaare (x_0, x_1) bilden die glatte Kurve

$$\mathcal{M} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Phi^{-n}(\{(x, f(x)) \mid x \geq 0\}), \quad (35)$$

zu der sich die Funktion f mithilfe der Transformation Φ vervollständigen läßt! Die Geometrie von \mathcal{M} wird sich als äußerst komplex erweisen; sie ist exemplarisch für die bei nichtlinearen Abbildungen mögliche verwickelte Dynamik. Zunächst das Bild eines Anfangsstücks von \mathcal{M} :

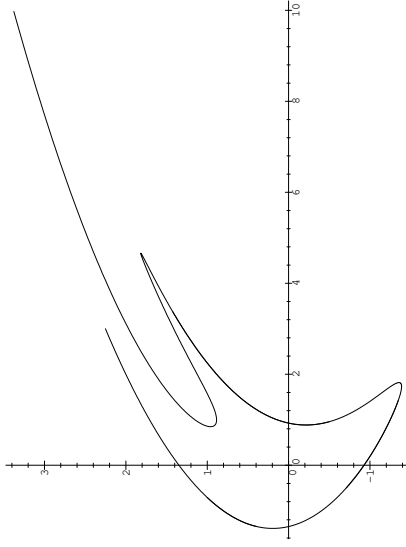


Bild 11: $\{(x, f(x)) \mid 2 \leq x \leq 3\} \cup \Phi^{-3}(\{(x, f(x)) \mid -f(0) \leq x \leq 2\})$

Man ahnt auf Anhieb, was passiert: Die nach links ausholenden Schlaufen kommen in den Einflußbereich der in der Nähe des Nullpunkts überwiegenden Drehwirkung von Φ^{-1} , wickeln sich also unendlich oft um $(0, 0)$ herum, während die

nach rechts ausholenden Schlaufen immer weiter nach unendlich ausgreifen und sich an die Funktionskurve von f herandrängen. Wir betrachten noch einige weitere Bilder:

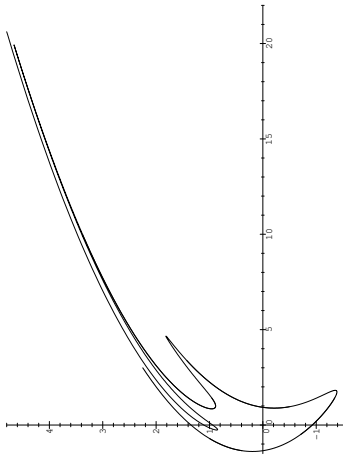


Bild 12: $\{(x, f(x)) \mid 2 \leq x \leq 3\} \cup \Phi^{-4}(\{(x, f(x)) \mid -f(0) \leq x \leq 2\})$



Bild 13: $\Phi^{-8}(\{(x, f(x)) \mid -1 \leq x \leq 2\}) \cap \{(x, y) \mid -1.4 \leq x \leq 2.5\}$

Rechnungen und Visualisierungen mit Hilfe des Mathematik-Systems Maple in [5]. Für einen ersten Einstieg in die nichtlineare Dynamik seien die Kapitel 13 und 14 von [1] sowie das exzellente Buch [2] empfohlen.

Einer Reihe von Kollegen, Freunden und Mitarbeitern danke ich herzlich für die mir gewährte technische Unterstützung, für anregende Gespräche und für das Korrekturlesen von Teilen des Manuskripts; zu nennen sind insbesondere Heinrich Bock, Ulrich Detert, Tamara Knöddler, Hans-Günter Meier, Manfred Sauren und Rainer von Seggern.

Literatur

- [1] Kenneth J. Falconer: *Fraktale Geometrie*; Heidelberg, Berlin, Oxford 1993
- [2] Jack K. Hale, Hüseyin Koçak: *Dynamics and Bifurcations*; Berlin, Heidelberg, New York 1991
- [3] Wolfgang Walter: *Analysis I*, 3. Auflage; Berlin, Heidelberg 1992
- [4] Edgar M. E. Wermuth: *Analytischer Salat – Über die Rekursion $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - x_n$* , Teil II; in Vorbereitung
- [5] Edgar M. E. Wermuth: *Some Intricate Invariant Manifolds of Simple Dynamical Systems—a Maple Story*; eingereicht bei MapleTech

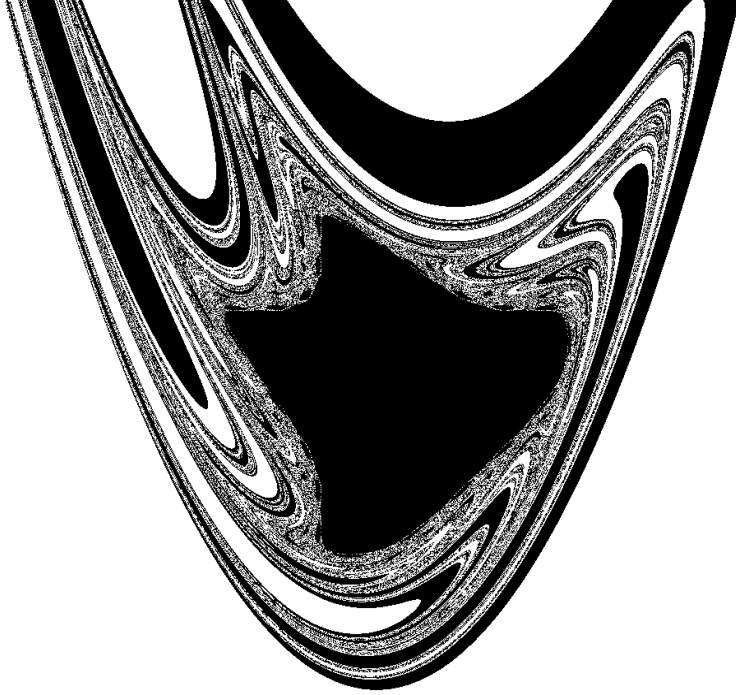


Bild 14: Die Gesamtstruktur von \mathcal{M}

Bild 14 wurde nicht durch explizite Berechnung von \mathcal{M} , sondern (wie die Bilder 5 bis 8) punktweise erzeugt, indem für ein hinreichend feines Raster von Startwerten (x_0, x_1) anhand der Beziehung (30) das Konvergenzverhalten mit hoher Rechen tiefe getestet wurde. Verständlich wird die Struktur dieses Bildes jedoch erst durch den Zusammenhang mit der Φ -invarianten Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , dem geometrischen Ort aller Startwerte, für welche Konvergenz der Rekursion gegen 2 stattfindet.

Die genauere Struktur von \mathcal{M} , weitere für das Verständnis der Dynamik der Abbildung Φ (bei der es sich um eine flächentreue Hénon- oder auch Cremona-Abbildung handelt; siehe z.B. [2]) und damit der Rekursion entscheidende invariante Mannigfaltigkeiten sowie gewisse Verallgemeinerungen der bisher betrachteten Rekursionsvorschrift, ferner Bezüge zur allgemeinen Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme werden in einem zweiten Teil dieser Arbeit [4] behandelt,