KAPITEL 3

Lineare Differentialgleichungen der Ordnung ≥ 2

Wir hatten im letzten Kapitel die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$x' = a(t)x + b(t)$$

betrachtet. Nun schauen wir uns lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung (mit $n \geq 2$) an:

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t).$$

Dabei sind $a_1, \ldots, a_n$ und b auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte und stetige Funktionen.

1. Die homogene lineare Differentialgleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$

Beispiele:

(1) Die Differentialgleichung $x'' - x = 0$, also $x'' = x$ hat offensichtlich die Lösungen

$$\varphi_1(t) = e^t \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{-t},$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

(2) Die Differentialgleichung $x'' + x = 0$, also $x'' = -x$ hat offensichtlich die Lösungen

$$\varphi_1(t) = \cos(t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \sin(t),$$

die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die auf ganz I definierten Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

also die Menge

$$\mathcal{L} = \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \in I\}.$$

(1) *Die Addition von Funktionen ($\varphi_1 + \varphi_2$ mit $(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$) und die Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen ($\lambda\varphi$ mit $(\lambda\varphi)(t) = \lambda\varphi(t)$) macht $\mathcal{L}$ zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(2) *Ist $t_0 \in I$, so ist (die Auswertungsabbildung)*

$$\mathcal{L} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$$

eine injektive lineare Abbildung. Insbesondere gilt $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L} \leq 2$.

Beweis:

(1) Dies ist klar.

(2) Dass die Auswertungsabbildung linear ist, ist klar. Sei $\varphi \in \mathcal{L}$ ein Element des Kerns, d.h. $\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = 0$. Wir müssen zeigen, dass φ identisch 0 ist. Wir definieren

$$\sigma : I \to \mathbb{R} \text{ mit } \sigma(t) = \varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2.$$

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= 2\varphi(t)\varphi'(t) + 2\varphi'(t)\varphi''(t) = \\ &= 2\varphi(t)\varphi'(t) + 2\varphi'(t)\Big(-p(t)\varphi'(t) - q(t)\varphi(t)\Big) = \\ &= (1 - q(t)) \cdot 2\varphi(t)\varphi'(t) - 2p(t)\varphi'(t)^2. \end{aligned}$$

Datei: al_dgl3.tex. Version vom 19.11.2020

(b) Aus
$$0 \leq (\varphi(t) + \varphi'(t))^2 = \varphi(t)^2 + 2\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi'(t)^2$$
folgt
$$-2\varphi(t)\varphi'(t) \leq \varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2 = \sigma(t),$$
aus
$$0 \leq (\varphi(t) - \varphi'(t))^2 = \varphi(t)^2 - 2\varphi(t)\varphi'(t) + \varphi'(t)^2$$
folgt
$$2\varphi(t)\varphi'(t) \leq \varphi(t)^2 + \varphi'(t)^2 = \sigma(t),$$
sodass wir insgesamt
$$|2\varphi(t)\varphi'(t)| \leq \sigma(t)$$
erhalten.

(c) Mit (a) und (b) können wir weiter abschätzen:
$$\begin{aligned}|\sigma'(t)| &\leq (1 + |q(t)|) \cdot |2\varphi(t)\varphi'(t)| + 2|p(t)|\varphi'(t)^2 \leq \\ &\leq (1 + |q(t)|) \cdot \sigma(t) + 2|p(t)| \cdot \sigma(t) = \\ &= (1 + 2|p(t)| + |q(t)|) \cdot \sigma(t).\end{aligned}$$

(d) Sei $[a, b]$ ein beliebiges kompaktes Intervall mit $t_0 \in [a, b] \subseteq I$. Wegen der Stetigkeit von p und q gibt es eine Konstante K mit
$$1 + 2|p(t)| + |q(t)| \leq K \text{ für alle } t \in [a, b].$$
Mit dem Ergebnis aus (c) ergibt sich dann
$$|\sigma'(t)| \leq K \cdot \sigma(t) \text{ für alle } t \in [a, b].$$
Nun ist aber $\sigma(t_0) = 0$. Aus dem nachfolgenden Lemma folgt dann $\sigma(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$, und damit
$$\varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \in [a, b].$$
Da das Intervall $[a, b] \subseteq I$ mit $t_0 \in [a, b]$ beliebig gewählt werden kann, folgt
$$\varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \in I,$$
was wir beweisen wollten. Die beweist nun die Injektivität der Auswertungsabbildung $\mathcal{L} \to \mathbb{R}^2$. ■

Lemma. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $t_0 \in I$ und $\sigma : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es sei $\sigma(t_0) = 0$ und es gebe eine Zahl $K \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit*
$$|\sigma'(t)| \leq K \cdot \sigma(t) \text{ für alle } t \in I.$$
Dann ist σ identisch 0, d.h.
$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

Beweis:

(1) Aus $|\sigma'(t)| \leq K \cdot \sigma(t)$ folgt
$$\sigma(t) \geq 0, \quad \sigma'(t) \leq K \cdot \sigma(t) \quad \text{und} \quad -\sigma'(t) \leq K \cdot \sigma(t).$$

(2) Wir definieren $\tau : I \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung
$$\sigma(t) = \tau(t)e^{Kt}.$$
Wegen $\sigma(t) \geq 0$ gilt auch
$$\tau(t) \geq 0,$$
und natürlich folgt aus $\sigma(t_0) = 0$ auch $\tau(t_0) = 0$. Wir differenzieren die Gleichung $\sigma(t) = \tau(t)e^{Kt}$:
$$\sigma'(t) = \tau'(t)e^{Kt} + \tau(t) \cdot Ke^{Kt} = \tau'(t)e^{Kt} + K \cdot \sigma(t).$$
Aus $\sigma'(t) \leq K \cdot \sigma(t)$ folgt nun $\tau'(t)e^{Kt} \leq 0$, also
$$\tau'(t) \leq 0.$$

$\tau(t)$ ist monoton fallend. Wegen $\tau(t_0) = 0$ und $\tau(t) \geq 0$ folgt dann

$$\tau(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \text{ mit } t \geq t_0,$$

und damit auch

$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \text{ mit } t \geq t_0.$$

(3) Wir definieren $\rho : I \to \mathbb{R}$ durch die Gleichung

$$\sigma(t) = \rho(t)e^{-Kt}.$$

Wegen $\sigma(t) \geq 0$ und $\sigma(t_0) = 0$ gilt auch

$$\rho(t) \geq 0 \text{ und } \quad \rho(t_0) = 0.$$

Nun differenzieren wir die Gleichung $\sigma(t) = \rho(t)e^{-Kt}$:

$$\sigma'(t) = \rho'(t)e^{-Kt} - \rho(t) \cdot Ke^{-Kt} = \rho'(t)e^{-Kt} - K\sigma(t),$$

also

$$-\sigma'(t) = -\rho'(t)e^{-Kt} + K\sigma(t).$$

Nun folgt aus $-\sigma'(t) \leq K\sigma(t)$ sofort $-\rho'(t)e^{-Kt} \leq 0$, also

$$\rho'(t) \geq 0.$$

Daher ist ρ monoton steigend. Wegen $\rho(t) \geq 0$ und $\rho(t_0) = 0$ folgt dann

$$\rho(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \text{ mit } t \leq t_0,$$

und damit auch

$$\sigma(t) = 0 \text{ für alle } t \in I \text{ mit } t \leq t_0.$$

(4) Aus (2) und (3) folgt sofort $\sigma(t) = 0$ für alle $t \in I$, was gezeigt werden sollte. ∎

Bemerkungen:

(1) Wir werden im 5. Kapitel sehen, dass der Lösungsraum $\mathcal{L}$ der Differentialgleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ die Dimension 2 hat. Eine Basis φ_1, φ_2 des Lösungsraums wird dann auch ein **Lösungsfundamentalsystem** oder **Fundamentalsystem** genannt. Die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung ist dann

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

der Lösungsraum also

$$\mathcal{L} = \{c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(2) Ist t_0 aus dem Definitionsintervall I von p und q, sind $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, so nennt man die Suche nach einer Lösung mit

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1$$

ein **Anfangswertproblem**.

Bemerkung: Wir betrachten eine Differentialgleichung

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

mit Lösungsraum $\mathcal{L}$, wo p, q auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen sind. Wir wissen nach dem Satz, dass für $t_0 \in I$ die Auswertungsabbildung

$$\mathcal{L} \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$$

injektiv (und linear) ist. Wie kann man testen, ob Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{L}$ linear unabhängig sind? Die Injektivität der Auswertung führt zu folgendem Vorgehen:

$$\varphi_1, \varphi_2 \text{ sind linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \text{ sind linear unabhängig} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Die hier vorkommende Determinante wird Wronski-Determinante genannt:

Definition. *Sind $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definierte und differenzierbare Funktionen, so heißt*

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix}$$

die **Wronski-Determinante** *von φ_1, φ_2.*

Unsere vorangegangene Bemerkung formulieren wir als Folgerung aus dem Satz:

Folgerung. *Zwei Lösungen $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ einer auf einem Intervall I definierten Differentialgleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ sind genau dann linear unabhängig, bilden also ein Fundamentalsystem, wenn für ein $t_0 \in I$ gilt*

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t_0) \neq 0.$$

Beispiele:

(1) Wir hatten für die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Differentialgleichung

$$x'' - x = 0$$

die Lösungen

$$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_1(t) = e^t \text{ und } \varphi_2(t) = e^{-t}$$

gefunden. Wir bilden die Wronski-Determinante:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2.$$

Die Lösungen φ_1, φ_2 sind also linear unabhängig, bilden also ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung, d.h. die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(2) Für die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Differentialgleichung

$$x'' + x = 0$$

hatten wir die Lösungen

$$\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } \varphi_1(t) = \cos(t) \text{ und } \varphi_2(t) = \sin(t)$$

gesehen. Wir bilden die Wronski-Determinante:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = \begin{vmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{vmatrix} = \cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1.$$

Da die Wronski-Determinante von 0 verschieden ist, bilden φ_1, φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung, d.h. die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Wir ziehen noch eine weitere Folgerung aus dem Satz:

Folgerung. *Seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Für die Wronski-Determinante $W(\varphi_1, \varphi_2, t)$ gibt es dann drei Möglichkeiten:*

- *$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = 0$ für alle $t \in I$.*
- *$W(\varphi_1, \varphi_2, t) > 0$ für alle $t \in I$.*
- *$W(\varphi_1, \varphi_2, t) < 0$ für alle $t \in I$.*

Beweis: Da φ_1, φ_2 zweimal differenzierbar sind, sind insbesondere die Ableitungen φ_1', φ_2' stetig. Damit ist auch $I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto W(\varphi_1, \varphi_2, t)$ stetig. Wir wählen ein $t_0 \in I$ und unterscheiden zwei Fälle:

- **Fall** $W(\varphi_1, \varphi_2, t_0) = 0$**:** Dann sind φ_1, φ_2 linear unabhängig. Der Satz liefert dann

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$

- **Fall $W(\varphi_1, \varphi_2, t_0) \neq 0$:** Dann sind φ_1, φ_2 linear unabhängig. Mit dem Satz gilt dann
$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I.$$
Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto W(\varphi_1, \varphi_2, t)$ folgt dann aus dem Zwischenwertsatz, dass entweder
$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) > 0 \text{ für alle } t \in I$$
oder
$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) < 0 \text{ für alle } t \in I$$
gilt.

(Das Ergebnis folgt auch direkt aus nachfolgendem Satz.) ■

Die Wronski-Determinante erfüllt auch eine Differentialgleichung:

Satz. *Seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $x''+p(t)x'+q(t)x = 0$. Für die Wronski-Determinante $W : I \to \mathbb{R}$ mit $W(t) = W(\varphi_1, \varphi_2, t)$ gilt dann:*
$$W'(t) = -p(t) \cdot W(t) \text{ für alle } t \in I.$$
Ist $P : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von p, d.h. $P'(t) = p(t)$ für alle $t \in I$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$W(t) = ce^{-P(t)} \text{ für alle } t \in I.$$

Beweis: Da φ_1, φ_2 die Differentialgleichung erfüllen, gilt
$$\varphi_i(t)'' + p(t)\varphi_i(t)' + q(t)\varphi_i(t) = 0 \text{ für } i = 1, 2.$$
Es ist
$$W(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t),$$
und damit
$$\begin{aligned} W'(t) &= \varphi_1'(t)\varphi_2'(t) + \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2'(t) = \\ &= \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2(t) = \\ &= \varphi_1(t)\Big(- p(t)\varphi_2'(t) - q(t)\varphi_2(t)\Big) - \Big(- p(t)\varphi_1'(t) - q(t)\varphi_1(t)\Big)\varphi_2(t) = \\ &= -p(t)\Big(\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)\Big) = -p(t) \cdot W(t). \end{aligned}$$
Dies ist eine lineare Differentialgleichung für $W(t)$, die wir lösen können: Ist $P(t)$ eine Stammfunktion von $p(t)$, d.h. $P'(t) = p(t)$, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit
$$W(t) = ce^{-P(t)} \text{ für alle } t \in I.$$
Dies wollten wir zeigen. ■

Bemerkung: Anders als bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung ist für linearen Differentialgleichungen 2. (und höherer) Ordnung kein allgemeines Verfahren bekannt um ein Lösungsfundamentalsystem zu bestimmen. Das folgende Verfahren konstruiert eine weitere Lösung, wenn bereits eine Lösung bekannt ist.

d'Alembert-Reduktion: Wir betrachten eine homogene lineare Differentialgleichung
$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$
wo p und q auf einem Intervall I definierte und stetige Funktionen sind. Wir nehmen an, wir kennen eine Lösung der φ der Differentialgleichung, d.h. es gilt
$$\varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) = 0 \text{ für alle } t \in I.$$
Wir nehmen außerdem an, dass $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Um eine zweite Lösung des finden, machen wir den Ansatz
$$\psi(t) = c(t)\varphi(t).$$

(Dies entspricht der „Variation der Konstanten“ bei den linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung.) Es ist

$$\psi = c\varphi, \quad \psi' = c'\varphi + c\varphi', \quad \psi'' = c''\varphi + 2c'\varphi' + c\varphi''.$$

Wann erfüllt ψ die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned} \psi'' + p\psi' + q\psi = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (c''\varphi + 2c'\varphi' + c\varphi'') + p(c'\varphi + c\varphi') + qc\varphi = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi c'' + (2\varphi' + p\varphi)c' + (\varphi'' + p\varphi' + q\varphi)c = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad \varphi c'' + (p\varphi + 2\varphi')c' = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad c'' + (p + 2\frac{\varphi'}{\varphi})c' = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow \quad c'' = -(p + 2\frac{\varphi'}{\varphi})c'. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine lineare homogene Differentialgleichung für c', die man lösen kann. Dann muss man noch c' integrieren. Wir fassen das Ergebnis zusammen:

Satz (d'Alembert-Reduktion). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

mit $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Löst $c : I \to \mathbb{R}$ die Differentialgleichung

$$c'' = -\left(p(t) + 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)c',$$

so ist $\psi : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(t) = c(t)\varphi(t)$$

eine Lösung der Differentialgleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Ist $c'(t) \neq 0$ (für ein $t \in I$), so bilden φ und ψ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung.

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass ψ unter den angegebenen Bedingungen die Differentialgleichung löst. Wir berechnen die Wronski-Determinante:

$$W(\varphi, \psi, t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & c(t)\varphi(t) \\ \varphi'(t) & c'(t)\varphi(t) + c(t)\varphi'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi(t) & 0 \\ \varphi'(t) & c'(t)\varphi(t) \end{vmatrix} = c'(t)\varphi^2(t).$$

Ist also $c'(t) \neq 0$, so bilden φ und ψ ein Lösungsfundamentalsystem. ■

Beispiel: Für $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachten wir die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Differentialgleichung

$$x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x = 0.$$

Da für $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ gilt

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \varphi''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

folgt sofort

$$\varphi''(t) - 2\lambda\varphi'(t) + \lambda^2\varphi(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} - 2\lambda \cdot \lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 \cdot e^{\lambda t} = 0,$$

d.h. φ löst die Differentialgleichung. Um eine weitere Lösung zu finden, setzen wir an $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\psi(t) = c(t)\varphi(t) = c(t)e^{\lambda t}.$$

ψ löst die Differentialgleichung, wenn gilt

$$c''(t) = -\left(-2\lambda + 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)c'(t) = -\left(-2\lambda + 2\frac{\lambda e^{\lambda t}}{e^{\lambda t}}\right)c'(t) = 0.$$

Die Lösung sind die Funktionen

$$c(t) = c_0 t + c_1 \text{ mit } c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Wegen $c'(t) = c_0$ wählen wir $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ und erhalten die Lösung

$$\psi(t) = te^{\lambda t},$$

die dann zusammen mit $\varphi(t) = e^{\lambda t}$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung bildet.

2. Die homogene lineare Differentialgleichung $x'' + px' + qx = 0$ mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten jetzt die lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $p, q \in \mathbb{R}$:

$$x'' + px' + qx = 0.$$

Wir werden sehen, dass wir in diesem Fall schnell ein Lösungsfundamentalsystem angeben können.

Bemerkung: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, so kann man eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{C}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \text{ mit } \varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}.$$

Es ist

$$\varphi_1(t) = \mathrm{Re}\,(\varphi(t)) \quad \text{ und } \quad \varphi_2(t) = \mathrm{Im}\,(\varphi(t)).$$

φ ist genau dann in einem Punkt $t_0 \in I$ differenzierbar, wenn Real- und Imaginärteil in t_0 differenzierbar sind. Es gilt dann

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t).$$

LEMMA. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0.$$

Dann gilt: $\varphi : I \to \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn $\mathrm{Re}\,(\varphi) : I \to \mathbb{R}$ und $\mathrm{Im}\,(\varphi) : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung sind.

Beweis: Wir zerlegen

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t) \text{ mit } \varphi_1 = \mathrm{Re}\,(\varphi) \text{ und } \varphi_2 = \mathrm{Im}\,(\varphi).$$

Es gilt für alle $t \in I$, wobei wir der Einfachkeit halber $a_0(t) = 1$ setzen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi^{(n-i)}(t) = 0 \iff \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\left(\varphi_1^{(n-i)}(t) + i\varphi_2^{(n-i)}(t)\right) = 0 \iff \\ \iff & \left(\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi_1^{(n-i)}(t)\right) + i\left(\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi_2^{(n-i)}(t)\right) = 0 \iff \\ \iff & \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi_1^{(n-i)}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\varphi_2^{(n-i)}(t) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. ■

Bemerkung: Für die lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x' = ax, \quad a \in \mathbb{R}$$

hatten wir die Lösungen

$$\varphi(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

gefunden. Deshalb wollen wir nun auch für

$$x'' + px' + qx = 0 \text{ mit } p, q \in \mathbb{R}$$

einen Lösungsansatz mit der Exponentialfunktion versuchen. Sei

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}.$$

Wann erfüllt $\varphi(t)$ die Differentialgleichung?

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + p\varphi'(t) + q\varphi(t) = 0 & \iff \lambda^2 e^{\lambda t} + p\lambda e^{\lambda t} + qe^{\lambda t} = 0 \overset{e^{\lambda t} \neq 0}{\iff} \\ & \iff \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \iff \\ & \iff \lambda = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \end{aligned}$$

Man nennt

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$

das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind also

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Die Funktionen

$$e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad e^{\lambda_2 t}$$

lösen also die Differentialgleichung. Wir unterscheiden drei Fälle:

(1) **Fall $p^2 - 4q > 0$:** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

sind verschiedene reelle Zahlen. Die Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

lösen die Differentialgleichung. Wir bilden die Wronski-Determinante:

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) \quad = \quad \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}(\lambda_2 - \lambda_1).$$

Da die Wronsiki-Determinante von 0 verschieden ist, bilden

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem. Der Lösungsraum ist also

$$\mathcal{L} = \{t \mapsto c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(2) **Fall $p^2 - 4q = 0$:** Das charakteristische Polynom hat die doppelte Nullstelle

$$\lambda = -\frac{1}{2}p.$$

Zunächst ist $\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} = e^{-\frac{1}{2}pt}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Wegen $\lambda = -\frac{1}{2}p$ und $q = \frac{1}{4}p^2 = (\frac{1}{2}p)^2 = \lambda^2$ schreibt sich die Differentialgleichung als

$$x'' - 2\lambda x' + \lambda^2 x = 0.$$

Mit d'Alembert-Reduktion haben wir zuvor schon eine weitere Lösung bestimmt, nämlich $\varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_2(t) = te^{\lambda t}.$$

Außerdem haben wir gesehen, dass φ_1 und φ_2 ein Lösungsfundamentalsystem bilden. Der Lösungsraum der Differentialgleichung ist also

$$\mathcal{L} = \{t \mapsto (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{1}{2}pt} : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(3) **Fall $p^2 - 4q < 0$:** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind nun konjugiert komplexe Zahlen:

$$\lambda_1 = \frac{-p + i\sqrt{4q - p^2}}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{-p - i\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\alpha = -\frac{p}{2} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2},$$

so gilt also

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

Nun lösen die komplexwertigen Funktionen $e^{\lambda_1 t}$ und $e^{\lambda_2 t}$ die Differentialgleichung. Es ist

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right), \\ e^{\lambda_2 t} &= e^{(\alpha-i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{-i\beta t} = e^{\alpha t} \left(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)\right). \end{aligned}$$

Wir haben gezeigt, dass auch Real- und Imaginärteil einer komplexwertigen Lösung die Differentialgleichung lösen. Daher erhalten wir nun die reellwertigen Lösungen

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

Um zu zeigen, dass die Funktionen ein Fundamentalsystem bilden, berechnen wir die Wronski-Determinante:

$$\begin{aligned} W(\varphi_1, \varphi_2, t) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ \alpha e^{\alpha t}\cos(\beta t) - \beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \alpha e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t) & e^{\alpha t}\sin(\beta t) \\ -\beta e^{\alpha t}\sin(\beta t) & \beta e^{\alpha t}\cos(\beta t) \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \begin{vmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{vmatrix} = \\ &= \beta e^{2\alpha t}. \end{aligned}$$

Wegen $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2} \neq 0$ ist die Wronski-Determinante von 0 verschieden und damit φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Der Lösungsraum ist also

$$\mathcal{L} = \{t \mapsto e^{\alpha t} \left(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)\right) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Wir fassen zusammen:

Vorgehensweise zur Lösung einer Differentialgleichung $x'' + px' + qx = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$:

- Bestimme das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$
und seine Nullstellen λ_1, λ_2.
- Unterscheide drei Fälle:
  - **Fall $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$:** Dann bilden
$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$
ein Lösungsfundamentalsystem.
  - **Fall $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$:** Dann bilden
$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = te^{\lambda t}$$
ein Lösungsfundamentalsystem.
  - **Fall $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$:** Zerlege
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta.$$
Dann bilden
$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$
ein Lösungsfundamentalsystem.

Beispiele:

(1) $x'' + 2x' - x = 0$: Das charakteristische Polynom ist
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1$$
mit den Nullstellen
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-1)}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem ist also

$$\varphi_1(t) = e^{(-1+\sqrt{2})t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{(-1-\sqrt{2})t}.$$

(2) $x'' + 2x' + x = 0$: Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

mit der einzigen Nullstelle $\lambda = -1$. Ein Lösungsfundamentalsystem ist

$$\varphi_1(t) = e^{-t} \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = te^{-t}.$$

(3) $x'' + 2x' + 2x = 0$: Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = -1 \pm i.$$

Wir setzen $\alpha = -1$, $\beta = 1$ und erhalten dann das Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-t}\cos(t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = e^{-t}\sin(t).$$

Harmonischer Oszillator: In der Natur kommen häufig Schwingungsphänomene vor, die sich durch lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschreiben lassen.

- Eine Masse wird mit zwei Federn zwischen zwei Wänden aufgehängt. Die Auslenkung zur Zeit t sei $x(t)$. Die Rückstellkraft der Feder ist nach dem Hookeschen Gesetz proportional zur Auslenkung, was zu einer Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t)$$

führt. Gibt es noch Reibung, wobei die Reibungskraft $r \cdot x'(t)$ proportional zur Geschwindigkeit ist, so erhält man eine Differentialgleichung

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t) - r \cdot x'(t),$$

die sich auch in der Form

$$m \cdot x'' + r \cdot x' + k \cdot x = 0$$

bzw.

$$x'' + \frac{r}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0$$

schreiben lässt.
- Mathematisches Pendel.
- Elektrische Schwingkreise.

Wir besprechen ein paar Phänomene.

(1) **Ungedämpfte Schwingung:** Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0),$$

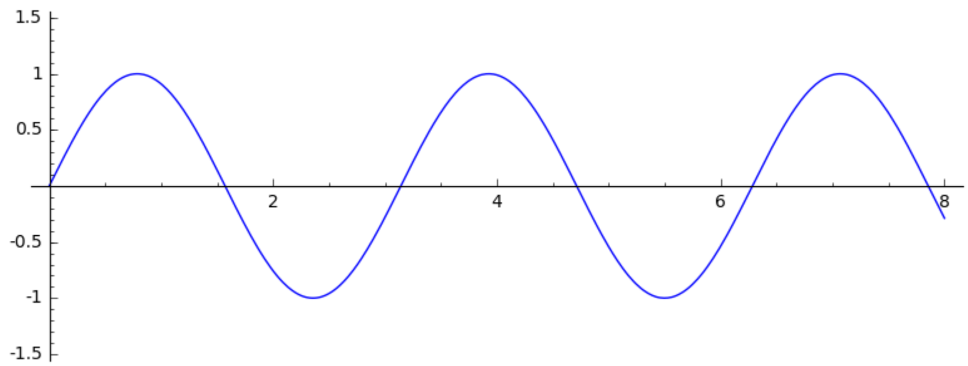
sodass die Funktionen

$$\cos(\omega_0 t), \quad \sin(\omega_0 t)$$

ein Lösungsfundamentalsystem bilden. Die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) \text{ mit reellen Zahlen } c_1, c_2.$$

Die Lösungen sind rein periodisch mit der Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$.



(2) **Gedämpfte Schwingung:** Wir betrachten jetzt eine Differentialgleichung

$$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\mu \geq 0$. Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Hier unterscheiden wir Fälle:

(a) **Fall $\mu = 0$ - ungedämpfte Schwingung:** Diesen Fall haben wir bereits oben betrachtet.

(b) **Fall $0 < \mu < \omega_0$ - schwäche Dämpfung:** Sei

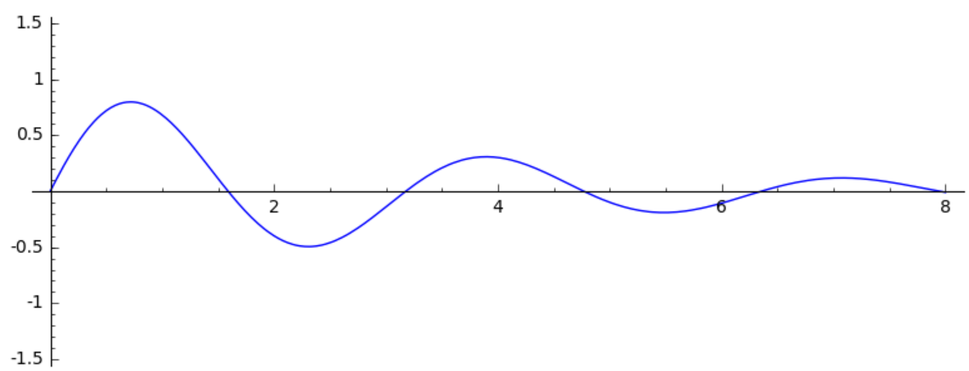
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}.$$

Dann ist $0 < \omega < \omega_0$ und

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm i\omega.$$

Ein Fundamentalsystem ist

$$e^{-\mu t}\cos(\omega t), \quad e^{-\mu t}\sin(\omega t).$$



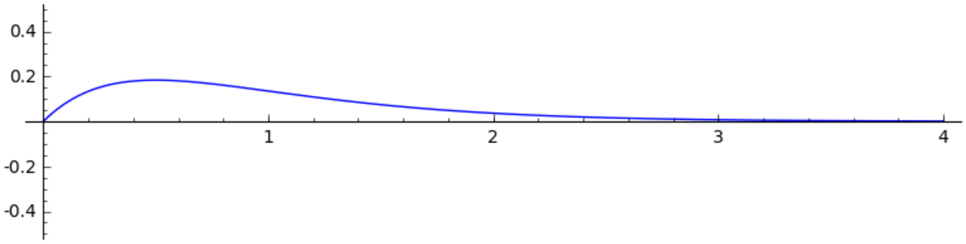
(c) **Fall $\mu = \omega_0$ - aperiodischer Grenzfall:** Das charakteristische Polynom hat eine Nullstelle mit Vielfachheit 2, nämlich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu.$$

Die Funktionen

$$e^{-\mu t}, \quad te^{-\mu t}$$

bilden ein Fundamentalsystem.

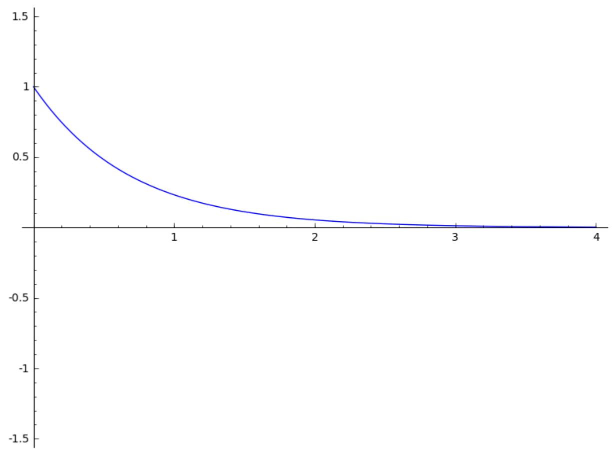


(d) **Fall $\mu > \omega_0$ - starke Dämpfung:** Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind zwei verschiedene, negative reelle Zahlen:

$$\lambda_{1/2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem ist

$$e^{-(\mu - \sqrt{\mu^2-\omega_0^2})t}, \quad e^{-(\mu + \sqrt{\mu^2-\omega_0^2})t}.$$



3. Die inhomogene Gleichung $x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$

Der folgende Satz verallgemeinert den entsprechenden Satz für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung:

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Sei $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Differentialgleichung*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

Ist nun $\varphi_s : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der (inhomogenen) linearen Differentialgleichung

$$x'' + p(t)x' + q(t) = r(t),$$

so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\varphi_{c_1,c_2} : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_{c_1,c_2}(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \varphi_s(t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi''_{c_1,c_2}(t) + p(t)\varphi'_{c_1,c_2}(t) + q(t)\varphi_{c_1,c_2} &= c_1 \cdot (\varphi''_1(t) + p(t)\varphi'_1(t) + q(t)\varphi_1(t)) + \\ &\quad + c_2 \cdot (\varphi''_2(t) + p(t)\varphi'_2(t) + q(t)\varphi_2(t)) + \\ &\quad + (\varphi''_s(t) + p(t)\varphi'_s(t) + q(t)\varphi_s(t)) = \\ &= 0 + 0 + r(t) = r(t), \end{aligned}$$

also löst φ_{c_1,c_2} die inhomogene Differentialgleichung.
Ist nun umgekehrt φ eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, so sieht man sofort, dass $\varphi - \varphi_s$ die homogene Differentialgleichung löst. Daher gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\varphi - \varphi_s = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \quad \text{also} \quad \varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \varphi_s.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Man braucht also nur eine **spezielle Lösung** der inhomogenen Gleichung zu finden und kennt dann schon alle Lösungen, wenn ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bekannt ist. Daher geht es im Folgenden um das Finden einer speziellen Lösung.

Für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung haben wir die „Variation der Konstanten“ kennengelernt. Dies wird hier verallgemeinert, funktioniert aber nicht so schön wie bei den Differentialgleichungen 1. Ordnung.

„Variation der Konstanten“: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t).$$

Sei φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung. Wir versuchen, durch den Ansatz

$$\varphi(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$$

eine Lösung der DGL zu finden.

$$\begin{aligned} \varphi &= c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2, \\ \varphi' &= c_1'\varphi_1 + c_1\varphi_1' + c_2'\varphi_2 + c_2\varphi_2', \\ \varphi'' &= c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2''. \end{aligned}$$

Wann löst φ die DGL?

$$\begin{aligned} \varphi'' + p\varphi' + q\varphi &= c_1''\varphi_1 + 2c_1'\varphi_1' + c_1\varphi_1'' + c_2''\varphi_2 + 2c_2'\varphi_2' + c_2\varphi_2'' + \\ &\quad + pc_1'\varphi_1 + pc_1\varphi_1' + pc_2'\varphi_2 + pc_2\varphi_2' + \\ &\quad + qc_1\varphi_1 + qc_2\varphi_2 = \\ &= c_1(\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1) + c_2(\varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2) + \\ &\quad + p(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2) + 2(c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2') + (c_1''\varphi_1 + c_2''\varphi_2) = \\ &= p(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2) + 2(c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2') + (c_1''\varphi_1 + c_2''\varphi_2) = \\ &= p(c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2) + (c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2)' + (c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2'). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung wird sicher gelöst, wenn c_1, c_2 die beiden Bedingungen

$$c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \quad \text{und} \quad c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = r$$

erfüllen. Die Bedingungen lassen sich auch in der Form

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$$

schreiben. Die Determinante der Matrix ist gerade die Wronski-Determinante $W(\varphi_1, \varphi_2)$. Durch Multiplikation mit der inversen Matrix erhalten wir daher

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \begin{pmatrix} \varphi_2' & -\varphi_2 \\ -\varphi_1' & \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{W(\varphi_1, \varphi_2)} \begin{pmatrix} -r\varphi_2 \\ r\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Sind also c_1, c_2 Funktionen mit

$$c_1' = -\frac{r\varphi_2}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad c_2' = \frac{r\varphi_1}{W(\varphi_1, \varphi_2)},$$

so ist $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Wir formulieren das Ergebnis als Satz:

SATZ (Variation der Konstanten). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $p, q, r : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Wir betrachten die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t).$$

Ist φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $x''+p(t)x'+q(t)x = 0$, sind $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ Funktionen mit

$$c_1'(t) = -\frac{r(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2, t)}, \quad c_2'(t) = \frac{r(t)\varphi_1(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2, t)},$$

so ist $\varphi_s : I \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi_s(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t)$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Alternativ kann man auch die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit unbestimmten Integralen angeben:

$$\varphi(t) = \left(-\int \frac{r(t)\varphi_2(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2, t)} dt\right) \varphi_1(t) + \left(\int \frac{r(t)\varphi_1(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2, t)} dt\right) \varphi_2(t).$$

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t^2}.$$

Das charakteristische Polynom der homogenen Gleichung ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, daher ist

$$\varphi_1(t) = e^{-t}, \quad \varphi_2(t) = te^{-t}$$

ein Fundamentalsystem. Die Wronski-Determinante ist

$$W(\varphi_1, \varphi_2, t) = e^{-2t}.$$

Die Bedingungen des letzten Satzes für c_1, c_2 lauten

$$c_1' = -\frac{\frac{e^{-t}}{t^2} \cdot te^{-t}}{e^{-2t}} = -\frac{1}{t}, \quad c_2' = \frac{\frac{e^{-t}}{t^2} \cdot e^{-t}}{e^{-2t}} = \frac{1}{t^2}$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$c_1(t) = -\ln(t) + C_1, \quad c_2(t) = -\frac{1}{t} + C_2 \quad \text{mit } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t) = (-\ln(t) + C_1)\, e^{-t} + \left(-\frac{1}{t} + C_2\right) te^{-t} = \\ &= (C_1 + C_2 t)e^{-t} - \ln(t)e^{-t} - e^{-t} = \\ &= (\widetilde{C}_1 + C_2 t)e^{-t} - \ln(t)e^{-t}. \end{aligned}$$

Ansätze bei spezieller Gestalt der rechten Seite der Differentialgleichung $x'' + px' + qx = r(t)$: Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$x'' + px' + qx = r(t).$$

Natürlich kann man eine spezielle Lösung mit „Variation der Konstanten“ bestimmen. Es gibt aber Fälle, bei denen man mit speziellen Ansätzen schneller zum Ziel kommt, wenn die rechte Seite $r(t)$ von besonderer Bauart ist. Wir beginnen mit dem Typ

$$r(t) = e^{\mu t}.$$

Für $\mu = \alpha + i\beta$ ist

$$e^{\mu t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)),$$

sodass auch die Fälle

$$r(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \mathrm{Re}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right) \quad \text{und} \quad r(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \mathrm{Im}\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)$$

dadurch abgedeckt werden.

Zur Motivation starten wir mit Beispielen:

Beispiele:

(1) Wir betrachten die homogene lineare Differentialgleichung

$$x'' + x' - 2x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda + 2)(\lambda - 1)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Ein Lösungsfundamentalsystem ist daher

$$\varphi_1(t) = e^{-2t}, \quad \varphi_2(t) = e^t.$$

(2) Nun betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + x' - 2x = e^{3t}.$$

Wir setzen $\varphi(t) = e^{3t}$ in die linke Seite ein, wobei $\varphi'(t) = 3e^{3t}$, $\varphi''(t) = 9e^{3t}$ gilt:

$$\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = 9e^{3t} + 3e^{3t} - 2e^{3t} = 10e^{3t}.$$

Division durch 10 liefert die spezielle Lösung

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{10}e^{3t}.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\varphi(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^t + \frac{1}{10}e^{3t} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(3) Nun betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + x' - 2x = \cos(2t).$$

Es ist

$$\cos(2t) = \mathrm{Re}\left(e^{i\cdot 2t}\right).$$

Deswegen setzen wir $\varphi(t) = e^{2it}$ in die linke Seite ein, wobei

$$\varphi'(t) = 2ie^{2it}, \quad \varphi''(t) = -4e^{2it}$$

gilt:

$$\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = -4e^{2it} + 2ie^{2it} - 2e^{2it} = (-6 + 2i)\, e^{2it}.$$

Daher gilt für

$$\varphi(t) = \frac{1}{-6 + 2i}e^{2it}$$

$$\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = e^{2it} = \cos(2t) + i\sin(2t).$$

Der Realteil von φ ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung. Daher berechnen wir den Realteil:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{-6 + 2i}e^{2it} = (-\frac{3}{20} - \frac{1}{20}i)(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \\ &= \left(-\frac{3}{20}\cos(2t) + \frac{1}{20}\sin(2t)\right) + i \cdot \left(\ldots\right). \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi_s(t) = -\frac{3}{20}\cos(2t) + \frac{1}{20}\sin(2t)$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

(4) Nun betrachten wir die inhomogene Differentialgleichung

$$x'' + x' - 2x = e^{-2t}.$$

Ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$\varphi_1(t) = e^{-2t}, \quad \varphi_2(t) = e^t.$$

Wir versuchen es daher mit $\varphi(t) = te^{-2t}$: Es ist

$$\varphi'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t} = (1-2t)e^{-2t}, \quad \varphi''(t) = -2e^{-2t} + (1-2t)\cdot(-2)e^{-2t} = (4t-4)e^{2t}.$$

Damit erhalten wir

$$\varphi''(t) + \varphi'(t) - 2\varphi(t) = (4t-4)e^{-2t} + (1-2t)e^{-2t} - 2te^{-2t} = -3e^{-2t}.$$

Daher ist

$$\varphi_s(t) = -\frac{1}{3}te^{-2t}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

Es gilt folgender Satz:

Satz. *Seien $p, q \in \mathbb{R}$ und $\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$ das charakteristische Polynom der Differentialgleichung*

$$x'' + px' + qx = 0.$$

Dann gilt für $\mu \in \mathbb{C}$ und $\varphi(t) = e^{\mu t}$:

$$\varphi''(t) + p\varphi'(t) + q\varphi(t) = \begin{cases} \chi(\mu)\cdot e^{\mu t} & \text{für } \varphi(t) = e^{\mu t}, \\ (\chi(\mu)t + \chi'(\mu))\cdot e^{\mu t} & \text{für } \varphi(t) = t\cdot e^{\mu t}, \\ (\chi(\mu)t^2 + 2\chi'(\mu)t + \chi''(\mu))\cdot e^{\mu t} & \text{für } \varphi(t) = t^2\cdot e^{\mu t}. \end{cases}$$

Definiert man also

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\chi(\mu)}\cdot e^{\mu t} & \text{im Fall } \chi(\mu) \neq 0, \\ \frac{1}{\chi'(\mu)}\cdot t\cdot e^{\mu t} & \text{im Fall } \chi(\mu) = 0, \chi'(\mu) \neq 0, \\ \frac{1}{\chi''(\mu)}\cdot t^2\cdot e^{\mu t} & \text{im Fall } \chi(\mu) = \chi'(\mu) = 0, \chi''(\mu) \neq 0, \end{cases}$$

so gilt

$$\psi''(t) + p\psi'(t) + q\psi(t) = e^{\mu t}.$$

Beweis:

(1) Für $\varphi(t) = e^{\mu t}$ gilt

$$\varphi'(t) = \mu e^{\mu t}, \quad \varphi''(t) = \mu^2 e^{\mu t}$$

und damit

$$\varphi''(t) + p\varphi'(t) + q\varphi(t) = (\mu^2 + p\mu + q)\cdot e^{\mu t} = \chi(\mu)\cdot e^{\mu t}.$$

(2) Für $\varphi(t) = t\cdot e^{\mu t}$ gilt

$$\varphi'(t) = e^{\mu t} + \mu t\cdot e^{\mu t} = (1+\mu t)e^{\mu t}, \quad \varphi''(t) = \mu e^{\mu t} + \mu(1+\mu t)e^{\mu t} = (2\mu + \mu^2 t)e^{\mu t},$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + p\varphi'(t) + q\varphi(t) &= \Big((2\mu + \mu^2 t) + p(1+\mu t) + qt\Big)e^{\mu t} = \\ &= \Big((\mu^2 + p\mu + q)t + (2\mu + p)\Big)e^{\mu t} = \\ &= \Big(\chi(\mu)t + \chi'(\mu)\Big)e^{\mu t}. \end{aligned}$$

(3) Für $\varphi(t) = t^2 \cdot e^{\mu t}$ gilt

$$\varphi'(t) = \left(2t + \mu t^2\right) e^{\mu t}, \quad \varphi''(t) = \left(2 + 2\mu t + 2\mu t + \mu^2 t^2\right) e^{\mu t} = (2 + 4\mu t + \mu^2 t^2) e^{\mu t},$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + p\varphi'(t) + q\varphi(t) &= \Big((2 + 4\mu t + \mu^2 t^2) + p(2t + \mu t^2) + qt^2\Big) e^{\mu t} = \\ &= \Big((\mu^2 + p\mu + q)t^2 + (4\mu + 2p)t + 2\Big) e^{\mu t} = \\ &= \Big(\chi(\mu)t^2 + 2\chi'(\mu)t + \chi''(\mu)\Big) e^{\mu t}. \end{aligned}$$

(4) Der Rest folgt sofort. ■

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' + 5x' + 6x = e^{2t}.$$

Das charakteristische Polynom (der homogenen) Gleichung ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6.$$

Nun ist

$$\chi(2) = 4 + 10 + 6 = 20 \neq 0,$$

also ist

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{20} e^{2t}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.

(2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' + 5x' + 6x = \sin(2t).$$

Wegen

$$\sin(2t) = \operatorname{Im}\left(e^{2it}\right)$$

suchen wir zunächst eine Lösung für

$$x'' + 5x' + 6x = e^{2it}$$

und nehmen dann den Imaginärteil. Für das charakteristische Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ gilt

$$\chi(2i) = -4 + 10i + 6 = 2 + 10i.$$

Daher löst

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{2 + 10i} e^{2it} = \left(\frac{1}{52} - \frac{5}{52} i\right)(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \\ &= \Big(\frac{1}{52}\cos(2t) + \frac{5}{52}\sin(2t)\Big) + i\Big(\frac{1}{52}\sin(2t) - \frac{5}{52}\cos(2t)\Big) \end{aligned}$$

die Gleichung $x'' + 5x' + 6x = e^{2it}$. Folglich ist

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{52}\sin(2t) - \frac{5}{52}\cos(2t)$$

eine spezielle Lösung der ursprünglichen Gleichung.

(3) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x'' - 5x' + 6x = e^{2t}.$$

Das charakteristische Polynom (der homogenen) Gleichung ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

Nun ist

$$\chi(2) = 4 - 10 + 6 = 0.$$

Wir bilden $\chi'(\lambda) = 2\lambda - 5$. Es ist

$$\chi'(2) = -1.$$

Der Satz liefert, dass
$$\varphi_s(t) = -t \cdot e^{2t}$$
eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist.

(4) Wir betrachten die Differentialgleichung
$$x'' - 2x' + 5x = e^t \cos(2t).$$
Die rechte Seite schreiben wir als Realteil:
$$e^t \cos(2t) = \operatorname{Re}(e^t \cdot e^{2it}) = \operatorname{Re}(e^{(1+2i)t}).$$
Wir betrachten daher zunächst die Gleichung
$$x'' - 2x' + 5x = e^{(1+2i)t}.$$
Das charakteristische Polynom ist
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 \quad \text{und} \quad \chi'(\lambda) = 2\lambda - 2.$$
Nun ist
$$\chi(1+2i) = 0, \quad \chi'(1+2i) = 4i \neq 0.$$
Daher löst
$$\varphi(t) = \frac{1}{4i} te^{(1+2i)t} = -\frac{1}{4} i \cdot t \cdot e^t(\cos(2t) + i\sin(2t)) = \frac{1}{4} te^t \sin(2t) - \frac{1}{4} te^t \cos(2t) i$$
die Gleichung $x'' - 2x' + 5x = e^{(1+2i)t}$. Also ist
$$\varphi_s(t) = \frac{1}{4} te^t \sin(2t)$$
eine spezielle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

(5) Wir betrachten die Differentialgleichung
$$x'' - 4x' + 4x = e^{2t}.$$
Das charakteristische Polynom ist
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 \quad \text{und} \quad \chi'(\lambda = 2\lambda - 4, \quad \chi''(\lambda) = 2.$$
Wegen
$$\chi(2) = 0, \quad \chi'(2) = 0, \quad \chi''(\lambda) = 2 \neq 0$$
sagt der Satz, dass
$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2} t^2 \cdot e^{2t}$$
eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist.

Der folgende Satz verallgemeinert den letzten Satz auf rechte Seiten der Form
$$r(t) = f(t)e^{\mu t},$$
wo nun $f(t)$ ein Polynom ist: $f(t) = f_0 t^d + f_1 t^{d-1} + \cdots + f_d$. Allerdings gibt der Satz keine Lösung an, nur einen Lösungsansatz.

Satz. *Gegeben sei die Differentialgleichung (mit konstanten Koeffizienten p, q)*
$$x'' + px' + qx = f(t)e^{\mu t},$$
wobei $f(t) = f_0 t^d + f_1 t^{d-1} + \cdots + f_{d-1} t + f_d$ ein Polynom vom Grad $\leq d$ ist. Sei
$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + q$$
das charakteristische Polynom und m die Nullstellenvielfachheit von μ in $\chi(\lambda)$, d.h.
$$m = \begin{cases} 0, & \text{falls } \chi(\mu) \neq 0, \\ 1, & \text{falls } \chi(\mu) = 0 \text{ und } \chi'(\mu) \neq 0, \\ 2, & \text{falls } \chi(\mu) = 0 \text{ und } \chi'(\mu) = 0. \end{cases}$$

Dann hat die Differentialgleichung eine spezielle Lösung φ_s der Gestalt

$$\varphi_s(t) = t^m \cdot g(t) \cdot e^{\mu t},$$

wobei $g(t) = g_0 t^d + g_1 t^{d-1} + \cdots + g_{d-t} t + g_d$ ein Polynom vom Grad $\leq d$ ist.

Beweisidee: Wir skizzieren nur beispielhaft die Vorgehensweise.

(1) Wir betrachten den Fall $m = 0$ und $\operatorname{grad}(f) \leq 2$. Dann ist also $\chi(\mu) = \mu^2 + p\mu + q \neq 0$ und $f = f_0 t^2 + f_1 t + f_2$. Wir setzen an $g = g_0 t^2 + g_1 t + g_2$ und

$$\varphi_s(t) = g(t) \cdot e^{\mu t}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \varphi_s(t) &= g(t) \cdot e^{\mu t}, \\ \varphi_s'(t) &= g'(t) \cdot e^{\mu t} + \mu \cdot g(t) \cdot e^{\mu t}, \\ \varphi_s''(t) &= g''(t) \cdot e^{\mu t} + 2\mu \cdot g'(t) \cdot e^{\mu t} + \mu^2 \cdot g(t) \cdot e^{\mu t}, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \varphi_s''(t) + p\varphi_s'(t) + q\varphi_s(t) &= \Big(g(t) \cdot (\mu^2 + p\mu + q) + g'(t) \cdot (2\mu + p) + g''(t)\Big) \cdot e^{\mu t} = \\ &= \Big(g(t) \cdot \chi(\mu) + g'(t) \cdot \chi'(\mu) + g''(t)\Big) \cdot e^{\mu t} = \\ &= \Big((g_0 t^2 + g_1 t + g_2) \cdot \chi(\mu) + (2g_0 t + g_1) \cdot \chi'(\mu) + 2g_0\Big) \cdot e^{\mu t} = \\ &= \Big(\chi(\mu) g_0 t^2 + (\chi(\mu) g_1 + 2\chi'(\mu) g_0) t + (\chi(\mu) g_2 + \chi'(\mu) g_1 + 2g_0)\Big) \cdot e^{\mu t}. \end{aligned}$$

Nun soll gelten

$$\varphi_s''(t) + p\varphi_s'(t) + q\varphi_s(t) = (f_0 t^2 + f_1 t + f_2) \cdot e^{\mu t}.$$

Dividiert man die rechten Seiten durch $e^{\mu t}$ und macht dann Koeffizientenvergleich, so erhält man:

$$\begin{aligned} \varphi_s''(t) + p\varphi_s'(t) + q\varphi_s(t) = f(t) \cdot e^{\mu t} \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\chi(\mu) g_0 = f_0, \\ &\chi(\mu) g_1 + 2\chi'(\mu) g_0 = f_1, \\ &\chi(\mu) g_2 + \chi'(\mu) g_1 + 2g_0 = f_2 \quad \Longleftrightarrow \end{aligned} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \chi(\mu) & 0 & 0 \\ 2\chi'(\mu) & \chi(\mu) & 0 \\ 2 & \chi'(\mu) & \chi(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $\chi(\mu) \neq 0$ ist das letzte Gleichungssystem nach g_0, g_1, g_2 auflösbar, der angegebene Ansatz hat also Erfolg.

(2) Den Allgemeinfall findet man beispielsweise im Analysis-2-Buch von Forster (11. Auflage) auf den Seiten 221-224. ■

Harmonischer Oszillator - erzwungene Schwingungen: Wir betrachten den Fall, dass auf unseren Oszillator eine periodische äußere Kraft der Größe

$$\cos(\beta t) = \operatorname{Re}\left(e^{i\beta t}\right)$$

(mit $\beta > 0$) einwirkt. Dann wird die frühere Differentialgleichung $x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = 0$ zu

$$x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = \cos(\beta t) \quad \text{bzw.} \quad x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = e^{i\beta t}.$$

Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2.$$

Um einen passenden Ansatz für eine spezielle Lösung zu erhalten, schauen wir $\chi(i\beta)$ an: Es ist

$$\chi(i\beta) = (i\beta)^2 + 2\mu \cdot i\beta + \omega_0^2 = (\omega_0^2 - \beta^2) + 2\mu\beta \cdot i.$$

(1) **Fall $\mu \neq 0$ oder $\beta \neq \omega_0$:** Dann ist $\chi(i\beta) \neq 0$. Eine spezielle Lösung von $x'' + 2\mu x' + \omega_0^2 x = e^{i\beta t}$ ist dann

$$\varphi(t) = \frac{1}{\chi(i\beta)} e^{i\beta t}$$

und

$$\varphi_s(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\chi(i\beta)} e^{i\beta}\right)$$

eine spezielle Lösung von $x'' + 2\mu x + \omega_0^2 x = \cos(\beta t)$. Es ist klar, dass $\varphi_s(t)$ die Gestalt

$$\varphi_s(t) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$$

hat.

(2) **Fall $\mu = 0$ und $\beta = \omega_0$:** Hier ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + \omega_0^2$, $\chi'(\lambda) = 2\lambda$, also

$$\chi(i\beta) = 0 \quad \text{und} \quad \chi'(i\beta) = 2i\beta \neq 0.$$

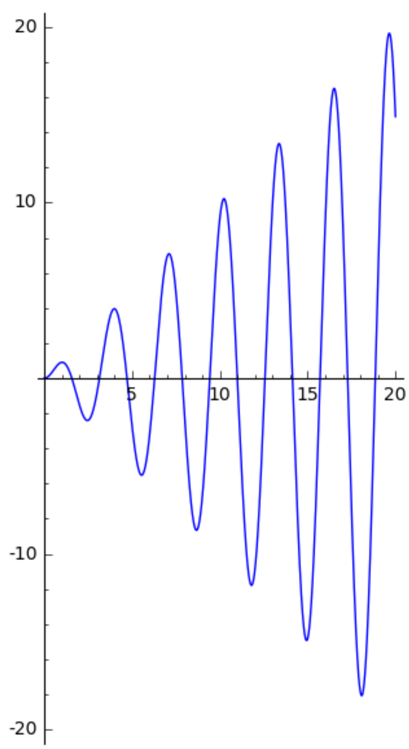
Eine spezielle Lösung von $x'' + \omega_0^2 x = e^{i\omega_0 t}$ ist

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\chi'(\omega_0)} t e^{i\omega_0 t} = \frac{1}{2i\omega_0} t\Big(\cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)\Big) = \\ &= \frac{1}{2\omega_0} t\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{2\omega_0} t\cos(\omega_0 t) i, \end{aligned}$$

sodass wir für $x'' + \omega_0^2 x = \cos(\omega_0 t)$ die spezielle Lösung

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2\omega_0} t\sin(\omega_0 t)$$

erhalten.



Die allgemeine Lösung ist dann

$$x(t) = c_1\cos(\omega_0 t) + c_2\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2\omega_0} t\sin(\omega_0 t).$$

Die Lösung ist nicht mehr beschränkt. Man spricht hier vom **Resonanzfall**.

4. Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung - allgemein

Was wir zuvor für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung gemacht haben, funktioniert ähnlich für lineare Differentialgleichungen der Ordnung $n \geq 2$. Zur Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $n \in \mathbb{N}$. Seien $a_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$ und $b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = b(t)$$

eine **(inhomogene) lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Die Gleichung

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

nennt man die zugehörige **homogene lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung**.
Ein **Anfangswertproblem** ergibt sich, wenn zu vorgegebenen Zahlen $t_0 \in I$ und $x_0, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ Lösungen der Differentialgleichung sucht, die zusätzlich die Bedingungen

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \ldots \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

erfüllen.

Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und seien $a_1, \ldots, a_n, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.*

(1) *Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller (auf ganz I) definierten Lösungen der homogenen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0,$$

d.h.

$$\mathcal{L} = \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\varphi'(t) + a_n(t)\varphi(t) = 0\}.$$

Dann gilt:

(a) *$\mathcal{L}$ ist ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.*

(b) *Ein n-Tupel $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{L}$ von Lösungen der homogenen Gleichung ist genau dann linear unabhängig (und damit eine Basis von $\mathcal{L}$), wenn für ein und damit für alle $t \in I$ die* **Wronski-Determinate**

$$W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

von 0 verschieden ist. (Man nennt dann $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein **Lösungsfundamentalsystem***.)*

(2) *Sei $\widetilde{\mathcal{L}}$ die Menge aller Lösungen $\varphi : I \to \mathbb{R}$ der inhomogenen Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t) = b(t),$$

d.h.

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \{\varphi : I \to \mathbb{R} : \varphi^{(n)}(t) + a_1(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1}(t)\varphi'(t) + a_n(t)\varphi(t) = b(t)\}.$$

Dann gilt:

(a) *Ist φ_s eine Lösung der inhomogenen Gleichung, d.h. $\varphi_s \in \widetilde{\mathcal{L}}$, so gilt*

$$\widetilde{\mathcal{L}} = \varphi_s + \mathcal{L} = \{\varphi_s + \varphi : \varphi \in \mathcal{L}\}.$$

(Man nennt dann auch φ_s eine **spezielle Lösung** *der inhomogenen Differentialgleichung.*

(b) *Anders formuliert: Ist φ_s eine (spezielle) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung und ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung, so ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$\varphi_s + c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \text{ mit } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

(c) *Jedes Anfangswertproblem ist eindeutig lösbar, d.h. für $t_0 \in I$ und $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat das System von Gleichungen*

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0$$

und

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$

eine eindeutige Lösung.

Ein Beweis des Satzes ist im Analysis-2-Buch von Forster in §13 zu finden.

Bemerkung: Bei den betrachteten linearen Differentialgleichungen sind die Lösungen immer auf dem gesamten Definitionsintervall der Differentialgleichung definiert.

Nun betrachten wir homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0,$$

wobei $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind. Das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung wird definiert als

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $\chi(\lambda)$, so erfüllt

$$\varphi(t) = e^{\lambda t}$$

die Differentialgleichung. Im Fall $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ erhält man daraus die reellen Lösungen

$$\mathrm{Re}\,(e^{\lambda t}) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,(e^{\lambda t}).$$

Allgemein gilt folgender Satz:

Satz. *Seien $a_1, \ldots, a_n$ reelle Zahlen, sei*

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = 0$$

eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten und

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

das zugehörige charakteristische Polynom. Seien

- *$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ die (verschiedenen) reellen Nullstellen von $\chi(\lambda)$ mit Multiplizitäten $m_1, \ldots, m_r$,*
- *$\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_s + i\beta_i, \alpha_s - i\beta_s$ die (verschiedenen) nichtreellen Nullstellen von $\chi(\lambda)$ mit Multiplizitäten $n_1, \ldots, n_s$,*

sodass also gilt

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) \quad = \quad & (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{m_r} \cdot \\ & \cdot \quad (\lambda - (\alpha_1 + i\beta_1))^{n_1}(\lambda - (\alpha_1 - i\beta_1))^{n_1} \ldots (\lambda - (\alpha_s + i\beta_s))^{n_s}(\lambda - (\alpha_s - i\beta_s))^{n_s}.\end{aligned}$$

Dann bilden die folgenden Funktionen zusammen ein Lösungsfundamentalsystem der Differentialgleichung:

- *Für $k = 1, \ldots, r$*

$$e^{\lambda_k t}, \quad te^{\lambda_k t}, \quad \ldots, \quad t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}.$$

- *Für $l = 1, \ldots, s$*

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha_l t}\cos(\beta_l t), & e^{\alpha_l t}\sin(\beta_l t), \\ te^{\alpha_l t}\cos(\beta_l t), & te^{\alpha_l t}\sin(\beta_l t), \\ \vdots & \vdots \\ t^{n_l-1}e^{\alpha_l t}\cos(\beta_l t), & t^{n_l-1}e^{\alpha_l t}\sin(\beta_l t). \end{array}$$

Beispiele:

(1) Die homogene lineare Differentialgleichung
$$x''' + 6x'' + 12x' + 8x = 0$$
hat das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 12\lambda + 8 = (\lambda + 2)^3$$
mit der 3-fachen Nullstelle -2. Also bilden die Funktionen
$$\varphi_1(t) = e^{-2t}, \varphi_2(t) = te^{-2t}, \varphi_3(t) = t^2 e^{-2t}$$
eine Basis des Lösungsraums.

(2) Die homogene lineare Differentialgleichung
$$x^{(4)} + 6x'' + 9x = 0$$
hat das charakteristische Polynom
$$\chi(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^2 + 9 = (\lambda^2 + 3)^2 = (\lambda - \sqrt{3}i)^2(\lambda + \sqrt{3}i)^2.$$
Eine Basis des Lösungsraums bilden also die Funktion
$$\cos(\sqrt{3}t), \sin(\sqrt{3}t), t\cos(\sqrt{3}t), t\sin(\sqrt{3}t)$$

Wir betrachten nun (inhomogene) lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = b(t).$$
Dabei darf die rechte Seite eine Funktion von t sein, obwohl man von einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten spricht. Um die allgemeine Lösung zu bestimmen, geht man (normalerweise) wie folgt vor:

- Man bestimmt ein Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ der zugehörigen homogenen Gleichung.
- Man bestimmt eine (spezielle) Lösung φ_s der inhomogenen Gleichung.

Dann ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung
$$\varphi_s + c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \text{ mit } c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, beschränken wir uns auf besondere Funktionenklassen für die rechte Seite $b(t)$.

Die Aussage des folgenden Lemmas ist sofort klar, für Anwendungen aber hilfreich.

LEMMA. *Löst $\psi_1(t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung*
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = b_1(t)$$
und $\psi_2(t)$ die inhomogene lineare Differentialgleichung
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = b_2(t),$$
sind $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, so löst $c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t)$ die Differentialgleichung
$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = c_1 b_1(t) + c_2 b_2(t).$$

Fall: $b(t)$ ist ein Polynom: Dann sucht man nach einer speziellen Lösung φ_s, die ein Polynom ist. (Später folgt ein Satz, der den Ansatz genauer beschreibt.)

Fall $b(t) = e^{\mu t}$: Dabei darf μ auch eine komplexe Zahl sein, denn dadurch werden auch die Fälle
$$e^{\alpha t}\cos(\beta t) = \mathrm{Re}\,(e^{(\alpha+i\beta)t}) \quad \text{und} \quad e^{\alpha t}\sin(\beta t) = \mathrm{Im}\,(e^{(\alpha+i\beta)t})$$
abgedeckt. Der folgende Satz liefert eine Lösungsformel:

Satz. *Wir betrachten für $\mu \in \mathbb{C}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die lineare Differentialgleichung*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = e^{\mu t}.$$

Sei

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

das charakteristische Polynom der Differentialgleichung. Bestimme $k \in \mathbb{N}_0$ mit

$$\chi(\mu) = 0, \quad \chi'(\mu) = 0, \quad \ldots, \chi^{(k-1)}(\mu) = 0, \quad \chi^{(k)}(\mu) \neq 0,$$

oder anders ausgedrückt:

$$\chi^{(k)}(\mu) \neq 0 \text{ und } \chi^{(j)}(\mu) = 0 \text{ für alle } j \text{ mit } 0 \leq j \leq k-1.$$

Dann ist

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{\chi^{(k)}(\mu)} \cdot t^k \cdot e^{\mu t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Eine Beweisskizze findet sich im Anhang.

Beispiele: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''' - 3x' + 2x = b(t)$$

für verschiedene Funktionen $b(t)$. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

mit den Ableitungen

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 3, \quad \chi''(\lambda) = 6\lambda, \quad \chi'''(\lambda) = 6.$$

Die Funktionen

$$e^t, te^t, e^{-2t}$$

bilden also ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung.

(1) $b(t) = e^{-t}$. Hier ist $\mu = -1$. Wegen

$$\chi(-1) = 4 \neq 0$$

ist

$$\frac{1}{4}e^{-t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(2) $b(t) = e^{-2t}$. Hier ist $\mu = -2$. Es gilt

$$\chi(-2) = 0, \quad \chi'(-2) = 9 \neq 0.$$

Daher ist

$$\frac{1}{9} \cdot t \cdot e^{-2t}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(3) $b(t) = e^t$. Hier ist $\mu = 1$ und

$$\chi(1) = 0, \quad \chi'(1) = 0, \quad \chi''(1) = 6,$$

also ist

$$\frac{1}{6} \cdot t^2 \cdot e^t$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

(4) $b(t) = 1$. Für die konstante Funktion 1 gilt

$$1''' - 3 \cdot 1' + 2 \cdot 1 = 2.$$

Daher löst die konstante Funktion

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{2}$$

die Differentialgleichung

$$x''' - 3x' + 2x = 1.$$

(Natürlich könnte man auch den vorangegangenen Satz mit $\mu = 0$ anwenden.)

(5) $b(t) = t$. Für die Funktion t gilt

$$t''' - 3t' + 2t = 2t - 3.$$

Mit Hilfe der vorangegangenen Lösung findet man dann eine Lösung für dieses Problem. Wir wollen aber noch eine andere Methode versuchen: Wir setzen an $g(t) = g_0 + g_1 t$ mit Konstanten g_0, g_1. Man erhält

$$g'''(t) - 3g'(t) + 2g(t) = (2g_0 - 3g_1) + 2g_1 t.$$

Ist $2g_0 - 3g_1 = 0$ und $2g_1 = 1$, also $g_1 = \frac{1}{2}$ und $g_0 = \frac{3}{4}$, so erhalten wir die gewünschte Lösung: Die Funktion

$$g(t) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}t$$

ist eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

$$x''' - 3x' + 2x = t.$$

Bemerkung: Mit den vorangegangenen Methoden können wir auch Differentialgleichungen

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = b(t)$$

behandeln, wobei $b(t)$ die Gestalt

$$b(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t) \text{ oder } b(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

hat (mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$). Man schreibt

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) = \operatorname{Re}(e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t}) = \operatorname{Re}(e^{(\alpha + i\beta)t})$$

bzw.

$$e^{\alpha t} \sin(\beta t) = \operatorname{Im}(e^{\alpha t} \cdot e^{i\beta t}) = \operatorname{Im}(e^{(\alpha + i\beta)t}),$$

bestimmt eine spezielle Lösung $\varphi_0(x)$ der Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + a_2 x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = e^{(\alpha + i\beta)t}$$

und geht dann zurück zu

$$\operatorname{Re}(\varphi_0(t)) \text{ bzw. } \operatorname{Im}(\varphi_0(t)).$$

Beispiele:

(1) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''' - 2x'' - 2x' + x = \sin t.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda - \frac{3 + \sqrt{5}}{2})(\lambda - \frac{3 - \sqrt{5}}{2}).$$

Daher bilden die Funktionen

$$e^{-t}, \quad e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}, \quad e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$$

ein Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung. Zur Bestimmung einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung schreiben wir

$$\sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it})$$

und suchen zunächst eine spezielle Lösung der Gleichung

$$y''' - 2y'' - 2y' + y = e^{it}.$$

Hier ist also $\mu = i$. Es ist

$$\chi(i) = 3 - 3i \neq 0.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= = \frac{1}{3-3i} \cdot e^{it} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i) \cdot e^{it} = (\frac{1}{6} + \frac{1}{6}i) \cdot (\cos(t) + i\sin(t)) = \\ &= \Big(\frac{1}{6}\cos(t) - \frac{1}{6}\sin(t)\Big) + i\Big(\frac{1}{6}\cos(t) + \frac{1}{6}\sin(t)\Big) \end{aligned}$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Der Imaginärteil bildet daher eine spezielle Lösung unserer ursprünglichen Differentialgleichung:

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{6}(\cos t + \sin t).$$

(2) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x''' - 2x'' + x' = 1 + e^t \cos 2t.$$

- Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung ist

  $$\chi(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda - 1)^2.$$

  Daher bildet

  $$1, \quad e^t, \quad te^t$$

  ein Lösungsfundamentalsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung.
- Zunächst suchen wir eine spezielle Lösung der Differentialgleichung

  $$y''' - 2y'' + y' = 1.$$

  Wegen $1 = e^{0\cdot t}$ können wir hier $\mu = 0$ wählen. Wegen $\chi(0) = 0$ brauchen wir $\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 4\lambda + 1$ und $\chi'(0) = 1$. Daher ist

  $$\varphi_{s,1} = \frac{1}{\chi'(0)} \cdot t \cdot e^{\mu t} = t$$

  eine Lösung der Differentialgleichung.
- Nun betrachten wir

  $$x''' - 2x'' + x' = e^t \cos 2t.$$

  Wegen

  $$e^t \cos 2t = \mathrm{Re}\,(e^t \cdot e^{2it}) = \mathrm{Re}\,(e^{(1+2i)t})$$

  suchen wir zunächst nach einer speziellen Lösung der Differentialgleichung

  $$x''' - 2x'' + x' = e^{(1+2i)t}.$$

  Wegen $\chi(1+2i) = -4 - 8i \neq 0$ ist

  $$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{1}{\chi(1+2i)} \cdot e^{(1+2i)t} = \frac{1}{-4-8i} \cdot e^{(1+2i)t} = \\ &= \Big(-\frac{1}{20} + \frac{1}{10}i\Big) \cdot \Big(e^t \cos(2t) + ie^t \sin(2t)\Big) = \\ &= \Big(-\frac{1}{20}e^t \cos(2t) - \frac{1}{10}e^t \sin(2t)\Big) + i\Big(\frac{1}{10}e^t \cos(2t) - \frac{1}{20}e^t \sin(2t)\Big) \end{aligned}$$

  ist eine Lösung der letzten Differentialgleichung, daher

  $$\varphi_{s,2}(t) = -\frac{1}{20}e^t \cos(2t) - \frac{1}{10}e^t \sin(2t)$$

  eine spezielle Lösung der ursprünglichen Gleichung.

- Insgesamt erhalten wir, dass
$$\varphi_s(t) = \varphi_{s,1}(t) + \varphi_{s,2}(t) = t - \frac{1}{20}e^t(\cos(2t) + 2\sin(2t))$$
eine spezielle Lösung der Differentialgleichung
$$x''' - 2x'' + x' = 1 + e^t \cos(2t)$$
ist.

Die Phänomene der vorangegangenen Beispiele verallgemeinern sich wie folgt (Forster 2, §15, Satz 3, S.221 und Satz 4, S.223):

Satz. *Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{C}$ und $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad d. Sei*
$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$
das charakteristische Polynom der Differentialgleichung
$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + a_2x^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_nx = f(t)e^{\mu t}.$$
Sei m die Nullstellenvielfachheit von μ bezüglich des Polynoms $\chi(\lambda)$, d.h.
$$\chi(\lambda) = (\lambda - \mu)^m \cdot h(\lambda) \text{ mit } h \in \mathbb{C}[\lambda] \text{ und } h(\mu) \neq 0.$$
Dann besitzt obige Differentialgleichung eine spezielle Lösung der Gestalt
$$\varphi_s(t) = g(t) \cdot t^m \cdot e^{\mu t},$$
wobei $g(t)$ ein Polynom vom Grad d ist. (Man erhält dann eine Lösung, indem man $g(t)$ mit unbekannten Koeffizienten ansetzt und in die Differentialgleichung einsetzt.)

Beispiel: Wir wollen die Differentialgleichung
$$x^{(4)} - 2x''' + 2x' - x = t^2e^t$$
lösen. Das charakteristische Polynom ist
$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1).$$
Daher bilden
$$e^t, te^t, t^2e^t, e^{-t}$$
eine Lösungsfundamentalsystem der homogenen Gleichung. Mit den Formeln des Satzes haben wir $f(t) = t^2$ und $\mu = 1$. Nun ist die Nullstellenordnung von μ in $\chi(\lambda)$ gleich 3, d.h. $m = 3$. Wir sollten also eine spezielle Lösung der Differentialgleichung durch den Ansatz
$$\varphi_s(t) = t^3 \cdot (g_0 + g_1t + g_2t^2) \cdot e^t$$
finden. Wir setzen in die Differentialgleichung ein und erhalten:
$$\varphi_s^{(4)}(t) - 2\varphi_s'''(t) + 2\varphi_s'(t) - \varphi_s(t) = \Big(12(g_0 + 2g_1) + 24(2g_1 + 5g_2)t + 120g_2t^2\Big)e^t.$$
Dies führt zum Gleichungssystem
$$g_0 + 2g_1 = 0, \quad 2g_1 + 5g_2 = 0, \quad 120g_2 = 1,$$
das die Lösung
$$g_0 = \frac{1}{24}, \quad g_1 = -\frac{1}{48}, \quad g_2 = \frac{1}{120}$$
besitzt. Daher ist
$$\varphi_s(t) = (\frac{1}{24} - \frac{1}{48}t + \frac{1}{120}t^2) \cdot t^3 \cdot e^t$$
eine spezielle Lösung der (inhomogenen) Differentialgleichung.

5. Anhang: Differentialoperatoren

Wir schreiben die Ableitungen hier in der Form

$$D = \frac{d}{dt}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dt^2}, \quad D^3 = \frac{d^3}{dt^3}, \quad \dots$$

Jedes Polynom

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \in \mathbb{C}[\lambda]$$

definiert eine lineare Abbildung

$$f(D) : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi \mapsto a_n D^n(\varphi) + a_1 D^{n-1}(\varphi) + \cdots + a_1 D(\varphi) + a_n\varphi,$$

wo $C^\infty(\mathbb{R})$ die auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbaren (komplexwertigen) Funktionen bezeichnet.

Beispiel: Wir betrachten die Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x' + a_n x = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

Mit obiger Notation schreibt sich die Differentialgleichung dann in der Form

$$\chi(D)(x) = 0.$$

Polynome $f, g \in \mathbb{C}[\lambda]$ kann man addieren und multiplizieren. Nun kann man zeigen, dass gilt

$$(f+g)(D) = f(D) + g(D) \quad \text{und} \quad (fg)(D) = f(D)g(D),$$

wobei $f(D)g(D) = f(D) \circ g(D)$ meint.

Beispiele:

(1) Für $\mu, \widetilde{\mu} \in \mathbb{C}$ mit $\mu \neq \widetilde{\mu}$ gilt

$$(D - \widetilde{\mu})\left(e^{\mu t}\right) = (\mu - \widetilde{\mu})e^{\mu t}.$$

(2) Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\mu \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}
(D-\mu)(t^k \cdot e^{\mu t}) &= kt^{k-1} \cdot e^{\mu t} + t^k \cdot \mu e^{\mu t} - \mu \cdot t^k \cdot e^{\mu t} = kt^{k-1} \cdot e^{\mu t}, \\
(D-\mu)^2(t^k \cdot e^{\mu t}) &= k(k-1) \cdot t^{k-2} \cdot e^{\mu t}, \\
&\vdots \\
(D-\mu)^k(t^k \cdot e^{\mu t}) &= k! \cdot e^{\mu t}.
\end{aligned}$$

Wir können nun folgenden Satz beweisen:

Satz. *Sei $\chi \in \mathbb{C}[\lambda]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$ und μ eine k-fache Nullstelle von χ mit $k \in \mathbb{N}_0$, d.h.*

$$\chi^{(k)}(\mu) \neq 0 \text{ und } \chi^{(j)}(\mu) = 0 \text{ für } 0 \leq j \leq k-1.$$

Dann gilt:

$$\chi(D)\left(\frac{1}{\chi^{(k)}(\mu)} \cdot t^k \cdot e^{\mu t}\right) = e^{\mu t}.$$

Beweis: Über $\mathbb{C}$ können wir χ in Linearfaktoren zerlegen:

$$\chi(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)\dots(\lambda - \lambda_r)(\lambda - \mu)^k \text{ mit } c, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}.$$

Dann gilt unter Verwendung der Aussagen in den vorangegangenen Beispielen:

$$\begin{aligned}
\chi(D)(t^k \cdot e^{\mu t}) &= c(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_r)(D-\mu)^k(t^k \cdot e^{\mu t}) = \\
&= c(D-\lambda_1)\dots(D-\lambda_r)(k! \cdot e^{\mu t}) = \\
&= c\,k!(\mu-\lambda_1)\dots(\mu-\lambda_r)e^{\mu t}.
\end{aligned}$$

Wir betrachten die Taylor-Entwicklung in $\lambda = \mu$:

$$\chi(\lambda) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{i!} \chi^{(i)}(\mu) \cdot (\lambda - \mu)^i = \sum_{i \geq k} \frac{\chi^{(i)}(\mu)}{i!} \cdot (\lambda - \mu)^i.$$

Daher ist

$$c(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_r) \cdot (\lambda - \mu)^k = \sum_{i \geq k} \frac{\chi^{(i)}(\mu)}{i!} \cdot (\lambda - \mu)^i.$$

Wir dividieren durch $(\lambda - \mu)^k$ und setzen dann $\lambda = \mu$ ein:

$$c(\mu - \lambda_1) \dots (\mu - \lambda_r) = \frac{\chi^{(k)}(\mu)}{k!}.$$

Damit folgt

$$\chi(D)(t^k \cdot e^{\mu t}) = \chi^{(k)}(\mu) \cdot e^{\mu t},$$

also

$$\chi(D) \left(\frac{1}{\chi^{(k)}(\mu)} \cdot t^k \cdot e^{\mu t} \right) = e^{\mu t},$$

wie behauptet. ■

Anwendung: Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = e^{\mu t}.$$

Ist $\chi(\lambda)$ das charakteristische Polynom der Differentialgleichung und $k \in \mathbb{N}_0$ minimal mit

$$\chi(\mu) = 0, \quad \chi'(\mu) = 0, \quad \dots, \quad \chi^{(k-1)}(\mu) = 0, \quad \chi^{(k)}(\mu) \neq 0,$$

anders ausgedrückt:

$$\chi^{(k)}(\mu) \neq 0 \text{ und } \chi^{(j)}(\mu) = 0 \text{ für } 0 \leq j \leq k-1,$$

so ist

$$\varphi_s(t) = \frac{1}{\chi^{(k)}(\mu)} \cdot t^k \cdot e^{\mu t}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung.