KAPITEL 1

Einführung

Grundlegende Begriffe:

- Eine **Differentialgleichung** (**DGL**) ist eine Gleichung, in der nach einer Funktion gesucht wird, wobei auch Ableitungen der Funktion vorkommen.
- Hängen die betrachteten Funktionen nur von einer Variablen ab, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**. Als Variable werden wir meist t verwenden.
- Hängen die betrachteten Funktionen von mehreren Variablen ab, spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung**.
- Werden mehrere Funktionen gesucht, spricht man von einem **Differentialgleichungssystem**.

Beispiele: Wir geben zunächst ein paar Beispiele für **partielle Differentialgleichungen**, die in der Theoretischen Physik eine wichtige Rolle spielen.

(1) Die Schallausbreitung in einem Gas wird durch die **Wellengleichung**

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - K \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0$$

für die Dichte $\rho(x,t)$ des Gases beschrieben.

(2) Die **Korteweg-de-Vries-Gleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

beschreibt die Ausbreitung von Wasserwellen.

(3) Die zeitabhängige **Schrödinger-Gleichung** lautet in einer Dimension für die (komplexwertige) Wellenfunktion $\psi(x,t)$ mit einem Potential $U(x,t)$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - U\psi = 0.$$

(4) Die **Maxwell-Gleichungen** der Elektrodynamkik lassen sich so schreiben:

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= J + \frac{\partial D}{\partial t}, \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, \\ \nabla \cdot D &= \rho_{\mathrm{el}}, \\ \nabla \cdot B &= 0. \end{aligned}$$

Dabei ist E die elektrische Feldstärke, D die elektrische Verschiebungsdichte, H die magnetische Feldstärke, J die Stromdichte, ρ_{el} die Raumladungsdichte. Die Größen E, D, H und J sind vektorwertige Funktionen, die von Ort und Zeit abhängen. Für eine vektorwertige Funktion $v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ ist

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Datei: al_dgl1.tex. Version vom 15.10.2019

Im Folgenden werden wir uns nicht mit partiellen Differentialgleichungen beschäftigen, sondern uns auf **gewöhnliche Differentialgleichungen** beschränken. Die Variable werden wir meist mit t, manchmal auch mit x bezeichnen, die gesuchte Funktion ist oft $x = x(t)$, manchmal auch anders, je nach Zusammenhang. (Steht die Variable t für die Zeit, so schreibt man für die Ableitung statt $x'(t)$ auch manchmal $\dot{x}(t)$.)

Beispiele:

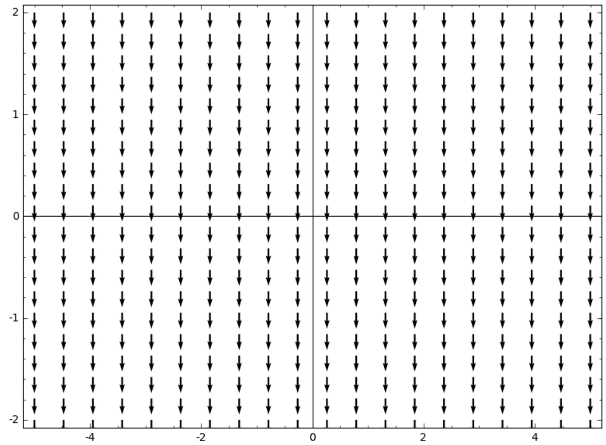
(1)
$$x' = 2t + \cos(t)$$
ist eine Differentialgleichung. Offensichtlich löst
$$x(t) = t^2 + \sin(t) + c$$
für eine beliebige Konstante c die Differentialgleichung.

(2) Ist $f(t)$ eine Funktion, so erhält man die Lösung der DGL
$$x' = f(t)$$
durch Integration:
$$x(t) = \int f(t)dt + c$$
löst die Differentialgleichung. (Das Suchen nach einer Stammfunktion kann man also als Lösen einer Differentialgleichung interpretieren.)

(3) Die Differentialgleichung
$$x' = x$$
wird offensichtlich von der Funktion e^t gelöst. Gibt es weitere Lösungen? Sei $x(t)$ irgendeine Lösung der DGL. Wir definieren
$$y(t) = x(t)e^{-t}, \quad \text{schreiben also} \quad x(t) = y(t)e^t.$$
Dann gilt:
$$x'(t) = x(t) \iff y'(t)e^t + y(t)e^t = y(t)e^t \iff y'(t)e^t = 0 \iff y'(t) = 0.$$
Also ist $y(t) = c$ konstant. Es folgt
$$x(t) = ce^t.$$
Die Lösungen der DGL $x' = x$ sind also
$$x(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}.$$

Wir wollen noch ein Beispiel aus der klassischen Mechanik betrachten. Die **Newton-Gleichungen** für ein Teilchen mit Masse m und Ortsvektor $r(t)$ in einem Kraftfeld F lauten
$$m\frac{d^2}{dt^2}r(t) = F,$$
wobei t die Zeit bezeichnet. („Kraft = Masse × Beschleunigung“)

Beispiel: Wir betrachten einen Körper mit Masse m, der sich in einem konstanten Gravitationsfeld (unter Vernachlässigung von Reibungskräften wie Luftwiderstand) bewegt. Als Variable wählen wir t für die Zeit, die Koordinaten des Punktes seien
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$
wenn wir uns auf die 2-dimensionale Situation beschränken. Das Kraftfeld schreiben wir in der Form
$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$



Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix},$$

also

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -g.$$

Es handelt sich also um ein Differentialgleichungssystem mit zwei Funktionen $x(t), y(t)$, die von der Zeit t abhängen. Integration führt zu

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v_y$$

mit Konstanten v_x, v_y, nochmalige Integration zu

$$x(t) = v_x t + c_x \quad \text{und} \quad y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + c_y$$

mit weiteren Konstanten c_x, c_y. Der Körper bewegt sich also auf der Kurve

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t + c_x \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + c_y \end{pmatrix}.$$

Um die Konstanten v_x, v_y, c_x, c_y festzulegen, benutzen wir **Anfangsbedingungen**: Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix},$$

wobei h hier für Höhe stehen soll. Dann ist

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + h \end{pmatrix}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist

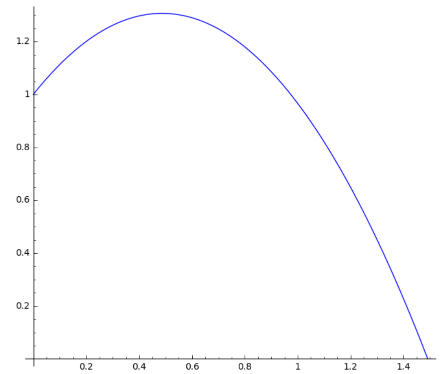
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ -gt + v_y \end{pmatrix}.$$

Die „Anfangsgeschwindigkeit“ ist also

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} (0) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

Legen wir also noch die Anfangsgeschwindigkeit $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ fest, so ist die Lösung eindeutig bestimmt:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ -\frac{1}{2} g t^2 + v_y t + h \end{pmatrix}.$$



Wir stellen uns beispielsweise vor, dass eine Kugel aus dem Stand in Höhe h gestoßen wird. Dazu wollen wir ein paar Fragen stellen und beantworten.

- Zu welchem Zeitpunkt trifft die Kugel auf die x-Achse? (Dabei sei $h \geq 0$ angenommen.) Es gilt

$$y(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + h = 0 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}g)h}}{2 \cdot (-\frac{1}{2}g)} = \frac{-v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{-g} = \frac{v_y \mp \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}.$$

  Da wir nur an einem Zeitpunkt $t \geq 0$ interessiert sind, folgt für den gesuchten Zeitpunkt $\widetilde{t}$

$$\widetilde{t} = \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}.$$

  (Es gilt also $y(\widetilde{t}) = 0$.)
- Wo trifft die Kugel die x-Achse? Hier müssen wir nur $\widetilde{t}$ in $x(t)$ einsetzen und erhalten

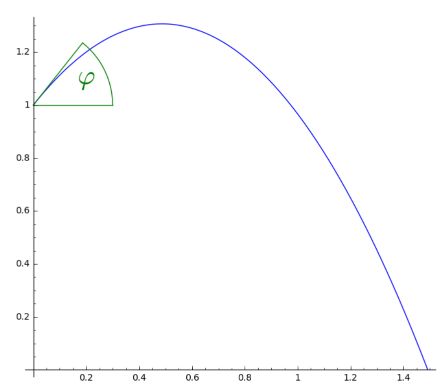
$$x(\widetilde{t}) = v_x \widetilde{t} = v_x \cdot \frac{v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh}}{g}.$$

- Wir nehmen nun an, dass die Kugel mit Geschwindigkeit v im Winkel φ (gegen die x-Achse) losfliegt. Dann ist

$$v_x = v\cos(\varphi), \quad v_y = v\sin(\varphi)$$

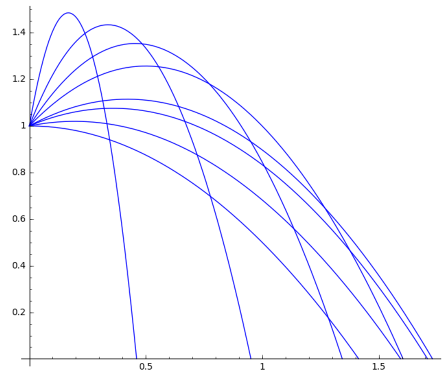
  und es gilt

$$\begin{aligned} x(\widetilde{t}) &= v\cos(\varphi) \cdot \frac{v\sin(\varphi) + \sqrt{v^2\sin(\varphi)^2 + 2gh}}{g} = \\ &= \frac{v^2}{g} \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \frac{2gh}{v^2}}\right). \end{aligned}$$



- Seien nun g, h, v fest gewählt. Wir variieren φ. Sei zur Abkürzung $\lambda = \frac{2gh}{v^2}$ und

$$L(\varphi) = x(\widetilde{t}) = \frac{v^2}{g} \cdot \cos(\varphi) \cdot \left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}\right).$$



Bei welcher Wahl von φ fliegt die Kugel am weitesten? Dazu bestimmen wir die Nullstellen der Ableitung $L'(\varphi)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{g}{v^2} \cdot L'(\varphi) &= -\sin(\varphi) \cdot \left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}\right) + \cos(\varphi) \cdot \left(\cos(\varphi) + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}}\right) = \\
&= -\sin(\varphi)^2 - \sin(\varphi)\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda} + \cos(\varphi)^2 + \frac{\sin(\varphi)\cos(\varphi)^2}{\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\frac{g}{v^2} \cdot \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda} \cdot L'(\varphi) = \\
= \ & (\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)^2)\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda} - \sin(\varphi)\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}^2 + \sin(\varphi)\cos(\varphi)^2 = \\
= \ & \left(\cos(\varphi)^2 - \sin(\varphi)\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}\right) \cdot \left(\sin(\varphi) + \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda}\right).
\end{aligned}$$

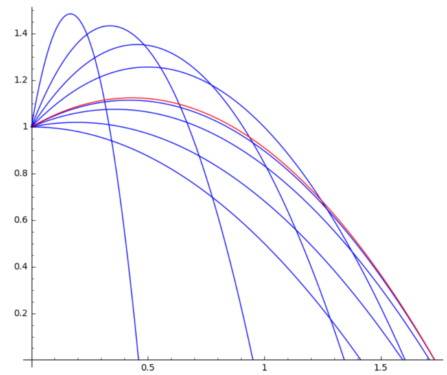
Da im Fall $\lambda > 0$ immer $\sin(\varphi) + \sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda} > 0$ gilt, erhalten wir leicht die Nullstellen von $L'(\varphi)$, wenn wir der einfachkeithalber noch $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ voraussetzen:

$$\begin{aligned}
L'(\varphi) = 0 \quad &\iff \quad \cos(\varphi)^2 = \sin(\varphi)\sqrt{\sin(\varphi)^2 + \lambda} \quad \overset{\sin(\varphi) \geq 0}{\iff} \\
&\iff \quad \cos(\varphi)^4 = \sin(\varphi)^2 \left(\sin(\varphi)^2 + \lambda\right) \quad \iff \\
&\iff \quad (1 - \sin(\varphi)^2)^2 = \sin(\varphi)^2 \left(\sin(\varphi)^2 + \lambda\right) \quad \iff \\
&\iff \quad 1 - 2\sin(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^4 = \sin(\varphi)^4 + \lambda \sin(\varphi)^2 \quad \iff \\
&\iff \quad (\lambda + 2)\sin(\varphi)^2 = 1 \quad \iff \quad \sin(\varphi)^2 = \frac{1}{2 + \lambda} \quad \iff \\
&\iff \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2 + \lambda}} \quad \iff \quad \varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2 + \lambda}}\right).
\end{aligned}$$

Für

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh}{v^2}}}\right)$$

fliegt die Kugel also am weitesten.



Weitere Bezeichnungen:

- Eine **explizite Differentialgleichung 1. Ordnung** ist eine Differentialgleichung der Gestalt
$$x' = f(t, x).$$
- Eine **implizite Differentialgleichung 1. Ordnung** ist eine Differentialgleichung, die sich in der Form
$$F(t, x, x') = 0$$
schreiben lässt.
- Eine **explizite Differentialgleichung n-ter Ordnung** ist eine Differentialgleichung der Gestalt
$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}).$$
- Ist $x^{(n)}$ die höchste Ableitung in einer Differentialgleichung mit x als gesuchter Funktion, so nennt man n die **Ordnung der Differentialgleichung** und spricht von einer **impliziten Differentialgleichung**, wenn sie sich in der Form
$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$
schreiben lässt.
- Ist eine Differentialgleichung n-ter Ordnung
$$F(t, x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0$$
gegeben, so spricht man von einem **Anfangswertproblem**, wenn man zu gegebenen
$$t_0, \quad x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1}$$
eine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung sucht, die die Bedingungen
$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1, \quad x''(t_0) = x_2, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}$$
erfüllt.

Wir werden zunächst einige einfache Differentialgleichungstypen näher betrachten.