Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 12 (2.7.2021)

Aufgabe 56: Über $\mathbb{F}_7$ wird durch $f = x_0^3 + 2x_1^3 + 3x_2^3$ eine nichtsinguläre ebene Kubik C definiert, die den Punkt $P = (1:1:3)$ enthält. C hat Geschlecht 1.

(1) Zeige, dass $\ell(4[P]) = 4$ gilt, und bestimme eine Basis f_0, f_1, f_2, f_3 von $\mathcal{L}(4[P])$ mit $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{F}_7(C)$.

(2) Zeige, dass der Divisor $4[P]$ sehr ampel ist. Daher definiert die rationale Abbildung $\phi = (f_0 : f_1 : f_2 : f_3)$ eine Einbettung von C in $\mathbb{P}^3$. Zeige, dass $I(\phi(C))$ von zwei quadratischen Polynomen erzeugt wird durch explizite Angabe der Polynome. ($\phi(C)$ ist also durch Durchschnitt zweier Quadriken im $\mathbb{P}^3$.)

(Der Einsatz eines Computeralgebrasystems wie SAGE ist sinnvoll.)

Aufgabe 57: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^n$ eine absolut irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve, die in keiner Hyperebene enthalten ist. Für eine von 0 verschiedene Linearform $h = a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ wird der Hyperebenenschnitt $\operatorname{div}(h)$ durch

$$\operatorname{div}(h) = \sum_{P \in C} n_P[P] \quad \text{mit} \quad n_P = \operatorname{ord}_P\left(\frac{h}{x_k}\right), \text{ falls } P \in U_k = \{x_k \neq 0\},$$

der Grad der Kurve $\operatorname{grad}(C)$ als $\operatorname{grad}(\operatorname{div}(h))$ definiert. Zeige:

(1) Ist $P \in C \cap U_k \cap U_l$, so gilt $\operatorname{ord}_P(\frac{h}{x_k}) = \operatorname{ord}_P(\frac{h}{x_l})$. (Dies zeigt, dass obige Zahl n_P wohldefiniert ist.)

(2) Alle Hyperebenenschnitte sind linear äquivalent.

(3) Die Funktionen
$$\frac{x_0}{h}, \quad \frac{x_1}{h}, \quad \ldots \quad \frac{x_n}{h}$$
sind linear unabhängige Funktionen aus $\mathcal{L}(\operatorname{div}(h))$. Insbesondere gilt $\ell(\operatorname{div}(h)) \geq n+1$.

(4) Es gilt $\operatorname{grad}(C) \geq n$.

(5) Ist $\operatorname{grad}(C) = n$, so hat C Geschlecht 0.

Aufgabe 58: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ eine nichtsinguläre ebene Quartik über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Nach der Adunktionsformel sind die effektiven kanonischen Divisoren genau die Geradenschnitte, insbesondere gibt es zu zwei Punkten $P_1, P_2 \in C$ genau einen effektiven kanonischen Divisor K_{P_1,P_2} mit $[P_1] + [P_2] \leq K_{P_1,P_2}$, nämlich den Geradenschnitt $\operatorname{div}(g)$, wo $g = 0$ im Fall $P_1 \neq P_2$ die Gerade durch P_1, P_2 beschreibt, im Fall $P_1 = P_2$ die Tangente ist.

(1) Für jeden effektiven Divisor D vom Grad 2 gilt $\ell(D) = 1$.

(2) Sind $P_1, P_2, P_3 \in C$ drei verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so gilt
$$\ell(K_C - [P_1] - [P_2] - [P_3]) = 0 \quad \text{und} \quad \ell([P_1] + [P_2] + [P_3]) = 1.$$
Ist $P_4 \in C$ ein von P_1, P_2, P_3 verschiedener Punkt und
$$D = [P_1] + [P_2] + [P_3] - [P_4],$$
so gilt
$$\operatorname{grad}(D) = 2 \quad \text{und} \quad \ell(D) = 0.$$

(3) $P \in C$ ist genau dann ein Wendepunkt, wenn gilt $\ell(3[P]) = 2$.

Aufgabe 59: Sei C eine absolut irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve vom Geschlecht 3, sodass $\ell(D) \leq 1$ für jeden Divisor D vom Grad 2 gilt, und K_C ein kanonischer Divisor.

(1) Zeige, K_C sehr ampel ist.
(2) Zeige, dass $\phi_{K_C}(C)$ eine nichtsinguläre ebene Quartik ist.

Aufgabe 60: Durch

$$\begin{aligned} f_1 &= 5x_0^2 - 2x_0x_1 + 3x_0x_2 - 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2, \\ f_2 &= 5x_0^2 + 5x_0x_1 - 7x_0x_2 + 10x_1^2 - x_1x_2 - 8x_2^2, \\ f_3 &= 7x_0^2 - 5x_0x_1 - 8x_0x_2 - 10x_1^2 - 9x_1x_2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

werden drei nichtsinguläre, ebene Quadriken C_1, C_2, C_3 über $\mathbb{Q}$ definiert.

(1) Transformiere jede Quadrik C_i in die Form $a_i y_0^2 + b_i y_1^2 = y_2^2$.
(2) Bestimme für jede Quadrik C_i die Menge $\Psi(C_i) = \{p \text{ Primzahl} : C_i(\mathbb{Q}_p) = \emptyset\}$.
(3) Welche der Quadriken sind über $\mathbb{Q}$ isomorph? Bestimme gegebenenfalls einen expliziten Isomorphismus, falls möglich.