Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 6 (24.5.2024)

Aufgabe 26:

(1) Berechne für $n \in \mathbb{N}$

$$(n-1)! \bmod n,$$

d.h. den Rest der Division von $(n-1)!$ durch n. (Der Satz von Wilson darf verwendet werden.)

(2) Beweise folgendes Primzahlzwillingskriterium für $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$:

$$n \text{ und } n-2 \text{ sind Primzahlen} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 4\left\lfloor \frac{(n-3)!}{n-2} \right\rfloor \equiv -5 \bmod n.$$

Aufgabe 27: In dieser Aufgabe sollen alle natürlichen Zahlen $N \geq 2$ bestimmt werden, sodass die Menge

$$M_N = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq N-1 : \mathrm{ggT}(n, N) = 1\}$$

keine zusammengesetzten Zahlen enthält, d.h. außer der 1 sind nur Primzahlen in M_N. Ein Beispiel ist $N = 30$ mit

$$M_{30} = \{1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}.$$

(M_N ist ein Repräsentantensystem der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$.) Die folgenden Teilaufgaben skizzieren einen Lösungsweg, sind aber nur als Hinweis gedacht.

(1) Bestimme alle $N \leq 30$, für die M_N keine zusammengesetzten Zahlen enthält.

(2) Zeige anhand folgender Teilaufgaben, dass für $N \geq 31$ die Menge M_N mindestens eine zusammengesetzte Zahl enthält. Sei dazu $p_1, p_2, p_3, \ldots$ die Folge der Primzahlen und $r \geq 0$ maximal mit $\prod_{i \leq r} p_i \mid N$.

  (a) Für $r = 0, 1, 2, 3, 4$ gilt $p_{r+1}^2 \in M_N$ (unter der Voraussetzung $N \geq 31$).

  (b) Zeige für $r \geq 5$ mit Hilfe des Bertrandschen Postulats, dass

$$p_{r+1}^2 < 8p_{r-1}p_r < p_1p_2p_3p_{r-1}p_r \leq p_1 \ldots p_r \leq N$$

  gilt, und folgere $p_{r+1}^2 \in M_N$.

Aufgabe 28: Sei M eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit der Eigenschaft, dass ein $\alpha > 1$ existiert mit

$$|\{n \leq x : n \in M\}| = O\left(\frac{x}{(\log x)^\alpha}\right).$$

Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

konvergiert. (Hinweis: Partielle Summation)

Datei: anazt_u6.tex. Version vom 23.5.2024

Aufgabe 29: Für $k \in \mathbb{N}$ sei A_k die Menge der k-stelligen Dezimalzahlen, in deren Dezimaldarstellung keine 0 vorkommt, d.h.

$$A_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} n_i \cdot 10^i : n_i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}.$$

Die Menge aller natürlichen Zahlen n, in deren Dezimaldarstellung keine 0 vorkommt, werde mit A bezeichnet, sodass also

$$A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$$

gilt.

(1) Bestimme die Anzahl $|A_k|$ für $k \in \mathbb{N}$.

(2) Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n \in A} \frac{1}{n}$$

konvergiert, und dass der Grenzwert ≤ 90 ist.

(3) Zeige, dass für $x \geq 1$

$$|\{n \leq x : n \in A\}| \leq 11\, x^{0.96}$$

gilt.

Aufgabe 30: Zeige:

(1) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(2) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \log 2.$$

(Hinweis: $\sum_{k \leq x} \frac{1}{k} = \log x + \gamma + o(1)$)

(3) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \log 2.$$