Lineare Differenzial-Gleichungen mit konstanten Koeffizienten

Eine kurze vollständige Theorie

© **Edgar M.E. Wermuth**
TH Nürnberg
2007/2014

a) DGLen erster Ordnung

Vor.: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) stetig.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y'(x) - \lambda\, y(x) = f(x) \quad (x \in I)} \\ \Leftrightarrow \quad & \underbrace{y' \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} - \lambda\, y \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x}}_{=(y \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x})'} = f(x) \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x} \\ \Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\lambda x} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\lambda (x-\xi)} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi} \end{aligned}$$

mit $x_0 \in I, c \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) fest, aber beliebig.

Durch eine *Anfangsbedingung* $y(x_0) = y_0$ wird der Parameter c (die „Integrationskonstante") festgelegt: $c = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda x_0}$.

b) DGLen zweiter Ordnung

Vor.: Wie bei a); zusätzlich $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = b$, d.h. $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + a\lambda + b$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y''(x) + a\, y'(x) + b\, y(x) = f(x) \quad (x \in I)} \\ \Leftrightarrow \quad & (y' - \lambda_2\, y)' - \lambda_1 (y' - \lambda_2\, y) = f(x) \end{aligned}$$

$$\overset{a)}{\Leftrightarrow} \quad y' - \lambda_2 y = c \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\lambda_1 (x-\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\overset{a)}{\Leftrightarrow} \quad y(x) = \tilde{c} \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\lambda_2 (x-\xi)} \cdot \left(c \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 \xi} + \int_{x_0}^{\xi} \mathrm{e}^{\lambda_1 (\xi-\tau)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\xi.$$

Nun gilt

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)\xi} \mathrm{d}\xi = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)x} - \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)x_0}}{\lambda_1-\lambda_2}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ x - x_0, & \lambda_1 = \lambda_2 \end{cases}$$

und (Integration über ein *Dreieck*)

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\lambda_2 (x-\xi)} \left(\int_{x_0}^{\xi} \mathrm{e}^{\lambda_1 (\xi-\tau)} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\xi = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} \int_{x_0}^{x} \left(\int_{\tau}^{x} \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)\xi} \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{e}^{-\lambda_1 \tau} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

weshalb man die Lösung mit anderen Konstanten c_1, c_2 anstelle von $c, \tilde{c}$ schreiben kann als

$$\boldsymbol{y(x) =} \begin{cases} \boldsymbol{c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{e}^{\lambda_1(x-\xi)} - \mathrm{e}^{\lambda_2(x-\xi)}}{\lambda_1-\lambda_2} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,} & \boldsymbol{\lambda_1 \neq \lambda_2} \\ \boldsymbol{c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2\, x\, \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \int_{x_0}^{x} (x-\xi) \mathrm{e}^{\lambda_1(x-\xi)} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi,} & \boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2} \end{cases}$$

Spezialfall: a, b reell, aber $\omega^2 := b - a^2/4 > 0$, $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \mathrm{i}\,\omega$. Dann ergibt sich $\boldsymbol{y(x)} =$

$$\boldsymbol{\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}(c_1 \cos\omega x + c_2 \sin\omega x) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}(x-\xi)} \frac{\sin\omega(x-\xi)}{\omega} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.}$$

c) Der Rekursionsschritt

Angenommen, die Lösungsformel für DGLen

$$y^{(n)} + a_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f$$

habe man schon aufgestellt. Mit

$$\lambda^{n+1} + a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = (\lambda^n + b_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0)(\lambda - \lambda_0)$$

ergibt sich gemäß Abschnitt a):

$$\boldsymbol{y^{(n+1)} + a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_1\, y' + a_0\, y = f}$$

$$\Leftrightarrow (y' - \lambda_0\, y)^{(n)} + \cdots + b_1 (y' - \lambda_0\, y)' + b_0 (y' - \lambda_0\, y) = f$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y(x) = c\, \mathrm{e}^{\lambda_0 x} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{\lambda_0 (x-\xi)} y_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$$

mit irgendeiner Lösung $\boldsymbol{y_0(x)}$ von

$$\boldsymbol{y(n) + b_{n-1}\, y^{(n-1)} + \cdots + b_1\, y' + b_0\, y = f.}$$

(In Abschnitt b) wurde exemplarisch der erste dieser Rekursionsschritte explizit durchgerechnet.)

Die *Existenz und Eindeutigkeit der Lösung jedes Anfangswerproblems* (AWP = die DGL *plus Anfangsbedingungen* $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$ $(0 \le k \le n-1)$) folgt unmittelbar: Im Falle $n = 1$ ergibt es sich aus Abschnitt a), und jedes AWP der Ordnung $n+1$ wird durch die Rekursionsformel zurückgeführt auf ein eindeutig bestimmtes AWP der Ordnung n.

d) Die allgemeine homogene Lösung

Aus der Rekursionsformel ergibt sich mühelos per Induktion: Gilt

$$\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = (\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$$

mit verschiedenen λ_1, ..., λ_k, folgt

$$\boldsymbol{y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = 0}$$
$$\boldsymbol{\Leftrightarrow y(x) = (c_{1\,1} + c_{1\,2}x + \cdots + c_{1,n_1-1}x^{n_1-1})\mathrm{e}^{\lambda_1 x} +}$$
$$\boldsymbol{\cdots + (c_{k\,1} + c_{k\,2}x + \cdots + c_{k,n_k-1}x^{n_k-1})\mathrm{e}^{\lambda_k x}.}$$

Ein eleganter *direkter* Nachweis, dass $x^k\mathrm{e}^{\lambda_i x}$ für $0 \le k \le n_i - 1$ Lösung der homogenen DGL ist, folgt aus (dabei $a_n := 1$)

$$\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}\mathrm{e}^{\lambda x} = \sum_{i=0}^{n} a_i\frac{\partial^i}{\partial x^i}\,x^k\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

e) Ansatz in Form der rechten Seite

Ist y_p eine spezielle („partikuläre“) Lösung der inhomogenen DGL (rechte Seite f), so ergibt $\boldsymbol{y(x) = y_p(x) + y_h(x)}$ mit beliebigen homogenen Lösungen y_h gemäß Abschnitt d) die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL (wegen Linearität).

Bei gewissen einfachen Inhomogenitäten f gibt es *eine* Partikulärlösung „in Form der rechten Seite“, mit anderen Koeffizienten. Man braucht nicht die allgemeinen Lösungsformeln aus b) und c) und gelangt besonders schnell zur Lösungsgesamtheit.

Es geht um rechte Seiten der Gestalt

$$f(x) = \mathrm{e}^{ax}\,p_0(x)$$

mit einem Polynom p_0. Natürlich (Linearität!) sind auch *Summen* solcher Ausdrücke wie z.B. $f(x) = x^2 \sin x$ zulässig.

Mit der Operator-Schreibweise

$$\boldsymbol{(D-\lambda)\,y := y' - \lambda\,y}$$

lautet, mit $\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda + a_0 = (\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n)$, die DGL

$$\boldsymbol{(D-\lambda_1)(D-\lambda_2)\cdots(D-\lambda_n)\,y = \mathrm{e}^{ax}\,p_0(x).}$$

Da

$$(D-\lambda)\,\mathrm{e}^{ax}\,g(x) = \mathrm{e}^{ax}(D+a-\lambda)g(x)$$

für jedes differenzierbare g, ergibt Einsetzen von $\boldsymbol{y_p(x) = \mathrm{e}^{ax}\,p_1(x)}$ in die DGL und Kürzen

$$(D+a-\lambda_1)\cdots(D+a-\lambda_n)\,p_1(x) = p_0(x).$$

Wegen $\operatorname{grad}(D-\lambda)\,p = \operatorname{grad} p \Leftrightarrow \lambda \neq 0$ ist dabei $\boldsymbol{p_1(x) = x^k(c_0 + c_1\,x + \cdots + c_l\,x^l)}$ mit $k =$ Anzahl λ_j, die $= a$ sind (*Resonanzgrad*), sowie $l = \operatorname{grad} p_0$ zu setzen. Dann gibt's offenbar *genau ein* passendes p_1. (Erst c_l, dann c_{l-1}, ..., dann c_0 sind durch p_0 festgelegt.)

f) Variation der Konstanten

Es gibt ein allgemeines Verfahren, die Lösungen inhomogener linearer DGLen

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

mittels der Lösungsgesamtheit $c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ der zugehörigen homogenen DGL ($f \equiv 0$) zu finden, die Lagrangesche Methode der *Variation der Konstanten*: Man setzt

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

in die DGL ein. Zunächst gilt

$$y' = c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n + c_1 y_1' + \cdots + c_n y_n' \,;$$

man fordert $\boldsymbol{c_1' y_1 + \cdots + c_n' y_n = 0}$ und erhält

$$y'' = c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' + c_1 y_1'' + \cdots + c_n y_n'' \,;$$

man fordert $\boldsymbol{c_1' y_1' + \cdots + c_n' y_n' = 0}$ und erhält

$$y''' = c_1' y_1'' + \cdots + c_n' y_n'' + c_1 y_1''' + \cdots + c_n y_n''' \,;$$

$$\vdots$$

man fordert $\boldsymbol{c_1' y_1^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0}$ und erhält

$$y^{(n)} = c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} + c_1 y_1^{(n)} + \cdots + y_n^{(n)} \,;$$

schließlich:
man fordert $\boldsymbol{c_1' y_1^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = f}$ **(!)**, so dass

$$y^{(n)} = c_1 y_1^{(n)} + \cdots + c_n y_n^{(n)} + f.$$

Setzt man nun $y, y', \ldots, y^{(n)}$ in die DGL ein, fallen alle Summen $c_i\left(y_i^{(n)} + a_{n-1}y_i^{(n-1)} + \cdots + a_1 y_i' + a_0 y_i\right)$ weg, und die DGL ist erfüllt. Es muss also nur gelten

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} & \cdots & \boldsymbol{y_n} \\ \boldsymbol{y_1'} & \cdots & \boldsymbol{y_n'} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{y_1^{(n-1)}} & \cdots & \boldsymbol{y_n^{(n-1)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c_1'} \\ \boldsymbol{c_2'} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_n'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f} \end{pmatrix}.$$

Mit der sogenannten *Wronski-Determinante*

$$\boldsymbol{W(x)} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{y_1(x)} & \cdots & \boldsymbol{y_n(x)} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{y_1^{(n-1)}(x)} & \cdots & \boldsymbol{y_n^{(n-1)}(x)} \end{vmatrix}$$

sowie den daraus abgeleiteten Determinanten $W_i(x)$, bei denen die i-te Spalte durch $(0, \ldots, 0, f(x))^T$ ersetzt ist, gilt also (gemäß der Cramerschen Regel)

$$\boldsymbol{c_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} \mathrm{d}x \quad (1 \le i \le n)\,.}$$

Übrigens ist bei dieser ganzen Überlegung irrelevant, ob die Koeffizienten a_i Konstanten sind. Kennt man ein vollständiges Lösungssystem $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ der homogenen DGL, findet man so die Lösungen der inhomogenen DGL. (Im Spezialfall $n = 1$ hat $y'(x) = a(x)y(x)$ die Lösungen $y(x) = c\,\exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right)$, $x_0 \in I$, $a : I \to \mathbb{R}$, stetig.)

Aufgrund der Leibnizschen Entwicklungsformel ist klar, dass $W'(x)$ die Summe aller derjenigen Determinanten ist, die entstehen, wenn man *eine* Zeile von $W(x)$ ableitet. Da laut DGL die Ableitung der letzten Zeile Linearkombination aller Zeilen ist, ergibt sich

$$\boldsymbol{W(x) = W(x_0)\mathrm{e}^{-a_{n-1}(x-x_0)}}$$

für die Wronski-Determinante irgendwelcher n Lösungen der homogenen DGL. Mit einem *vollständigen* Lösungssystem kann man *jeden* Anfangswerte-Vektor

$$(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))^T$$

erzeugen; also gibt es zur zugehörigen Wronski-Matrix $M(x)$ eine konstante $n \times n$-Matrix A mit $M(x_0)\,A = E$ und damit (Determinantenmultiplikationssatz!) $W(x_0) = \det(M(x_0)) \neq 0$. Fazit:

Die Wronski-Determinante von n Lösungen einer homogenen linearen DGL ist überall $\neq 0$ genau dann, wenn es sich um ein *vollständiges* Lösungssystem, eine Lösungsbasis handelt; andernfalls ist sie überall $= 0$.

g) Systeme erster Ordnung

Man kann eine lineare DGL n-ter Ordnung auch in Matrix-Vektor-Form schreiben, indem man die Bezeichnungen

$$\mathbf{y}(x) := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \; A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{f}(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$ einführt; damit lautet die DGL

$$\mathbf{y}'(x) = A\,\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x).$$

Wir nehmen dies zum Anlass, *ganz allgemein* solche vektoriellen linearen DGLen erster Ordnung zu betrachten, mit beliebiger quadratischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, beliebiger stetiger Funktion $\mathbf{f} : I \mapsto \mathbb{R}^n$ und einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Zunächst der homogene Fall $\mathbf{f} \equiv 0$. Die Lösungen $y(x) = c\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ der eindimensionalen DGL $y' = \lambda y$ lassen sich sinngemäß auf den vektoriellen Fall übertragen, indem man die *Matrizen-Exponentialfunktion*

$$\exp \boldsymbol{M} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{M}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{M}^k}{\boldsymbol{k}!} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} + \frac{1}{2}\boldsymbol{M}^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{M}^3 + \cdots$$

für beliebige $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ einführt. Konvergenz solcher Matrizenreihen versteht sich *komponentenweise*.

Ist μ eine Schranke für die Beträge der Elemente von M, folgt leicht per Induktion die Schranke $n^{k-1}\,\mu^k$ für die Beträge der Elemente von M^k. Also ist klar, dass die e^M-Potenzreihe für alle $n \times n$-Matrizen komponentenweise absolut konvergiert.

(Warnung: $\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B = \exp B \cdot \exp A$ gilt *nicht immer!* Aber nur im Falle $A\,B \neq B\,A$ gilt es *manchmal nicht*.)

Die *Ableitung* einer Matrix, deren Komponenten Funktionen sind, verstehen wir – wie die von Vektoren – komponentenweise. In diesem Sinne gilt dann

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{xM})' &= \left(E + x\,M + \frac{x^2}{2}M^2 + \frac{x^3}{6}M^3 + \cdots\right)' \\ &= M\left(E + x\,M + \frac{x^2}{2}M^2 + \frac{x^3}{6}M^3 + \cdots\right) = M\,\mathrm{e}^{xM}.\end{aligned}$$

Man kann dies auch „zu Fuß“ nachrechnen, indem man $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{(x+h)M} - \mathrm{e}^{xM}\right)$ betrachtet und dabei beachtet, dass $\frac{1}{h}\left((x+h)^k - x^k\right) = (x+h)^{k-1} + (x+h)^{k-2}x + \cdots + x^{k-1}$ zwischen $k(x+h)^{k-1}$ und $k\,x^{k-1}$ liegt. Es folgt (Differenziations-Produktregel beachten!)
$\left(\mathrm{e}^{xM}\mathrm{e}^{cM}\mathrm{e}^{-(x+c)M}\right)' = \mathbf{0}$ und daher (erst $c = 0$, dann allg. c)

$$\mathbf{e}^{x\boldsymbol{M}}\mathbf{e}^{-x\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{E}, \;\; \mathbf{e}^{x\boldsymbol{M}}\mathbf{e}^{c\boldsymbol{M}} = \mathbf{e}^{(x+c)\boldsymbol{M}}.$$

Weiter gilt dann auch für jeden konstanten Vektor $\mathbf{c}$

$$\left(\mathrm{e}^{xA}\,\mathbf{c}\right)' = A\,\mathrm{e}^{xA}\,\mathbf{c} = \mathrm{e}^{xA}A\,\mathbf{c}\,;$$

was bedeutet, dass $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{xA}\,\mathbf{c}$ stets eine Lösung der homogenen DGL $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ ist. Wie bei a) folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}' - A\,\mathbf{y} = \mathbf{f} &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-xA}\,\mathbf{y}' - \mathrm{e}^{-xA}A\mathbf{y} = \mathrm{e}^{-xA}\,\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow \left(\mathrm{e}^{-xA}\,\mathbf{y}\right)' = \mathrm{e}^{-xA}\,\mathbf{f} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-xA}\,\mathbf{y}(x) = \mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-tA}\,\mathbf{f}(t)\mathrm{d}t \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{xA}\,\mathbf{c} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{(x-t)A}\,\mathbf{f}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

mit $\mathbf{c} = \mathrm{e}^{-x_0 A}\,\mathbf{y}_0$ im Falle $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$.

Um mit dieser eleganten allgemeinen Lösungsformel praktisch zu rechnen, muss man sich insbesondere mit den *Eigenwerten* und *Eigenvektoren* der Matrix A befassen, d.h. mit den Skalaren λ sowie Vektoren $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, für die $A\,\mathbf{c} = \lambda\,\mathbf{c}$. Für solche λ und $\mathbf{c}$ gilt einfach:

$$\mathrm{e}^{xA}\,\mathbf{c} = \mathrm{e}^{x\lambda}\,\mathbf{c}\,.$$

Auch der *Ansatz* $\mathbf{y}(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\mathbf{c}$ zur Lösung der homogenen DGL $\mathbf{y}'(x) = A\,\mathbf{y}(x)$, motiviert durch den skalaren Fall, führt auf $A\,\mathbf{c} = \lambda\mathbf{c}$, die Eigenwertgleichung.

Wie findet man die Eigenwerte und -vektoren von A? Bekanntlich gibt es ein $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ mit

$$A\,\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \;\Leftrightarrow\; (A - \lambda E)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

genau dann, wenn $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda E}) = \mathbf{0}$. *Diese* Polynom-Gleichung n-ten Grades mit maximal n Wurzeln liefert also die Eigenwerte von A; man nennt $\det(A - \lambda E)$ das *charakteristische Polynom* der Matrix.

Gilt $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ mit lauter verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, also insbesondere $n_1 + \cdots + n_k = n$, nennt man $n_1, \ldots, n_k$ die *algebraischen Vielfachheiten* der Eigenwerte. Es gibt dann jeweils höchstens n_i linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert λ_i.
Beweis: Hat $\lambda_i E - A$ den Rang r, kann man $n - r$ der Spalten dieser Matrix durch Hinzufügen von Linearkombinationen der anderen verschwinden lassen; dieselben Spaltenumformungen bei $\lambda E - A$ ergeben also eine Matrix, bei der $n - r$ Spalten den Faktor $\lambda - \lambda_i$ enthalten, weshalb $\det(\lambda E - A)$ den Faktor $(\lambda - \lambda_i)^{n-r}$ enthält.■

Günstigstenfalls gibt es also eine Basis $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren der Matrix A.
Mit $B = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ und $A\,\mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ mit – je nach Vielfachheit der Eigenwerte – *nicht* notwendig verschiedenen λ_i gilt dann

$$A\,B = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B^{-1}\,A\,B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Man nennt A in diesem Fall *diagonalisierbar*.

Man kann zeigen („Spektralsatz“), dass jede *symmetrische* Matrix diagonalisierbar ist, mit lauter *reellen* Eigenwerten und einer *Orthonormalbasis* $((\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)^{-1} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)^T)$ zugehöriger Eigenvektoren.

Es gibt aber auch reelle Matrizen mit *komplexen* Eigenwerten, z.B. Drehmatrizen; und die allgemeinste Matrizenklasse mit reeller *oder komplexer* Orthonormalbasis (ONB) aus Eigenvektoren sind die *normalen* Matrizen $(A^*A = AA^*)$; wobei $A^* := \bar{A}^T$, *adjungierte Matrix* zu A, mit $\overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$, $\bar{A} = \overline{(a_{i\,k})} = (\overline{a_{i\,k}})$.

Für diagonalisierbare Matrizen $A = B\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)B^{-1}$ gilt

$$A^k = B \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix} B^{-1}, \quad \mathrm{e}^{xA} = B \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{e}^{\lambda_n x} \end{pmatrix} B^{-1}.$$

In diesem Fall ist die Lösungesamtheit des homogenen DGL-Systems $\mathbf{y}' = A\,\mathbf{y}$ gegeben durch

$$\mathbf{y}(x) = c_1^*\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\,\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n^*\,\mathrm{e}^{\lambda_n x}\,\mathbf{b}_n,$$

wenn man $(c_1^*, \ldots, c_n^*)^T := B^{-1}\,\mathbf{c}$ setzt. Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung: $\sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x \mathrm{e}^{\lambda_i(x-t)} \varphi_i(t)\mathrm{d}t \cdot \mathbf{b}_i$ mit $B^{-1}\mathbf{f}(t) =: (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))^T$.

Die einfachste ganz allgemeine Zerlegungs-Aussage, wegen der nötigen Einbeziehung komplexer Eigenwerte gleich komplex formuliert: Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ besitzt eine Darstellung

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_1} & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \boldsymbol{\lambda_n} \end{pmatrix} \boldsymbol{U}^*$$

mit einer unitären (komplex-orthogonalen, $U^* = U^{-1}$) Matrix U (*Schur-Zerlegung*, nach I. Schur); leicht per Induktion zu beweisen. Hieraus folgt, dass mit $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_1 E}) \cdots (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda_n E}) = \mathbf{0} \text{ (Nullmatrix)},$$

der *Satz von Hamilton/Cayley*. Insbesondere ist also e^A stets darstellbar als Linearkombination von $E, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$.

Einen allgemeinen Ansatz für Matrizenfunktionen $f(A)$ liefern die Vielfachheiten der *verschiedenen* Eigenwerte: Aus $\det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ folgt (*Beweis:* Jordansche Normalform!)

$$f(A) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i - 1} f^{(j)}(\lambda_i)\,B_{i\,j}, \quad \mathbf{e}^{\boldsymbol{xA}} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} \mathbf{e}^{\boldsymbol{\lambda_i x}} \sum_{\boldsymbol{j=0}}^{\boldsymbol{n_i - 1}} \boldsymbol{x^j B_{i\,j}}$$

mit nur von A, *nicht* von f abhängigen Matrizen $B_{i\,j}$, bestimmbar durch ein lineares Gleichungssystem (Wahl spezieller einfacher f).