Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 7 (29.5.2024-5.6.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P31: Seien α, β Elemente des algebraischen Abschlusses von $\mathbb{F}_5$ mit $\alpha^2 = 2$ und $\beta^2 = 3$. Bestimme alle Körperhomomorphismen

$$\mathbb{F}_5(\alpha) \to \mathbb{F}_5(\beta).$$

Aufgabe P32: Gegeben seien die reellen Zahlen $\alpha = \sqrt{7+2\sqrt{10}}$ und $\beta = \sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

(1) Bestimme das Minimalpolynom f von α über $\mathbb{Q}$.
(2) Zeige, dass f auch das Minimalpolynom von β über $\mathbb{Q}$ ist.
(3) Faktorisiere f in $\overline{\mathbb{Q}}[x]$.
(4) Bestimme alle Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha) \to \overline{\mathbb{Q}}$.
(5) Zeige: $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist der Zerfällungskörper von f. (Hinweis: Betrachte das Produkt $\alpha\beta$.)
(6) Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$.

Aufgabe P33: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei $K = \mathbb{Q}(i) \subseteq \mathbb{C}$ und $\alpha = \sqrt[4]{7}$. Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $f = x^4 - 7 \in K[x]$ über dem Grundkörper K.

(1) Zeige: $L = K(\alpha)$.
(2) Bestimme $[L : \mathbb{Q}]$ und $[L : K]$.
(3) Bestimme alle K-Automorphismen von $K(\alpha)$.

Aufgabe P34: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Sei K ein Körper der Charakteristik p, $a \in K$ und $f = x^p - x - a \in K[x]$. Sei $\xi \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f.

(1) Zeige: Ist $\beta \in \overline{K}$ eine Nullstelle von f, so auch $\beta + 1$.
(2) Folgere aus (1), dass die Nullstellen von f

$$\xi, \quad \xi+1, \quad \xi+2, \quad \dots \quad \xi+(p-1)$$

sind, sodass sich die Zerlegung

$$f = \prod_{i=0}^{p-1} (x - (\xi + i)) \in K(\xi)[x]$$

ergibt.

Datei: kt_u7.tex. Version vom 27.5.2024

(3) Ist $g \in K(\xi)[x]$ ein normierter Teiler vom Grad $m \geq 1$ von f, so gibt es eine m-elementige Teilmenge $I \subseteq \{0, 1, \ldots, p-1\}$ mit
$$g = \prod_{i \in I} (x - (\xi + i)).$$
Bestimme den Koeffizienten bei x^{m-1} von g.

(4) Zeige: Ist $\xi \notin K$, so ist f irreduzibel über K.

(5) Zeige: Ist $\xi \notin K$, so sind die K-Körperhomomorphismen $\sigma_i : K(\xi) \to \overline{K}$ durch
$$\sigma_i(\xi) = \xi + i \text{ für } i \in \mathbb{F}_p$$
gegeben.

(6) Bestimme für den Fall $\xi \notin K$ die Automorphismengruppe $\operatorname{Aut}(K(\xi)|K)$.

Aufgabe P35: Sei $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus. (In der Vorlesung wurde gezeigt, dass dann $\sigma(q) = q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt.)

(1) Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Äquivalenz gilt: $a \leq b \iff$ es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $b = a + c^2$.

(2) Zeige, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ aus $a \leq b$ die Ungleichung $\sigma(a) \leq \sigma(b)$ folgt. (σ ist also monoton steigend.)

(3) Zeige, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\sigma(a) = a$. (Wäre $\sigma(a) \neq a$, so gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ zwischen a und $\sigma(a)$. Folgere unter Verwendung von (2) einen Widerspruch.)

Der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist also die Identität. Insbesondere gilt $\operatorname{Aut}(\mathbb{R}|\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\}$.

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H19: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_7$ gewählt mit $\alpha^2 + 1 = 0$, $\beta^2 + \beta + 2 = 0$, $\gamma^2 + \gamma + 3 = 0$.

(1) Bestimme $[\mathbb{F}_7(\alpha) : \mathbb{F}_7]$, $[\mathbb{F}_7(\beta) : \mathbb{F}_7]$, $[\mathbb{F}_7(\gamma) : \mathbb{F}_7]$.
(2) Warum gibt es keinen Körperhomomorphismus $\mathbb{F}_7(\alpha) \to \mathbb{F}_7(\beta)$?
(3) Gibt es einen Körperhomomorphismus $\mathbb{F}_7(\beta) \to \mathbb{F}_7(\alpha)$?
(4) Bestimme alle Körperhomomorphismen $\mathbb{F}_7(\alpha) \to \mathbb{F}_7(\gamma)$.

Aufgabe H20: Sei $\alpha = i\sqrt{5 + \sqrt{5}} \in \mathbb{C}$ und $\beta = i\sqrt{5 - \sqrt{5}} \in \mathbb{C}$.

(1) Bestimme die Minimalpolynome von α und β über $\mathbb{Q}$.
(2) Faktorisiere das Minimalpolynom von α in $\overline{\mathbb{Q}}[x]$.
(3) Bestimme alle Körperhomomorphismen $\mathbb{Q}(\alpha) \to \overline{\mathbb{Q}}$.
(4) Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ der Zerfällungskörper des Minimalpolynoms von α über $\mathbb{Q}$ ist. (Hinweis: Betrachte $\alpha\beta$.)
(5) Bestimme $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$.
(6) Die komplexe Konjugation liefert einen Körperautomorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha)$. Welchen?

Aufgabe H21: Sei t eine Unbestimmte über $\mathbb{F}_p$ und $K = \mathbb{F}_p(t)$. Sei ξ ein Element des algebraischen Abschlusses von K mit $\xi^p = t$ und $f \in K[x]$ das Minimalpolynom von ξ über K.

(1) Zeige: $f = x^p - t$.
(2) Zeige, dass $K(\xi)$ der Zerfällungskörper von f über K ist.
(3) Bestimme $\mathrm{Aut}(K(\xi)|K)$.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 5.6.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen