Vorlesung „Algebraische Kurven“ (Sommersemester 2021)

Übungsblatt 8 (4.6.2021)

Aufgabe 36: Sei $f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^*$. Mit f' wird wie üblich die Ableitung von f bezüglich x bezeichnet.

(1) Zeige: Ist f in $P \in \mathbb{P}^1$ definiert, so auch f'.

(2) Zeige: Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{ord}_\alpha(f) \neq 0$, so gilt
$$\operatorname{ord}_\alpha(f') = \operatorname{ord}_\alpha(f) - 1.$$

(3) Sei f in α definiert und $f(\alpha) = \lambda$. Zeige die Äquivalenz:
$$\operatorname{ord}_\alpha(f - \lambda) \geq 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f'(\alpha) = 0.$$

(4) Zeige: Ist $\operatorname{ord}_\infty(f) \neq 0$, so gilt
$$\operatorname{ord}_\infty(f') = \operatorname{ord}_\infty(f) + 1.$$

Aufgabe 37: Bestimme $\operatorname{div}(f_k)$ für folgende Funktionen $f_k \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)$:
$$f_1 = x^2 + 1, \quad f_2 = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad f_3 = \frac{x^2 - 1}{x}, \quad f_4 = \frac{x^2 - 2}{x^4 - 4}$$

Aufgabe 38:

(1) Welcher der folgenden Divisoren $D_k \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^1)$ ist ein Hauptdivisor? Bestimme gegebenenfalls eine Funktion $f_k \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1) \setminus \{0\}$ mit $D_k = \operatorname{div}(f_k)$.
$$D_1 = [1] + [2], \quad D_2 = 3[4] - 3[\infty], \quad D_3 = [1] + [2] - [3] - [4], \quad D_4 = 3[1] - 2[2] - [\infty].$$

(2) Zeige, dass es genau ein $n \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass
$$D = n[1] + 7[2] - 3n[3] + 3[\infty]$$
ein Hauptdivisor ist. Bestimme n und $f \in \mathbb{C}(\mathbb{P}^1)^*$ mit $D = \operatorname{div}(f)$.

Aufgabe 39: Bestimme für folgende Divisoren $D_k \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^1)$ den Vektorraum $\mathcal{L}(D_k)$ durch Angabe einer Basis:

$$D_1 = [1]+[2], \quad D_2 = [1]-[2]+[3], \quad D_3 = [1]-[2]-[3], \quad D_4 = [1]+2[2]+3[\infty], \quad D_5 = [1]+2[2]-3[\infty].$$

Aufgabe 40: Seien $P_1, \dots, P_6 \in \mathbb{P}^1$ paarweise verschiedene Punkte, $D = m_1[Q_1] + \cdots + m_r[Q_r] \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^1)$ mit $\mathrm{grad}(D) = 3$ und $\{P_1, \dots, P_6\} \cap \{Q_1, \dots, Q_r\} = \emptyset$ und

$$\alpha : \mathcal{L}(D) \to K^6 \text{ mit } \alpha(f) = (f(P_1), \dots, f(P_6)).$$

(1) Zeige, dass α eine wohldefinierte K-lineare Abbildung ist. (Warum ist jedes $f \in \mathcal{L}(D)$ in den Punkten $P_1, \dots, P_6$ definiert?)

(2) Zeige: Sind $i_1, i_2, i_3, i_4 \in \{1, \dots, 6\}$ mit $\#\{i_1, i_2, i_3, i_4\} = 4$, so gilt für $f \in \mathcal{L}(D)$ die Implikation

$$f(P_{i_1}) = f(P_{i_2}) = f(P_{i_3}) = f(P_{i_4}) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0.$$

(3) Zeige: Sind $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, 6\}$ mit $\#\{i_1, i_2, i_3\} = 3$, so gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}(D)$ mit

$$f(P_{i_1}) = f(P_{i_2}) = f(P_{i_3}) = 0, \quad \text{aber} \quad f \neq 0.$$

Für diese Funktion f gilt:

$$d_{\mathrm{Hamming}}(\alpha(f), 0) = 3.$$

(4) Sei $C = \mathrm{Bild}(\alpha)$. Bestimme

$$\dim(C) \quad \text{und} \quad d(C) = \min\{d_{\mathrm{Hamming}}(v, 0) : v \in C \setminus \{0\}\}.$$

(C ist ein $[6, \dim(V), d(C)]$-Code über K.)