

Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Übungsblatt 5 (22.5.2026)

Aufgabe 21: In dieser Aufgabe sollen Primzahlfolgen $p_1, p_2, \dots, p_n$ betrachtet werden, für die

$$p_{i+1} = 2p_i \pm 1, \text{ d.h. } |p_{i+1} - 2p_i| = 1, \text{ für } 1 \leq i \leq n-1$$

gilt, beispielsweise 2, 3, 5, 11, 23, 47.

- (1) Zeige: Gilt $p_1 \equiv 1 \pmod{6}$, so ist $p_i \equiv 1 \pmod{6}$ für $1 \leq i \leq n$, $p_{i+1} = 2p_i - 1$ für $1 \leq i \leq n-1$ und

$$p_i = 2^{i-1}p_1 - (2^{i-1} - 1) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

- (2) Zeige: Gilt $p_1 \equiv 5 \pmod{6}$, so ist $p_i \equiv 5 \pmod{6}$ für $1 \leq i \leq n$, $p_{i+1} = 2p_i + 1$ für $1 \leq i \leq n-1$ und

$$p_i = 2^{i-1}p_1 + (2^{i-1} - 1) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

- (3) Zeige: Ist $p_1 \equiv \pm 1 \pmod{6}$, so gilt $n \leq p_1 - 1$ für die Länge einer solchen Primzahlfolge $p_1, \dots, p_n$.
(4) Konstruiere Beispiele solcher Primzahlfolgen $p_1, \dots, p_n$ mit möglichst großer Länge n .

Aufgabe 22: (In dieser Aufgabe darf der Primzahlsatz ($\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$) benutzt werden.)

Sei $k \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ mit $a_1 \neq 0$ und

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_k)_{10}.$$

a ist also die Zahl mit der Dezimaldarstellung $a_1a_2 \dots a_k$.

- (1) Sei $\ell \geq k$. Zeige, dass die ℓ -stelligen Dezimalzahlen, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern $a_1, a_2, \dots, a_k$ beginnt, genau die Zahlen n sind, die folgende Bedingung erfüllen:

$$a \cdot 10^{\ell-k} \leq n \leq a \cdot 10^{\ell-k} + (10^{\ell-k} - 1).$$

- (2) Sei $\ell > k$. Zeige, dass es genau dann (mindestens) eine ℓ -stellige Primzahl p gibt, deren Dezimaldarstellung mit den Ziffern $a_1, \dots, a_k$ beginnt, wenn gilt

$$\pi((a+1) \cdot 10^{\ell-k}) > \pi(a \cdot 10^{\ell-k}).$$

- (3) Zeige, dass folgender Grenzwert existiert, und bestimme ihn:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \frac{\pi((a+1) \cdot 10^{\ell-k})}{\pi(a \cdot 10^{\ell-k})}.$$

- (4) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, deren Dezimaldarstellung mit $a_1a_2 \dots a_k$ beginnt.
(5) Bestimme alle 10-stelligen Primzahlen der Gestalt 22052026 * *.

Aufgabe 23: Zeige, dass es keine natürliche Zahl n gibt, sodass die Fakultät $n!$ in der Dezimaldarstellung genau 777 Nullen am Schluss hat.

Aufgabe 24: Gegeben sei eine Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. Bekanntlich lässt sich dann n schreiben als

$$n = \sum_{i=0}^r a_i p^i \text{ mit } a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

$(a_r, a_{r-1}, \dots, a_1, a_0)_p$ nennt man auch die p -adische Darstellung von n . Die Zahl

$$s_p(n) = \sum_{i=0}^r a_i$$

heißt p -adische Quersumme von n . Zeige:

(1) Es ist

$$\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \begin{cases} \sum_{i=k}^r a_i p^{i-k} & \text{für } 0 \leq k \leq r, \\ 0 & \text{für } k > r. \end{cases}$$

(2) Es gilt

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^r a_i \frac{p^i - 1}{p - 1}.$$

(Hinweis: In der Vorlesung wurde die Formel $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ bewiesen.)

(3) Es gilt

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}.$$

(4) Es gilt

$$\frac{n}{p-1} - \frac{\log n}{\log p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1} - \frac{1}{p-1}.$$

Aufgabe 25: In dieser Aufgabe soll die Abschätzung

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{4n}} \stackrel{(n \geq 2)}{<} \binom{2n}{n} \stackrel{(n \geq 1)}{<} \frac{2^{2n}}{\sqrt{2n+1}}$$

zunächst elementar bewiesen werden.

(1) Zeige, dass für $n \geq 1$

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{(2i)^2}\right) = \frac{2n+1}{2^{4n}} \cdot \binom{2n}{n}^2$$

gilt, und folgere die rechte Ungleichung.

(2) Zeige, dass für $n \geq 2$

$$\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{(2i+1)^2}\right) = \frac{2^{4n}}{4n} \cdot \frac{1}{\binom{2n}{n}^2}$$

gilt, und folgere die linke Ungleichung.

(3) Eine Gestalt der Stirling-Formel lautet

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\frac{\delta(n)}{12n}} \quad \text{mit} \quad 0 < \delta(n) < 1.$$

Folgere daraus die Abschätzung

$$\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{-\frac{1}{6n}} < \binom{2n}{n} < \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{\frac{1}{24n}}.$$