Quadratwurzeln komplexer Zahlen

Lemma:

Die Zahl $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ besitzt die beiden Quadratwurzeln

$$w_{1,2} = \pm\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|+a)} + \mathrm{i}\,\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|-a)}\right) \text{ mit } \varepsilon \in \{-1,1\},$$

und zwar $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b)$ im Falle $b \neq 0$; im Falle $b = 0$ ist das Vorzeichen von ε beliebig, da dann einer der beiden Wurzelausdrücke verschwindet.

Beweis:

$$(x+\mathrm{i}\,y)^2 = a + b\,\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a, & \text{(I)} \\ 2xy = b & \text{(II)} \end{cases},$$ und aus (I) und (II) folgt

$(x^2-y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2+y^2)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$, also $x^2 + y^2 = |z|$ (I').

Bildet man (I')+(I) und (I')-(I), erhält man

$$x^2 = \tfrac{1}{2}(|z|+a), \quad y^2 = \tfrac{1}{2}(|z|-a).$$

Somit folgt aus (I) und (II):

$$x = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|+a)}, \quad y = \pm\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(|z|-a)} \text{ mit } \varepsilon \in \{-1,1\}. \text{ (III)}$$

Offensichtlich: (III) impliziert $x^2 - y^2 = a$, $2xy = \varepsilon|b|$.

Also ist (III) äquivalent zu (I),(II), wenn $\varepsilon = \operatorname{sgn}(b)$ im Falle $b \neq 0$. ■

Bemerkung: (I),(II) ist ein einfaches, aber wichtiges kleines Beispiel eines *nichtlinearen Gleichungssystems*. Wie man sieht, hat es – abgesehen vom Trivialfall $a = b = 0$ – stets genau zwei Lösungen. *Lineare* Gleichungssysteme haben ein ganz anderes Lösungsverhalten: Sie haben entweder keine oder genau eine Lösung oder aber *unendlich viele* Lösungen.

Übung:

Man bestimme die Lösungen folgender reellen Gleichungssysteme:

a) $x^2 + y^2 = a, \quad (x+y)^2 = b$;

b) $x^2 - y^2 = a, \quad (x-y)^2 = b.$

Lösung:

a) Gl-System: $x^2 + y^2 = a$ (I) $\quad (x+y)^2 = b$ (II)

Wegen $2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = (x-y)^2$ ist das System (I),(II) nur lösbar, falls

$$\mathbf{2a \geq b \geq 0} \quad (*)$$

Sei also $(*)$ von jetzt an vorausgesetzt. (II)-(I) ergibt $2xy = b - a$. Also folgt $(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2-y^2)^2 = a^2 - (b-a)^2 = 2ab - b^2 = (2a-b)b \geq 0$ und damit

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = \pm\sqrt{2ab - b^2}} \text{ (I')} \qquad \boldsymbol{2xy = b - a} \text{ (II')}$$

Umgekehrt folgt $(x^2+y^2)^2 = 2ab - b^2 + (b-a)^2 = a^2$ und $(x+y)^2 = a + b - a = b$ aus (I'), (II').

Das bedeutet: (I),(II) und (I'),(II') sind gleichwertig und äquivalent zu

$$\boldsymbol{(x + \mathrm{i}y)^2 = \pm\sqrt{2ab - b^2} + \mathrm{i}(b - a)} \quad \text{(III)}$$

Ohne die Generalvoraussetzung $(*)$ hat (III) allerdings auch Lösungen im Falle $2a \leq b \leq 0$.

b) Gl-System: $x^2 - y^2 = a$ (I) $\quad (x-y)^2 = b$ (II)

Hier ist $\boldsymbol{b \geq 0} \quad (*)$ triviale Lösbarkeitsvoraussetzung.

Im Falle $b = 0$, also $x = y$, muss auch $a = 0$ gelten, und dann ergeben *beliebige* Werte $x = y \in \mathbb{R}$ eine Lösung von (I),(II).

Nun der Fall $b > 0$. Dann folgt $x - y = \pm\sqrt{b}$ aus (II), und Einsetzen in (I) führt zu $x + y = \pm a/\sqrt{b}$. Summe und Differenz ergeben

$$\boldsymbol{x = \pm\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{b}} + \sqrt{b}\right)} \qquad \boldsymbol{y = \pm\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{b}\right)}.$$

Dass für diese x, y tatsächlich (I),(II) erfüllt ist, bestätigt einfaches Einsetzen und Ausmultiplizieren.

Bemerkung: Hat man zwei beliebige Gleichungen *zweiten Grades* in x und y, die also nur Terme x^2, y^2, xy, x, y mit gewissen Koeffizienten sowie einen konstanten Term enthalten, so stellen sie zwei *Kegelschnitte* dar (Stichwort: Hauptachsentransformation), deren Durchschnitt aus 0 bis 4 Punkten bestehen kann, in Ausnahme- bzw. Grenzfällen auch aus unendlich vielen. Im Falle a) z.B. ist (I) ein Kreis um den Nullpunkt und (II) ein zum Nullpunkt symmetrisch gelegenes Geradenpaar, was unter der Voraussetzung $(*)$ zu den (implizit) angegebenen 4 Schnittpunkten führt; im Grenzfall $2ab = b^2$ sind es nur zwei Schnittpunkte oder eventuell sogar nur einer. Im Falle b) geht es im allgemeinen um den Durchschnitt aus einer Hyperbel und einem Geradenpaar; es gibt *zwei* Schnittpunkte, da die Hyperbeläste asymptotisch parallel zu den Geraden liegen; dadurch gibt es zwei weitere Schnittpunkte „im Unendlichen". Und beim Ausgangspunkt der Betrachtung, den Quadratwurzeln komplexer Zahlen, entsprechen die Gleichungen (I), (II) zwei Hyperbeln unterschiedlicher Ausrichtung, die sich in zwei zum Nullpunkt symmetrisch gelegenen Punkten schneiden; es gibt zwei weitere, allerdings *nichtreelle* Schnittpunkte. Der allgemeine Sachverhalt ist der fundamentale *Satz von Bézout*: Zwei algebraische Kurven der Grade *m* bzw. *n* in der komplexen projektiven Ebene ohne gemeinsamen Faktor schneiden sich, Multiplizitäten berücksichtigt, in *mn* Punkten.