Skript zur Vorlesung Funktionentheorie SS 2020

Hermann Schulz-Baldes

Department Mathematik
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

22. Juli 2020

Einleitung

Die Funktionentheorie ist eines der klassischen Teilgebiete der Mathematik, die in ihren Grundzügen schon im 19ten Jahrhundert von Cauchy, Riemann und Weierstraß, Laurent und Casorati entwickelt wurde, die aber auch durch eine Reihe zentraler Ergebnisse bis in die ersten Jahrzehnte des 20ten Jahrhunderts von Piccard, Mittag-Leffler, Schwarz, Rouché und vielen anderen ergänzt wurde. Es handelt sich um die Theorie von Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$, welche sich in einer Umgebung eines jeden Punktes $z \in D$ in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt oder, was sich als äquivalent herausstellt, im komplexen Sinne einmal differenzierbar sind. Solche Funktionen heißen dann analytisch oder holomorph. Wenn zudem Polstellen erlaubt werden, erhält man sogenannte meromorphe Funktionen, für die es dann das Residuenkalkül für geschlossene Wegintegrale gibt. All dies sind Begriffe und Sachverhalte, die zur Grundausbildung eines jeden Mathematiker gehören. Sie werden in vielen Zusammenhängen immer wieder verwendet, so z.B. in der Integralberechnung, der Theorie der gewöhnliche Differentialgleichungen, der Potentialtheorie, den orthogonalen Polynomen, der (analytischen) Zahlentheorie, der Funktionalanalysis, u.s.w.. Außerdem ist die Funktionentheorie ein ausgesprochen schönes Gebiet mit einfachen und klaren Konzepten. Somit dürfen Sie sich auf eine hoffentlich anregendes Semester mit der Funktionentheorie freuen.

Die erste Version dieses Skripts basiert auf einer Vorlesung aus dem WS 2006/2007 und wurde von Frank Schirmeier getippt. Im SS 2020 wurde das Skript überarbeitet und von Nora Doll verbessert.

Inhaltsverzeichnis

Vorlesungsvorgang

1. Woche vom 20.4.: Kapitel 1
2. Woche vom 27.4.: Paragraphen 2.1 und 2.2
3. Woche vom 4.5.: Paragraph 2.3
4. Woche vom 11.5.: Paragraph 2.4
5. Woche vom 18.5.: Paragraph 3.1
6. Woche vom 25.5.: Paragraphen 3.2 und 3.3
7. Woche vom 1.6.: Bergdienstag
8. Woche vom 8.6.: Paragraph 3.4
9. Woche vom 15.6.: Paragraphen 3.5 und 3.6 (Letzteres ist Zusatzmaterial)
10. Woche vom 22.6.: Paragraph 4.1
11. Woche vom 29.6.: Paragraphen 4.2 und 4.3 bis Beispiel 4.23
12. Woche vom 6.7.: Rest von Paragraph 4.3
13. Woche vom 13.7.: Paragraphen 5.1 und 5.2

1 Vorbereitungen und Grundbegriffe

Dieses Kapitel sollte in erster Linie Wiederholung ausgewählten Stoffes der Analysis und der linearen Algebra sein. Es werden Notation und Begriffsbildungen festgelegt.

1.1 Die Gaußsche Zahlenebene

In diesem Paragraph wiederholen wir Eigenschaften des Körpers der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} \;=\; \{z = x + iy \;:\; x, y \in \mathbb{R}\} \;\cong\; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\} \;=\; \mathbb{R}^2$$

- Die Vektoraddition aus dem $\mathbb{R}^2$ ist weiterhin anwendbar:

  $$z + z' \;=\; (x + x') + i(y + y')$$

  Somit ist $(\mathbb{C}, +)$ abelsche Gruppe mit Einselement $0 = (0, 0)$.

- Für die Multiplikation wird $i^2 = -1$ definiert; also gilt:

  $$z \cdot z' \;=\; (x + iy) \cdot (x' + iy') \;=\; (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

  Bezüglich der Multiplikation ist $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ abelsche Gruppe mit Einselement $1 = (1, 0)$. Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist das inverse Element

  $$z^{-1} \;=\; \frac{1}{z} \;=\; \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} \;=\; \frac{\overline{z}}{|z|^2} \;=\; \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

- Da ebenfalls das Distributivgesetz $z(z' + z'') = zz' + zz''$ gilt, ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper. Er hat $\mathbb{R}$ als Unterkörper.

- Notationen für $z = x + iy$:

  $$\begin{aligned} \Re e(z) &:= x \\ \Im m(z) &:= y \\ \overline{z} &:= x - iy \\ |z| &:= \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

  Die Komplexe Konjugation $\overline{z}$ entspricht der Spiegelung an der x-Achse; der Betrag $|z|$ liefert gerade die euklidische Länge, gemessen im $\mathbb{R}^2$.

- Zusammenhang mit dem euklidischen Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$:

  $$\langle z, z' \rangle \;=\; \langle (x, y), (x', y') \rangle \;=\; xx' + yy' \;=\; \Re e(z\overline{z'}) \;=\; \Re e(\overline{z}z')$$

- Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z \;=\; x+iy \;=\; r\cdot e^{i\phi}$$

mit $r\in[0,\infty)$ und $\phi\in(-\pi,\pi]$ gegeben durch

$$r \;=\; \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \phi \;=\; \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x})\,, & x>0 \\ -\arctan(\frac{y}{x})+\frac{\pi}{2}, & x<0,\ y>0 \\ \pi, & x<0,\ y=0 \\ -\arctan(\frac{y}{x})-\frac{\pi}{2}, & x<0,\ y<0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0 \end{cases} \tag{1}$$

Hierbei ist das Bild von arctan im Intervall $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Es gilt

$$zz' \;=\; |z||z'|e^{i(\phi+\phi')} \;=\; |z||z'|(\cos(\phi+\phi')+i\sin(\phi+\phi'))$$

Dies ist z.B. hilfreich zur Bestimmung der N.ten Einheitswurzeln

$$\{z\in\mathbb{C}\;:\;z^N=1\} \;=\; \{e^{i\frac{2\pi n}{N}}\;:\;n=0,1,...,N-1\}$$

Folgende Rechenregeln gelten:

1. Komplexe Konjugation ist additiv und multiplikativ:

$$\overline{z+z'} \;=\; \overline{z}+\overline{z'} \qquad \overline{zz'} \;=\; \overline{z}\cdot\overline{z'}$$

Außerdem: $\overline{\overline{z}} \;=\; z$.

2. Real- und Imaginärteil lassen sich durch Konjugation ausdrücken:

$$\Re e(z) \;=\; \frac{z+\overline{z}}{2}\,, \qquad \Im m(z) \;=\; \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

3. Reelle Zahlen sind invariant unter Konjugation:

$$z\in\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \iff z=\overline{z}$$

ebenso gilt

$$z\in i\mathbb{R}\subset\mathbb{C} \iff z=-\overline{z}$$

4. Immer gilt $|z|\geq 0$ und außerdem

$$|z|=0 \iff z=0$$

5. Additive Dreiecksungleichung

$$|z+z'|\leq|z|+|z'|\,,$$

multiplikativ gilt die Gleichheit: $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$.

Wegen 4. und 5. ist $(\mathbb{C},+,\cdot,|\cdot|)$ bewerteter Körper.

1.2 Riemannsche Zahlenkugel und stereographische Projektion

Betrachte die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{S}^2 \;=\; \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \;:\; \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\}$$

und identifiziere die x-y-Ebene mit der komplexen Zahlenebene. Gesucht ist nun eine Projektion $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$, die Punkten der oberen Halbkugel umkehrbar eindeutig eine komplexe Zahl zuordnet; π soll also eine Bijektion sein. Idee: Verbinde jeden Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit einer Geraden mit dem "Nordpol" $(0,0,1)$ der Kugel; der dabei entstehende Schnittpunkt mit der Kugel sei dann $\pi^{-1}(z)$. Stelle also für $z \in \mathbb{C}, z = x + iy$ eine Geradengleichung auf:

$$\pi^{-1}(z) := (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0,0,1) + t((x,y,0) - (0,0,1)) \in \mathbb{S}^2 \,.$$

Bilde hiervon die Norm:

$$1 \;=\; \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \;=\; (tx)^2 + (ty)^2 + (1-t)^2$$

Somit

$$t \;=\; \frac{2}{z\overline{z} + 1}$$

und

$$\xi_1 \;=\; \frac{2x}{z\overline{z}+1}\,, \qquad \xi_2 \;=\; \frac{2y}{z\overline{z}+1}\,, \qquad \xi_3 \;=\; 1 - \frac{2}{z\overline{z}+1}$$

Auflösen nach x und y liefert:

$$\pi((\xi_1, \xi_2, \xi_3)) \;=\; \frac{\xi_1}{1-\xi_3} + i\frac{\xi_2}{1-\xi_3}\,.$$

Die Abbildung $\pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$ ist somit die gesuchte Bijektion.

Satz 1.1. *π ist kreisverwandt, d.h. Kreise und Geraden auf $\mathbb{S}^2$, also Schnitte von $\mathbb{S}^2$ mit zweidimensionalen affinen Ebenen, werden auf Kreise und Geraden in $\mathbb{C}$ abgebildet; somit ist π auch winkeltreu.*

Beweis. Allgemein gilt, dass Kreis und Geradengleichungen in $\mathbb{C}$ die Form

$$az\overline{z} + \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z + b \;=\; 0$$

sind, wobei $a, b \in \mathbb{R}, \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \in \mathbb{C}$ mit $\alpha\overline{\alpha} - ab > 0$.

1. Fall $a = 0$. Dann muss $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ gelten und

   $$(\alpha_1 + i\alpha_2)(x - iy) + (\alpha_1 - i\alpha_2)(x + iy) + b \;=\; 2(\alpha_1 x + \alpha_2 y) + b \;=\; 0$$

   Dies ist eine allgemeine Geradengleichung auf $\mathbb{R}^2$.

2. Fall $a \neq 0$. Dividiere die Gleichung durch a:

$$z\overline{z} + \frac{\alpha}{a}\overline{z} + \frac{\overline{\alpha}}{a}z + \frac{b}{a} \;=\; 0 \quad\Longleftrightarrow\quad (z + \frac{\alpha}{a})(\overline{z} + \frac{\overline{\alpha}}{a}) \;=\; \frac{\alpha\overline{\alpha} - ab}{a^2} \;>\; 0$$

Dies ist eine Kreisgleichung in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt $M = -\frac{\alpha}{a}$ und Radius $R = \sqrt{\frac{\alpha\overline{\alpha}-ab}{a^2}}$.

3. Betrachte nun eine Kreisgleichung auf $\mathbb{S}^2$; ein solcher Kreis ist beschrieben durch den Schnitt einer zweidimensionalen affinen Ebene mit der Einheitskugel. Setze hierzu die Hess'sche Normalform einer Ebene an (mit $a_1, a_2, a_3, d \in \mathbb{R}$):

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 \;=\; d$$

Man erhält einen Schnittpunkt mit der Einheitskugel genau dann, wenn $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$ gilt und der Abstand der Ebene vom Ursprung kleiner als 1 ist, also $\sum_{j=1}^3 a_j^2 - d^2 > 0$. Einsetzen von π^{-1} liefert:

$$\begin{aligned} & a_1\frac{2x}{z\overline{z}+1} + a_2\frac{2y}{z\overline{z}+1} + a_3(1 - \frac{2}{z\overline{z}+1}) - d \;=\; 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & 2xa_1 + 2ya_2 + (z\overline{z} - 1)a_3 - d(z\overline{z}+1) \;=\; 0 \\ \Longleftrightarrow\quad & (a_3 - d)z\overline{z} + (a_1 + ia_2)\overline{z} + (a_1 - ia_2)z - a_3 - d \;=\; 0 \end{aligned}$$

Vergleich mit der Kreisgleichung in der Ebene liefert $a = a_3 - d, b = -a_3 - d$ und $\alpha = a_1 + ia_2$; außerdem sind die genannten Einschränkungen gleich:

$$\alpha\overline{\alpha} - ab \quad=\quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - d^2$$

□

1.3 Komplex lineare Abbildungen

Erinnerung:

- $\mathbb{C}$ ist eindimensionaler komplexer Vektorraum mit Basis 1 und Skalarprodukt

$$\langle z|z'\rangle_{\mathbb{C}} \;=\; \overline{z}z' \in \mathbb{C}\,.$$

- $\mathbb{C}$ ist zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis 1 und i und Skalarprodukt

$$\langle z|z'\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \Re e(\overline{z}z') \;=\; \Re e(\langle z|z'\rangle_{\mathbb{C}})\,.$$

Definition 1.2 (Linearitätsbegriffe)**.** Eine Abbildung $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{R}$-linear, wenn

$$T(x + iy) \;=\; T(1)x + T(i)y \qquad \forall\;\, x, y \in \mathbb{R}$$

gilt; sie heißt $\mathbb{C}$-linear, wenn $T(z) = T(1)z \;\;\forall\;\, z \in \mathbb{C}$ gilt.

Satz 1.3. *Eine reell lineare Abbildung $\widetilde{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch eine Matrix*

$$\widetilde{T} \;=\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R} ,$$

ist unter der Identifikation $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ genau dann komplex linear, wenn $a = d$ und $b = -c$.

Beweis. Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die zu $\widetilde{T}$ unter dem Isomorphismus $\cong$ gehörige Abbildung. Weiter sei $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \cong z = x + iy \in \mathbb{C}$. Die Matrix-Vektor-Multiplikation der Linearen Algebra ergibt

$$\widetilde{T}(x, y) \;=\; (ax + by, cx + dy) \;\cong\; (ax + by) + i(cx + dy) \;=\; T(z) .$$

Nun ist für $\lambda = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\lambda z \;=\; (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y) ,$$

und somit

$$T(\lambda z) \;=\; a(\alpha x - \beta y) \;+\; b(\beta x + \alpha y) \;+\; ic(\alpha x - \beta y) \;+\; id(\beta x + \alpha y) ,$$

wohingegen

$$\lambda T(z) \;=\; \alpha(ax + by) \;-\; \beta(cx + dy) \;+\; i\beta(ax + by) \;+\; i\alpha(cx + dy) .$$

Für komplex lineare Abbildungen gilt $T(\lambda z) = \lambda T(z)$ für all $z \in \mathbb{C}$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$, was nach Koeffizientenvergleich genau dann der Fall ist, wenn $a = d$ und $b = -c$. □

Beispiel: $T(z) = \overline{z}$ ist $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear (allerdings $\mathbb{C}$-antilinear).

Satz 1.4. *Sei $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sowohl $\mathbb{R}$-linear als auch bijektiv. Äquivalent sind:*

(i) *T ist winkeltrei, d.h. für $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist*

$$\cos(\sphericalangle(z, z')) \;=\; \Re e\Big(\frac{\overline{z}z'}{|\overline{z}| \cdot |z'|}\Big) \;=\; \Big\langle \frac{z}{|z|} , \frac{z'}{|z'|} \Big\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \Big\langle \frac{T(z)}{|T(z)|} , \frac{T(z')}{|T(z')|} \Big\rangle_{\mathbb{R}^2} .$$

(ii) *T ist Drehstreckung, d.h. es existiert ein $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $T(z) = \lambda z$ (T ist $\mathbb{C}$-linear) oder $T(z) = \lambda\overline{z}$ (T ist $\mathbb{C}$-antilinear).*

(iii) *T ist eine Ähnlichkeitstransformation, d.h. es existiert ein $S > 0$ mit*

$$\langle T(z) , T(z') \rangle \;=\; S \cdot \langle z , z' \rangle \quad \textit{für alle } z, z' \in \mathbb{C} .$$

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Setze $\lambda = T(1) \in \mathbb{C}$ (aufgrund der vorausgesetzten Injektivität von T ist $\lambda \neq 0$) und $\mu = \frac{1}{\lambda}T(i)$. Dann ist $\mu \in i\mathbb{R}$, d.h. für ein gewisses $r \in \mathbb{R}$ ist $\mu = ir$, denn wegen der Winkeltreue ist

$$0 \;=\; |T(1)| \cdot |T(i)| \langle i , 1 \rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \langle T(i) , T(1) \rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \langle \mu\lambda , \lambda \rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; |\lambda|^2 \Re e(\mu)$$

Somit gilt wegen der $\mathbb{R}$-Linearität $T(z) = T(x+iy) = T(1)x + T(i)y = \lambda(x+iry)$. Noch zu zeigen: $r \in \{\pm 1\}$. Dies lässt sich folgendermaßen einsehen:

$$|1||z| \cdot \langle T(1)\,,\, T(z)\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; |T(1)||T(z)|\langle 1\,,\, z\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; |\lambda|^2|x+iry| \cdot x$$

und

$$|z| \cdot \langle \lambda\,,\, \lambda(x+iry)\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; |z| \cdot |\lambda|^2 x$$

Dies impliziert

$$|x+iry| \;=\; |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}\,,$$

also $r \in \{\pm 1\}$.
(ii)$\Longrightarrow$(iii): Einsetzen liefert sowohl für den linearen als auch den antilinearen Fall $S = |\lambda|^2 > 0$.
(iii)$\Longrightarrow$(i): Für die Wahl $z = z'$ erhält man $|T(z)|^2 = S|z|^2$, also

$$\langle \frac{T(z)}{|T(z)|}\,,\, \frac{T(z')}{|T(z')|}\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \frac{1}{S} \cdot \frac{1}{|z| \cdot |z'|}\langle T(z)\,,\, T(z')\rangle_{\mathbb{R}^2} \;=\; \langle \frac{z}{|z|}\,,\, \frac{z'}{|z'|}\rangle_{\mathbb{R}^2}$$

was die letzte Implikation zeigt. □

1.4 Metrische Räume

Definition 1.5. Sei X Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *Metrik*, falls für alle $x, y, z \in X$ gilt:

(i) Eindeutigkeit des Nullabstands: $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y\,,$

(ii) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)\,,$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)\,.$

Dann heißt (X, d) *metrischer Raum*.

Die Definition geht auf Fréchet (1906) zurück. Es ist auch möglich, Metriken mit Wertebereich $[0,\infty] = [0,\infty) \cup \{\infty\}$ zu betrachten (siehe z.B. Buch von Burago *et al.*, *A course in metric geometry*), aber dies ist nicht der Standard.

Beispiel. 1. Auf dem normierten Vektorraum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist eine Metrik d definiert durch $d(z,z') = |z - z'|$.

2. Für eine beliebige Menge D sei

$$\mathbb{C}^D \;=\; \{f : D \to \mathbb{C} \text{ beschränkt}\} \;=\; \{\text{beschränkte komplexwertige Funktionen auf D}\}$$

Auf diesem Raum ist $\|f\|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|$ eine Norm. Setze wieder $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$.

3. Allgemeiner gilt: Wenn $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum ist, dann definiert $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik auf X.

◇

Definition 1.6. Sei (X, d) metrischer Raum. Dann wird definiert:

- Die *offene Kugel* mit Radius ϵ um x:

$$B_\epsilon(x) \; = \; \{y \in X \; : \; d(x, y) < \epsilon\} \, .$$

- Eine Menge $A \subset X$ heißt *offen*, wenn es für alle $x \in A$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A$.

- Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A^c = X \setminus A$ offen ist.

Satz 1.7. *Sei wieder (X, d) ein metrischer Raum. Dann gilt:*

(i) *X und $\emptyset$ sind offen.*

(ii) *$A_1, ..., A_n$ sind offen $\Longrightarrow \bigcap_{j=1}^n A_j$ offen*

(iii) *Sei J eventuell überabzählbare Indexmenge und $(A_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{j \in J} A_j$ offen.*

Beweis.

(i) Klar.

(ii) Sei $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j$. Dann ist $x \in A_i$ und, da A_i offen ist, gibt es jeweils eine Umgebung

$$B_{\epsilon_i}(x) \subset A_i \quad \text{für alle } i = 1, ..., n \, .$$

Setze $\epsilon = \min_{i=1,...,n}\{\epsilon_i\}$. Dann ist $B_\epsilon(x) \subset B_{\epsilon_i}(x) \quad \forall \, i$, also $B_\epsilon(x) \subset \bigcap_{j=1}^n A_j$.

(iii) Klar, da es für einen gegebenen Punkt x eine Umgebung $x \in U \subset A_j$ gibt für ein j, und diese Umgebung liegt auch in der Vereinigung.

Bemerkung. In der mengentheoretischen Topologie werden (i)-(iii) als Definition einer Topologie (Topologie ist das System offener Teilmengen) verwendet. $\diamond$

Definition 1.8. Sei (X, d) metrischer Raum und $A \subset X$ eine Teilmenge.

- Ein Punkt x heißt *Berührungspunkt* von A, wenn

$$\forall \, \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \, .$$

- Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* von A, wenn

$$\forall \, \epsilon > 0 \quad (B_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

(d.h. isolierte Punkte von A sind Berührungspunkte, aber keine Häufungspunkte).

- Die offene Menge
$$A^\circ \;=\; \bigcup_{B\subset A, B \text{ offen}} B$$
heißt das *Innere* von A.

- Die abgeschlossene Menge
$$\overline{A} \;=\; \bigcap_{A\subset B, B \text{ abgeschlossen}} B \;=\; ((A^c)^\circ)^c$$
heißt *Abschluss* von A. (Die Gleichheit folgt nach Komplementbildung aus der Definition des Inneren.)

- Die Menge
$$\partial A \;=\; \overline{A} \setminus A^\circ$$
heißt der *Rand* von A.

- Die Menge $A \subset X$ heißt *dicht* in X, wenn $\overline{A} = X$ gilt.

- Die Menge X heißt *zusammenhängend*, falls in der Situation $X = A \cup B$ mit offenen und disjunkten A, B folgt, dass $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ ist.

Satz 1.9. *Äquivalent sind:*

(1) *A abgeschlossen.*

(2) *$A = \overline{A}$.*

(3) *A enthält alle seine Berührungspunkte.*

(4) *A enthält alle seine Häufungspunkte.*

Beweis. Beweis der einzelnen Implikationen:
(1) $\Longleftrightarrow$ (2): Wenn A abgeschlossen ist, dann ist trivialerweise
$$\overline{A} \;=\; \bigcap_{A\subset B, B \text{ abgeschlossen}} B \;=\; A\,.$$
Andersherum folgt, da $\overline{A} = ((A^c)^\circ)^c = A$ gilt, dass A als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist.
(1) $\Longrightarrow$ (3): Sei $x \notin A \Longrightarrow x \in A^c$, wobei A^c als Komplement einer abgeschlossenen Menge offen ist.
$$\Longrightarrow \quad \exists\, \epsilon > 0 \;:\; B_\epsilon(x) \subset A^c \quad \Longrightarrow \quad B_\epsilon(x) \cap A \;=\; \emptyset$$
x ist also nicht Berührungspunkt von A.
(3) $\Longrightarrow$ (4): Das ist klar, weil jeder Häufungspunkt auch Berührungspunkt ist.
(4) $\Longrightarrow$ (1): Sei $x \in A^c \Longrightarrow x$ ist nicht Häufungspunkt von A; daher gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $(B_\epsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, also $B_\epsilon(x) \subset A^c$. Für jedes $x \in A^c$ lässt sich also eine offene Umgebung finden, die wieder ganz in A^c liegt; A^c ist also offen und A somit abgeschlossen. □

Weitere elementare Eigenschaften:

- Die Menge $\overline{A}$ kann folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\overline{A} \;=\; \{x \in X \;:\; x \text{ ist ein Berührungspunkt von } A\}\,.$$

Denn sei y Berührungspunkt von A; dann gilt nach Definition des Berührungspunktes $\forall\, \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. Setze $C := A^c$. Dann ist $\overline{A} = (C^\circ)^c$. Zu zeigen ist also, dass y nicht in C° liegt.
Wir nehmen $y \in C^\circ$ an. Nach Definition des Inneren ($C^\circ = \bigcup_{B \subset C, B \text{ offen}} B$) liegt y in einem offenen B, das ganz in C enthalten ist. Da aber nicht einmal eine ϵ-Umgebung gefunden werden kann, die ganz in C liegt, kann es so ein offenes B nicht geben. Also liegt y nicht in C°, sondern in $(C^\circ)^c = \overline{A}$.
Sei andersherum $y \in \overline{A}$; zu zeigen ist dann $\forall\;\; \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(y) \cap A \neq \emptyset$. Annahme: $\exists\, \delta > 0\;:$ $B_\delta(y) \cap A = \emptyset$. Setze dann $C = (B_\delta(y))^c$; offensichtlich gilt dann $A \subset C$, C abgeschlossen und $C \cap B_\delta(y) = \emptyset$, also $y \notin C$. Nach Definition ($\overline{A} = \bigcap_{A \subset B, B \text{ abgeschlossen}} B$) muss y in jeder abgeschlossenen Obermenge von A enthalten sein, also auch in C; dies liefert den gewünschten Widerspruch. Also ist y Berührungspunkt von A.

- Die Menge A° kann man folgendermaßen schreiben:

$$A^\circ \;=\; \{x \in X \;:\; \exists\, \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subset A\}$$

Denn A° ist offen, daher hat jedes $y \in A^\circ$ trivialerweise die geforderte Eigenschaft; falls es andersherum für $y \in X$ ein $\epsilon > 0$ gibt mit $B_\epsilon(x) \subset A$, so ist $B_\epsilon(y)$ Bestandteil der Vereinigung in der Definition von A° und somit $y \in A^\circ$.

- Außerdem:

$$\partial A \;=\; \{x \in X \;:\; \forall\, \epsilon > 0 \; gilt \; B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap (A^c) \neq \emptyset\}$$

Nach Definition ist $\partial A \;=\; \overline{A} \setminus A^\circ$ und nach dem vorher gezeigten

$$\begin{aligned}
\partial A \;&=\; \{x \in X \;:\; x \text{ ist Berührungspunkt von } A\} \setminus \{x \in X \;:\; \exists\, \epsilon > 0 \text{ mit } B_\epsilon(x) \subset A\} \\
&=\; \{x \in X \;:\; x \text{ ist Berührungspunkt von } A \text{ und } \forall\, \epsilon > 0 \text{ ist } B_\epsilon(x) \not\subset A\} \\
&=\; \{x \in X \;:\; \forall\, \epsilon > 0 \quad B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } \forall\, \epsilon > 0 \text{ ist } B_\epsilon(x) \not\subset A\}
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

- Offensichtlich gilt (wobei $\oplus$ eine disjunkte Vereinigung bezeichne):

$$A^\circ \oplus \partial A \oplus (\overline{A})^c \;=\; \overline{A} \oplus (\overline{A})^c \;=\; X$$

Definition 1.10 (Heine-Borel-Definition der Kompaktheit)**.** Sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$. K heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung hat. In Formeln: K kompakt $\Longleftrightarrow$

$$\left(K \subset \bigcup_{j \in J} A_j \text{ mit } A_j \text{ offen, wobei } J \text{ beliebig} \implies \exists\, j_1, ..., j_n \in J \text{ mit } K \subset \bigcup_{m=1}^{n} A_{j_m} \right).$$

Satz 1.11. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann gilt:*

(i) *K ist abgeschlossen.*

(ii) *Sei $A \subset K$, A abgeschlossen. Dann ist A ebenfalls kompakt.*

(iii) *K ist beschränkt, d.h.*

$$\sup_{x,y \in K} d(x,y) < \infty\,.$$

Beweis. (i) Sei $x \in K^c$ fest. Für alle $y \in K$ wähle $\epsilon_{xy} > 0$ mit $B_{\epsilon_{xy}}(x) \cap B_{\epsilon_{xy}}(y) = \emptyset$. Dies ist in einem Hausdorff-Raum (und jeder metrische Raum ist ein Hausdorff-Raum) möglich. Somit ist $\left(B_{\epsilon_{xy}}(y)\right)_{y\in K}$ offene Überdeckung von K und aufgrund der Kompaktheit gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\left(B_{\epsilon_{xy_i}}(y)\right)_{y_i\in\{1,\dots,n\}}$. Setze $\delta := \min_{j=1,\dots,n} \epsilon_{xy_j} > 0$. Dann ist $B_\delta(x) \subset K^c$ eine offene Umgebung, K^c also offen und K abgeschlossen.

(ii) Sei $A \subset \bigcup_{j\in J} A_j$, also $(A_j)_{j\in J}$ offene Überdeckung von A. Dann ist $\{A^c, (A_j)_{j\in J}\}$ offene Überdeckung von K. K ist kompakt, also ist auch $\{A^c, (A_j)_{j\in J_0}\}$ (J_0 geeignet gewählte endliche Teilindexmenge) offene Überdeckung von K. Dann muss auch $(A_j)_{j\in J_0}$ endliche Teilüberdeckung von A sein, A ist also kompakt.

(iii) Sei $(B_r(x))_{x\in K}$ offene Überdeckung mit $r > 0$. Wegen der Kompaktheit gibt es eine endlich Teilüberdeckung $(B_r(x_m))_{m=1\dots M}$. Folglich ist der Durchmesser von $K \leq M \cdot 2r < \infty$. □

Definition 1.12. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und $x \in X$.

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x (symbolisch: $\lim_{n\to\infty} x_n = x$), wenn $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon)$ mit $x_n \in B_\epsilon(x)\ \forall\, n \geq N$.

(ii) x heißt Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn $\forall\, \epsilon > 0$ enthält $B_\epsilon(x)$ unendlich viele Folgenglieder.

(iii) X heißt folgenkompakt, wenn jede Folge in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

(iv) X heißt abzählbar kompakt, wenn jede Folge in X einen Häufungspunkt besitzt.

Bemerkung. Es ist zu beachten, dass der Begriff des HP x einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht mit dem einer Menge (Definition 1.8) zusammenfällt, d.h. x ist im allgemeinen lediglich Berührungspunkt der Menge der Folgenglieder $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, wie das Beispiel der konstante Folge zeigt. ◇

Lemma 1.13 (Lebesgue'sches Überdeckungslemma)**.** *Sei (X,d) ein metrischer Raum und zusätzlich abzählbar kompakt, $(A_j)_{j\in J}$ offen mit $X \subset \bigcup_{j\in J} A_j$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ (die sogenannte Lebesgue'sche Zahl), so dass $\forall\, x \in X\ \exists\, j \in J$ mit $B_\delta(x) \subset A_j$.*

Beweis. Gegenannahme: Es gibt kein solches δ, also für jedes ausprobierte $\epsilon > 0$ gibt es mindestens ein $x \in X$, sodass $B_\epsilon(x) \not\subset A_j\ \forall\, j$. Konkret: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x_n \in X$ mit $B_{\frac{1}{n}}(x_n) \not\subset A_j\ \forall\, j \in J$. Nach Voraussetzung gibt es einen Häufungspunkt $x_0 \in X$ von dieser so definierten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die A_j eine Überdeckung von X bilden, gibt es ein $j_0 \in J$ mit

$x_0 \in A_{j_0}$. Sei nun $\epsilon > 0$ so gewählt, dass $B_\epsilon(x_0) \subset A_{j_0}$ gilt; dies ist möglich, da die A_j offen sind. Wähle eine ganze Zahl $K \geq \frac{2}{\epsilon}$ mit $x_K \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_0)$ (dies ist möglich, da x_0 Häufungspunkt ist). Dann folgt:

$$B_{\frac{1}{K}}(x_K) \;\subset\; B_{\frac{\epsilon}{2}}(x_K) \;\subset\; B_\epsilon(x_0) \;\subset\; A_{j_0}$$

Dieses K erzeugt den gewünschten Widerspruch, da einerseits $B_{\frac{1}{K}}(x_K) \not\subset A_j \;\forall\; j \in J$ und andererseits $B_{\frac{1}{K}}(x_K) \subset A_{j_0}$ gelten muss. □

Lemma 1.14. *Sei (X, d) ein abzählbar kompakter metrischer Raum. Dann gibt es $\forall\ \epsilon > 0$ endlich viele $x_1, ..., x_r \in X$ mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\epsilon(x_j)$.*

Beweis. Gegenannahme: Es gibt ein bestimmtes $\epsilon > 0$ mit $X \neq \bigcup_{j=1}^r B_\epsilon(x_r)$ bei beliebiger endlicher Wahl von r und $x_1, ..., x_r$. Wähle $x_1 \in X$ beliebig. Dann gibt es ein x_2 mit $d(x_1, x_2) \geq \epsilon$ und iterativ ein x_n mit $d(x_n, x_m) \geq \epsilon \;\forall\; m = 1, ..., n-1$ (denn wenn dies nicht gelänge, dann hätten alle Punkte in X einen Abstand, der kleiner als ϵ ist, zu mindestens einem der bisherigen Folgenglieder $(x_m)_{m<n}$; somit würden alle Punkte von X von der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{n-1} B_\epsilon(x_j)$ überdeckt werden, Widerspruch zur Gegenannahme). Man erhält also eine unendliche Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $d(x_n, x_m) \geq \epsilon \;\forall\; n \neq m$; diese Folge hat also keinen Häufungspunkt, was einen Widerspruch zur abzählbaren Kompaktheit bedeutet. □

Satz 1.15. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Äquivalent sind:*

(i) *X ist kompakt.*

(ii) *X ist folgenkompakt.*

(iii) *X ist abzählbar kompakt.*

Beweis. Die Äquivalenz (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) ist offensichtlich.

Schritt (iii)$\Longrightarrow$(i): Sei $(A_j)_{j\in J}$ offene Überdeckung des abzählbar kompakten Raumes X. Nach Lemma 12 existiert die Lebesgue-Zahl δ und nach Lemma 13 ist es möglich, $x_1, ..., x_r$ mit $X = \bigcup_{j=1}^r B_\delta(x_j)$ zu wählen. Da aber nach Lemma 12 $B_\delta(x_j) \subset A_{m_j}$ für ein gewisses m_j gilt, ist $(A_{m_j})_{j=1,...,r}$ eine endliche Teilüberdeckung von X.

Schritt (i)$\Longrightarrow$(iii): Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge im kompakten Raum X. Setze $A_n = \overline{\{x_j \;:\; j \geq n\}}$. Dann ist A_n abgeschlossen und $A_n \subset A_{n-1}$.

Annahme: $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$. Dann ist $X = \overline{\emptyset}^c = \overline{\bigcap_{n=1}^\infty A_n}^c = \bigcup_{n=1}^\infty \overline{A_n}^c$ und wegen der Kompaktheit von X bereits $X = \bigcup_{n=1}^N \overline{A_n}^c$, was $\bigcap_{n=1}^N A_n = \emptyset$ zur Folge hätte, was offensichtlich nicht stimmen kann. Also ist $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \neq \emptyset$.

Sei nun $x \in \bigcap_{n=1}^\infty A_n$. Das bedeutet, dass $x \in \overline{\{x_j \;:\; j \geq n\}} \;\forall\; n$; somit (oben bewiesene Eigenschaft) ist x Berührungspunkt von $\{x_j \;:\; j \geq n\}$ für alle n, also $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$B_\epsilon(x) \cap \{x_j \;:\; j \geq n\} \neq \emptyset \qquad \forall\, \epsilon > 0$$

Somit ist (durch Vertauschung der Quantoren) x ein Häufungspunkt der Folge. □

Satz 1.16 (Heine-Borel)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$. Dann ist A genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis. "$\Longrightarrow$" wurde in Satz 1.11 bewiesen.
"$\Longleftarrow$": Sei A beschränkt und abgeschlossen. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß besitzt jede beschränkte Folge auf dem $\mathbb{R}^d$ einen Häufungspunkt; dieser liegt aufgrund der Abgeschlossenheit sogar in A (denn Folgenhäufungspunkte müssen zumindestens Berührungspunkte sein; diese sind aber identisch mit $\overline{A} = A$). Somit besitzt jede Folge in A einen Häufungspunkt in A; dann ist A abzählbar kompakt und somit nach Satz 14 kompakt. $\square$

Definition 1.17. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge auf dem metrischen Raum (X, d).

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt Cauchyfolge, wenn $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N = N(\epsilon)$ mit $d(x_n, x_m) < \epsilon\ \ \forall\, n, m \geq N$.

(ii) X heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz 1.18. *Sei (X, d) vollständiger metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist A genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist.*

Beweis. "$\Longrightarrow$": Sei x Berührungspunkt von A. Dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in A\, \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Wegen der Vollständigkeit liegt dann auch $x \in A$, also ist $A = \overline{A}$, also A abgeschlossen.
"$\Longleftarrow$": Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in A. Da X vollständig ist, existiert der Grenzwert $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ und liegt zumindest in X. x muss dann Berührungspunkt von A sein (vergleiche hierzu die Definitionen von Berührungspunkt und Cauchy-Folge); da aber A abgeschlossen ist, liegt x in A. Jede Cauchyfolge konvergiert demnach in A; A ist vollständig. $\square$

1.5 Stetige Funktionen

Definition 1.19. Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume und $a \in X$, $b \in Y$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

(i) Der *Limes* $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert und ist gleich b, wenn

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \text{ mit }\ f(B_\delta(a) \setminus \{a\}) \subset B_\epsilon(b)$$

oder äquivalent

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \text{ mit }\ 0 < d_X(x, a) < \delta \ \ \Longrightarrow\ \ d_Y(f(x), b) < \epsilon$$

(ii) f ist *stetig bei* a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Äquivalent hierzu ist

$$\forall\, \epsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0\ \text{ mit }\ B_\delta(a) \subset f^{-1}(B_\epsilon(f(a)))$$

oder

$$\forall \text{ Folgen }\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{ mit }\ \lim_{n\to\infty} x_n\ =\ a \text{ gilt } \lim_{n\to\infty} f(x_n)\ =\ f(a)$$

(iii) f ist *stetig in* X, wenn f in allen Punkten $a \in X$ stetig ist.

Satz 1.20. *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ eine Abbildung. Äquivalent sind:*

(i) *f ist stetig.*

(ii) *Urbilder offener Mengen sind offen, d.h. $f^{-1}(A)$ ist offen in X für alle $A \subset Y$ offen.*

(iii) *Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Sei $A \subset Y$ offen, $x \in f^{-1}(A)$. Dann gibt es ein y mit $f(x) = y \in A$ und, da A offen ist, ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(y) \subset A$. Nach Definition der $\epsilon - \delta-$Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B_\epsilon(y)) \subset f^{-1}(A)$; also ist $f^{-1}(A)$ offen.
(ii)$\Longrightarrow$(i): Sei $B_\epsilon(f(a))$ offen. Nach Voraussetzung ist $f^{-1}(B_\epsilon(f(a))) =: C$ offen; außerdem ist trivialerweise $a \in C$. Wegen der Offenheit gibt es ein $\delta > 0$ mit $B_\delta(a) \subset C$, d.h. f ist $\epsilon-\delta-$stetig bei a.
(ii)$\Longleftrightarrow$(iii) folgt aus der Vertauschbarkeit der Urbildnahme $f^{-1}(\cdot)$ mit allen Mengenoperationen, insbesondere $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$. □

Bemerkung. Hintereinanderausführung stetiger Abbildungen ist stetig. Dies folgt aus vorhergehendem Theorem und folgender Identität:

$$(g \circ f)^{-1}(A) \;=\; f^{-1}(g^{-1}(A)).$$

◇

Satz 1.21. *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig. Dann gilt:*

(i) *X ist kompakt $\Longrightarrow$ $f(X)$ ist kompakt.*

(ii) *Allgemeiner: $A \subset X$ kompakt $\Longrightarrow$ $f(A)$ ist kompakt.*

(iii) *X ist zusammenhängend $\Longrightarrow f(X)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. (ii) (was dann auch (i) impliziert): Sei $(B_j)_{j \in J}$ offene Überdeckung von $f(A)$. Dann ist $(f^{-1}(B_j))_{j \in J}$ offene Überdeckung von A, von der es aufgrund der Kompaktheit eine endliche Teilüberdeckung $(f^{-1}(B_{j_m}))_{m=1,\dots,r}$ gibt. Wende auf diese f an; somit erhält man eine endliche offene Teilüberdeckung $(B_{j_m})_{m=1,\dots,r}$ von $f(A)$.
Zu (iii): Sei $f(X) = A \cup B$ mit A, B offen und disjunkt, also $A \cap B = \emptyset$. Dann ist $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, da die Urbildnahme mit Mengenoperationen vertauscht. Da dies eine offene disjunkte Zerlegung von X ist und X selber zusammenhängend ist, so folgt nach Definition von "zusammenhängend", dass $f^{-1}(A) = \emptyset$ oder $f^{-1}(B) = \emptyset$. Somit ist aber auch entweder $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$, also $f(X)$ zusammenhängend. □

Satz 1.22. *Sei $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ stetig und X kompakt. Dann ist f gleichmäßig stetig, d.h.*

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \text{ mit } d_X(x, x') < \delta$$

folgt

$$d_Y(f(x),\, f(x')) < \epsilon$$

(*d.h. die Wahl des δ bei vorgegebenem ϵ hängt nicht mehr vom Punkt ab, sondern gilt global*).

Beweis. Gegenannahme: $\forall\, n \geq 1\ \exists\, x_n,\, x'_n$ mit $d_X(x_n, x'_n) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(x'_n)) \geq \epsilon$ (d.h. egal wie klein das δ gewählt wird, man findet immer Punkte, die dem Satz widersprechen). X ist kompakt und somit folgenkompakt; daher gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ der x_n. Es sei $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$. Dann gilt aber wegen der Dreiecksungleichung:

$$d_X(x_0,\, x'_{n_k}) \;\leq\; d_X(x_0,\, x_{n_k}) + d_X(x_{n_k},\, x'_{n_k}) \;<\; d_X(x_0,\, x_{n_k}) + \frac{1}{n_k}$$

Dies geht gegen 0 für $k \to \infty$, also konvergiert auch die Teilfolge $(x'_{n_k})_{k\geq 1}$ der x'_n gegen x_0. Nun nutzen wir die Stetigkeit von f aus:

$$y \;=\; f(x_0) \;=\; \lim_k \; f(x_{n_k}) \;=\; \lim_k \; f(x'_{n_k})$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass die Bilder der $x_n,\, x'_n$ immer mindestens ϵ voneinander entfernt liegen. □

Definition 1.23. (i) Sei X Menge, $(Y,\, d_Y)$ metrischer Raum. Sei

$$\mathcal{F}(X,Y) \;=\; \{f : X \to Y\}$$

die Menge der Abbildungen von X nach Y, sowie deren Teilmenge

$$\mathcal{F}_b(X,\, Y) \;=\; \{f : X \to Y \text{ beschränkt}\}$$

Dann ist $\rho_X : \mathcal{F}(X,Y) \times \mathcal{F}(X,Y) \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\rho_X(f,\, g) \;=\; \sup_{x\in X} d_Y(f(x), g(x))$$

Auf $\mathcal{F}_b(X,Y)$ ist dies eine Metrik.

(ii) Konvergenz bzgl. ρ_X heißt *uniforme* (*gleichmäßige*) *Konvergenz* auf X.

(iii) Falls $(X,\, d_X)$ ebenfalls metrischer Raum, dann gibt es Untermengen

$$C(X,\, Y) \;=\; \{f : X \to Y \text{ stetig}\} \;\subset\; \mathcal{F}(X,\, Y)$$

und

$$C_b(X,\, Y) \;=\; \{f : X \to Y \text{ stetig und beschränkt}\} \;\subset\; \mathcal{F}_b(X,\, Y)\,.$$

Im Spezialfall $(Y,\, d_Y) = (\mathbb{C},\, |\cdot|)$ sind zusätzliche Strukturen gegeben: $\mathcal{F}(X,\mathbb{C}) =: \mathcal{F}(X)$, $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{C}) =: \mathcal{F}_b(X)$, $C(X,\mathbb{C}) =: C(X)$ und $C_b(X,\mathbb{C}) =: C_b(X)$ sind Vektorräume, sogar Algebren, weil Summen und Produkte von stetigen Funktionen wieder stetig bez. beschränkt sind. In diesem Fall stammt ρ_X von der Supremumsnorm ab:

$$\|f\|_{\infty,\,X} \;=\; \sup_{x\in X} |f(x)| \quad\Longrightarrow\quad \rho_X(f,\, g) \;=\; \|f-g\|_{\infty,\,X}$$

Bemerkung. Auf $\mathcal{F}(X,Y)$ und $C(X,Y)$ ist ρ_X nur eine Metrik im erweiterten Sinne, d.h. der Wert ∞ wird angenommen. $\diamond$

Satz 1.24. *Uniforme Limiten stetiger Funktionen sind stetig, d.h.*

$$\Big(f_n \in C(X,Y),\ f \in \mathcal{F}(X,Y),\ \lim_{n\to\infty} \rho_X(f_n, f) = 0\Big) \Longrightarrow f \in C(X,Y)$$

Beweis. (Typisches Beispiel eines "3ϵ Argument") Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Gesucht ist ein $\delta > 0$ mit

$$d_X(x, x') < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(x')) < \epsilon\,.$$

Wegen der uniformen Konvergenz gibt es ein N mit

$$\rho_X(f_n,\, f) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n \geq N\,.$$

Wegen der Stetigkeit der f_n bei x gibt es (für $n = N$) ein $\delta > 0$ mit

$$d_X(x, x') < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f_N(x), f_N(x')) < \frac{\epsilon}{3}$$

Also gilt für $d_X(x, x') < \delta$:

$$d_Y(f(x), f(x')) \ \leq\ d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(x')) + d_Y(f_N(x'), f(x'))\ <\ 3\,\frac{\epsilon}{3}\ =\ \epsilon$$

$\square$

Satz 1.25 (Cauchy-Kriterikum für uniforme Konvergenz)**.** *Seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ Abbildungen. Dann ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform konvergent auf X genau dann, wenn $(f_n)_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm ρ_X ist, d.h.*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \ \textit{mit}\ \rho_X(f_n,\, f_m) < \epsilon\ \forall\, n, m \geq N$$

Beweis. „$\Longrightarrow$“ ist klar.

„$\Longleftarrow$“: Für alle $x \in X$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \rho_X(f_n, f_m)$; also ist für festes x die Punktfolge $(f_n(x))_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ ist vollständig, für jedes x existiert also der punktweise Grenzwert $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Somit ist die Grenzfunktion f gegeben.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Konvergenz uniform ist. Sei dazu $\epsilon > 0$. Wähle $N = N(\epsilon)$, so dass

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, n, m \geq N \quad \forall\, x \in X\,.$$

Dies geht, da $(f_n)_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge bzgl. ρ_X ist. Wähle außerdem für jedes x ein $m = m(x) \geq N$ mit $|f(x) - f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Dies geht wegen der punktweisen Konvergenz. Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
\rho(f_n, f) &= \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \ \leq\ \sup_{x\in X}(|f_n(x) - f_{m(x)}(x)| + |f_{m(x)}(x) - f(x)|) \\
&\leq \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_{m(x)}(x)| + \sup_{x\in X} |f_{m(x)}(x) - f(x)| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}\ =\ \epsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Korollar 1.26. *Der metrische Raum*

$$C_b(X) \;=\; (C_b(X, \mathbb{C}),\, \rho_X)$$

ist vollständig.

Beweis. Jede Cauchy-Folge in ρ_X ist nach Satz 1.25 uniform konvergent. Nach Satz 1.24 ist der Limes zudem stetig, also in $C_b(X)$. □

In der Funktionentheorie werden meist Abbildungen auf offenen Mengen betrachtet. Für eine Folge solcher Abbildungen liegt oft keine uniforme Konvergenz vor. Z.B., betrachte $f_n(z) = z^n$ für $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}$. Trotzdem ist der Limes $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) = 0$ stetig auf der Kreisscheibe $\mathbb{D}$. Die Stetigkeit dieser Limesfunktion folgt nicht aus Satz 1.24. Es ist eines der Verdienste von Weierstraß erkannt zu haben, dass ein anderer Konvergenzbegriff in der Funktionentheorie (aber auch anderswo) hilfreich ist (siehe insbesondere Satz 1.29).

Definition 1.27. Seien $f_n,\, f \,:\, X \to \mathbb{C}$ Abbildungen. $(f_n)_{n\geq 1}$ heißt *kompakt konvergent* auf X gegen f, wenn $(f_n)_{n\geq 1}$ für alle kompakten $K \subset X$ uniform gegen f auf K konvergiert.

Bemerkung. Falls X kompakt ist, folgt aus kompakter Konvergenz auf X auch die uniforme Konvergenz auf X. ◇

Satz 1.28. *Seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ Abbildungen, und $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere lokal uniform (d.h. $\forall\, x \in X\ \exists\, \delta > 0$ mit $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert uniform auf $B_\delta(x)$). Dann ist $(f_n)_{n\geq 1}$ kompakt konvergent auf X.*

Beweis. Wähle $\delta = \delta(x)$ wie im Satz erklärt. Sei $K \subset X$ kompakt. Dann ist $(B_{\delta(x)}(x))_{x\in K}$ eine offene Überdeckung von K, von der es eine endliche Teilüberdeckung $(B_{\delta(x_l)}(x_l))_{l=1\ldots r}$ geben muss. Dann konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ uniform auf

$$B_{\delta(x_1)}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\delta(x_r)}(x_r) \supset K$$

(denn für $\epsilon > 0$ setze $N(\epsilon) = \max(N_{x_1}(\epsilon), \ldots, N_{x_r}(\epsilon))$). □

Bemerkung. In lokalkompakten Räumen (d.h. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung) gilt die Umkehrung dieses Satz, d.h. die kompakte Konvergenz impliziert die lokal uniforme. ◇

Der folgende Satz wird genau wie Satz 1.24 bewiesen.

Satz 1.29. *Seien $f_n : X \to \mathbb{C}$ stetige Abbildungen, und $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere lokal uniform auf X gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$. Dann ist die Limesfunktion f stetig.*

Definition 1.30. Seien $u_n : X \to \mathbb{C}$ Abbildungen, $n \in \mathbb{N}$. Betrachte die dazugehörende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \;\; =: \;\; \sum_{n\geq 1} u_n\,.$$

Man sagt, $\sum_{n\geq 1} u_n$ *konvergiert* (*uniform auf* X, *kompakt auf* X), wenn die Funktionenfolge der Partialsummen

$$f_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} u_k$$

konvergiert (uniform auf X, kompakt auf X).

Bemerkung. Das Cauchy-Kriterium für uniforme Konvergenz überträgt sich direkt auf Reihen, d.h. uniforme Konvergenz ist äquivalent zur Konvergenz in der Supremumsnorm ρ_X. ◇

Satz 1.31 (Majorantenkriterium von Weierstraß, „M-Test“). *Für $n \in \mathbb{N}$, seien $u_n : X \to \mathbb{C}$ Abbildungen und $M_n \geq 0$ Konstanten derart, dass*

$$\sup_{x\in X} |u_n(x)| \;\leq\; M_n\,.$$

Wenn die Zahlenfolge $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ konvergiert, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ uniform auf X.

Beweis. Für alle $m < n$ ist

$$\sup_{x\in X} \Big|\sum_{k=m}^{n} u_k(x)\Big| \;\leq\; \sup_{x\in X} \sum_{k=m}^{n} |u_k(x)| \;\leq\; \sum_{k=m}^{n} M_k\,.$$

Zu gegebenem $\epsilon > 0$ gibt es ein wegen der Konvergenz der Zahlenfolge ein $N = N(\epsilon)$ mit

$$\sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon \qquad \forall\, n, m \geq N\,.$$

Somit erfüllen die Partialsummen $f_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ das Cauchy-Kriterium der uniformen Konvergenz:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \qquad \forall\, n,\, m \geq N\,.$$

Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiert daher uniform auf X. □

Ähnlich wie kompakte Konvergenz lokale Eigenschaften uniformer Konvergenz beschreibt, führt man die normale Konvergenz ein:

Definition 1.32. Seien wieder $u_n : X \to \mathbb{C}$ Abbildungen. Die Reihe $\sum_{n\geq 1} u_n$ *konvergiert normal* auf X, wenn es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,\, B_\epsilon(x)} \;=\; \sum_{n\geq 1} \left(\sup_{y\in B_\epsilon(x)} |u_n(y)| \right) < \infty\,.$$

Hierbei bedeutet $\|\cdot\|_{\infty,\, A}$ die Supremumsnorm einer auf A eingeschränkten Funktion.

Bemerkung.

(i) Nach dem Majorantenkriterium impliziert die normale Konvergenz die lokale uniforme Konvergenz (und somit auch die kompakte Konvergenz).

(ii) Normale Konvergenz gilt für Potenzreihen immer innerhalb des Konvergenzradius' (mehr dazu später).

(iii) In einem lokalkompakten Raum X gilt auch die Umkehrung der ersten Bemerkung: $\sum_{n\geq 1} u_n$ normal konvergent $\Longleftrightarrow \forall\, K \subset X$ kompakt gilt:

$$\sum_{n\geq 1} \|u_n\|_{\infty,\,K} < \infty\,.$$

$\diamond$

Der letzte Sätze dieses vorbereitenden Kapitels betreffen die absolute Konvergenz von Reihen und die damit einhergehende Umordnungseigenschaft.

Satz 1.33. *Sei eine Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ komplexer Zahlen gegeben. Dann ist äquivalent:*

(i) $\sum_{n\geq 1} z_n$ *ist absolut konvergent.*

(ii) $\sum_{n\geq 1} |z_n| < \infty$.

(iii) *Jede Umordnung der Reihe konvergiert gegen den gleichen Wert, d.h. $\forall\ \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Bijektion gilt*

$$\sum_{k\geq 1} z_{\tau(k)} \quad = \quad \sum_{k\geq 1} z_k\,.$$

Beweis. Die Äquivalenz (i)$\Longleftrightarrow$(ii) ist klar, denn so ist absolute Konvergenz definiert.
(ii)$\Longrightarrow$(iii). Sei $\epsilon > 0$ und eine Bijektion τ gegeben. Wähle $N = N(\epsilon)$, so dass

$$\sum_{n\geq N} |z_n| < \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Sei $M = M(\epsilon) \geq N$, so dass $\tau^{-1}(1), ..., \tau^{-1}(N) \leq M$. Dann gibt es für alle $m \geq M$ eine Indexmenge J mit

$$\inf_{k\in J} k \geq N$$

so dass insbesondere

$$|\sum_{k=1}^{m} z_{\tau(k)} - \sum_{n=1}^{N} z_n| \;=\; \sum_{n\in J} |z_n| \;\leq\; \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Somit: Für $S = \sum_{n\geq 1} z_n$ und $m \geq M$ gilt:

$$|S - \sum_{k=1}^{m} z_{\tau(k)}| \;\leq\; |\sum_{n=1}^{N} z_n - \sum_{k=1}^{m} z_{\tau(k)}| + \frac{\epsilon}{2} \;\leq\; \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \;=\; \epsilon$$

(iii)$\Longrightarrow$(ii) Übung. $\square$

Satz 1.34. *Seien*

$$\sum_{k\geq 1} z_k, \quad \sum_{k\geq 1} z'_k$$

absolut konvergente Reihen und $(\tau, \tau') : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann ist die Produktreihe*

$$\sum_{k\geq 1} z_{\tau(k)} z'_{\tau'(k)} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} z'_n\right)$$

absolut konvergent.

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}$ setze

$$M \;=\; \max_{1\leq n\leq N} \{\tau(n),\, \tau'(n)\}\,.$$

Dann ist

$$\sum_{n=1}^{N} |z_{\tau(n)} z'_{\tau'(n)}| \;\leq\; \left(\sum_{n=1}^{M} |z_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{M} |z'_n|\right) < \infty\,.$$

Die Produktreihe zu diesem τ ist absolut konvergent; nach Satz 1.33 konvergiert auch jede Produktreihe, die zu einer anderen Permutation π gebildet wurde, gegen den gleichen Wert S; insbesondere die Rechteckreihe

$$S \;=\; \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{N} z'_n\right) \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} z_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} z'_n\right)\,.$$

□

Der Begriff der normalen Konvergenz ist so gewählt, dass absolute Konvergenz lokal verwendet werden kann:

Satz 1.35. *Seien* $u_n : X \to \mathbb{C}$ *Abbildungen,*

$$\sum_{n\geq 1} u_n$$

normal konvergent auf X *gegen* f, $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann ist*

$$\sum_{n\geq 1} u_{\tau(n)}$$

normal konvergent auf X *gegen* f*.*

Beweis. Übung. □

Satz 1.36. *Seien* $u_n, u'_n : X \to \mathbb{C}$ *Abbildungen,*

$$\sum_{n\geq 1} u_n \quad \textit{und} \quad \sum_{n\geq 1} u'_n$$

normal konvergent und $(\tau,\, \tau') : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann ist*

$$\sum_{k \geq 1} u_{\tau(k)} u'_{\tau'(k)} \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n\right)$$

normal konvergent.

Beweis. Übung. $\square$

2 Holomorphe Funktionen

2.1 Definition und Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Definition 2.1. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $d \in D$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung.

(i) f heißt *komplex differenzierbar* in d mit Ableitung $f'(d) \in \mathbb{C}$, wenn

$$f'(d) = \lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{z - d}$$

existiert.

(ii) f heißt *holomorph* oder *analytisch* auf D, wenn f komplex differenzierbar in allen Punkten $d \in D$ ist.

Bemerkung. Der wesentliche Unterschied zu reellen Differenzierbarkeit (im Sinne der Analysis 1) ist, dass der Limes in $\mathbb{C}$ betrachtet wird, d.h. für alle Folgen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = d$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n) - f(d)}{z_n - d} \;=\; f'(d)$$

Insbesondere sind also alle Richtungsableitungen in $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gleich. $\diamond$

Satz 2.2. *Folgende Formulierungen sind für stetiges f äquivalent:*

(i) *f ist komplex differenzierbar in d mit Ableitung $f'(d)$.*

(ii) $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ *mit*

$$|f(z) - f(d) - f'(d)(z-d)| \;\leq\; \epsilon |z - d| \quad \forall\, z \in B_\delta(d)\,.$$

(iii) *Es gibt eine stetige Funktion $\phi : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$f(z) \;=\; f(d) + (z-d)\phi(z)$$

und $\phi(d) = f'(d)$.

(iv) *Der Rest $R : D \to \mathbb{C}$ definiert durch die Abweichung der Funktion f von ihrer Linearisierung am Punkt d, also*

$$f(z) \;=\; f(d) + (z-d)f'(d) + R(z)$$

erfüllt

$$\lim_{z\to d} \frac{R(z)}{z-d} \;=\; 0\,.$$

Beweis. (i)$\Longleftrightarrow$(ii): Vorausgesetzt ist mit

$$\phi(z) \; = \; \frac{f(z) - f(d)}{z - d}$$

die Aussage

$$\lim_{z \to d} \phi(z) - f'(d) \; = \; 0 \, .$$

Also $\forall \; \epsilon > 0 \; \exists \; \delta > 0$ so dass $|\phi(z) - f'(d)| \leq \epsilon \quad \forall \; z \in B_\delta(d)$. Beidseitige Multiplikation mit $|z - d| \geq 0$ liefert die Behauptung; Rückwärtsrechnen (für $z \neq d$) liefert unmittelbar die Äquivalenz.
(i)$\Longrightarrow$(iii): Setze $\phi(z)$ wie oben. Dann ist ϕ stetig für $z \neq d$ und Umformung liefert

$$f(z) \; = \; f(d) + (z - d)\phi(z) \, .$$

Stetigkeit bei d und $\phi(d) = f'(d)$ sieht man wie folgt:

$$\phi(d) \; = \; \phi(\lim_{z \to d} z) \; = \; \frac{f(\lim_{z \to d} z) - f(d)}{\lim_{z \to d} z - d} \; = \; \lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{z - d} \; = \; \lim_{z \to d} \phi(z)$$

(da f stetig ist).
(iii)$\Longrightarrow$(i) Sei $\phi(z)$ stetig mit

$$f(z) \; = \; f(d) + (z - d)\phi(z)$$

und $\phi(d) = a \in \mathbb{C}$ (eine beliebige vorgegebene komplexe Zahl). Dann ist

$$\lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{z - d} \; = \; \lim_{z \to d} \phi(z) \; = \; \phi(\lim_{z \to d} z) \; = \; \phi(d) \; = \; a \, .$$

(i)$\Longleftrightarrow$(iv): Es gilt

$$R(z) \; = \; f(z) - f(d) - (z - d) f'(d)$$

und für $z \neq d$

$$\frac{R(z)}{z - d} \; = \; \frac{f(z) - f(d)}{z - d} - f'(d) \, ;$$

der Limes $\lim_{z \to d} \frac{R(z)}{z - d}$ verschwindet also genau dann, wenn

$$\lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{z - d} \; = \; f'(d)$$

ist (und insbesondere existiert). □

Definition 2.3. Sei $f : D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^m$ offen und $d \in D$. f heißt *reell total differenzierbar* bei d mit der durch die lineare Abbildung zwischen den Tangentialräumen

$$Df(d) : \mathbb{R}^m \; = \; T_d D \to \mathbb{R}^n \; = \; T_{f(d)} \mathbb{R}^n$$

gegebenen Ableitung, wenn gilt:

$$\lim_{x\to d} \frac{\|f(x)-f(d)-Df(d)(x-d)\|_{\mathbb{R}^n}}{\|x-d\|_{\mathbb{R}^m}} \;=\; 0\,.$$

(Diese Differenzierbarkeit heißt allgemein auf Banachräumen Frechét-Differenzierbarkeit). Die Matrix $Df(d)$ ist dann durch die (wegen der totalen Differenzierbarkeit existierenden) partiellen Ableitungen der Koordinatenfunktionen gegeben, d.h.

$$Df(d) \;=\; \left(\left.\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right|_{x=d}\right)_{i=1,\dots,n,\; j=1,\dots,m}$$

(Die Existenz der partiellen Richtungsableitungen heißt allgemein Gâteaux-Differenzierbarkeit).

Aus der reellen Analysis ist bekannt: Wenn die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, so ist die Abbildung total differenzierbar.

Satz 2.4. *Seien $D \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ offen, $f : D \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ eine Abbildung und $d \in D$. Äquivalent sind:*

(i) *Die Funktion f ist komplex differenzierbar in d.*

(ii) *Die Funktion f ist reell total differenzierbar in d und*

$$Df(d) : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

ist komplex linear. (*Erinnerung: $\mathbb{R}$-linear, wenn $T(x+iy) = T(1)x + T(i)y \;\forall\; x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$-linear, wenn $T(z) = T(1)z \;\forall\; z \in \mathbb{C}$, siehe Paragraph 1.3*)

(iii) *Die Funktion f ist reell total differenzierbar in d und Df ist winkeltreu und orientierungserhaltend.*

(iv) *Die Funktion f ist reell total differenzierbar in d und die partiellen Ableitungen von $f = u + iv$ erfüllen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(d) \;=\; \frac{\partial v}{\partial y}(d)\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(d) \;=\; -\frac{\partial v}{\partial x}(d)\,.$$

Beweis. Die Äquivalenz (i)$\Longleftrightarrow$(ii) folgt aus Satz 2.2 und der Definition der $\mathbb{C}$-Linearität. Die Äquivalenz (ii)$\Longleftrightarrow$(iii) folgt aus Satz 1.4. Wir zeigen nun (ii)$\Longleftrightarrow$(iv). Schreibe $f = u + iv \cong \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, wobei das Zeichen $\cong$ wieder den angegebenen Isomorophismus $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ bezeichnet. Die reelle Ableitungsmatrix sieht dann folgendermaßen aus:

$$Df(d) = \begin{pmatrix} \partial_x u(d) & \partial_y u(d) \\ \partial_x v(d) & \partial_y v(d) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \;\to\; \mathbb{R}^2\,.$$

Wenn allgemein $Df(d)$ die Gestalt $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $z = x + iy \cong \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hat, dann kann man schreiben:

$$Df(d) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} \cong (ax + by) + i(cx + dy) .$$

Wegen der $\mathbb{C}$-Linearität muss dies gleich sein wie (mit $1 \cong \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$(Df(d) \cdot 1) \cdot z = (a + ic)(x + iy) = (d - ib)(x + iy) .$$

Also bekommt man $a = d$ und $c = -b$, was identisch mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen ist, wenn man die obige konkrete Form von $Df(d)$ mit der abstrakten Koeffizientendarstellung vergleicht. Beachte, dass die obige Rechnung im Wesentlichen schon im Beweis von Satz 1.3 durchgeführt wurde. □

Bemerkung (Merkregel der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Aufgrund der komplexen Differenzierbarkeit müssen alle Richtungsableitungen gleich sein, insbesondere die in Richtungen parallel zu den Koordinatenachsen:

$$\begin{aligned} f'(d) &= \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(d+h) - f(d)}{h} \\ &= \partial_x (u(x, y) + iv(x, y))|_{(x,y)=d} \\ &= \lim_{h \in \mathbb{R}, h \to 0} \frac{f(d+ih) - f(d)}{ih} \\ &= \frac{1}{i} \left(\partial_y (u(x, y) + iv(x, y))|_{(x,y)=d} \right) . \end{aligned}$$

Aufgetrennt in Real- und Imaginärteil liefert dies gerade die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. ⋄

Korollar 2.5 (Kriterium für komplexe Differenzierbarkeit)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ offen und $d \in D$. Zudem habe f stetige partielle Ableitungen, die die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllen bei d. Dann ist f komplex differenzierbar bei d.*

Beweis. Aus der Existenz der stetigen partiellen Ableitungen folgt reelle totale Differenzierbarkeit und mit Satz 2.4 die Behauptung. □

Beispiele. (i) Definiere die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit Hilfe der reellen:

$$\exp(x + iy) := e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) \tag{2}$$

Die partiellen Ableitungen sind offensichtlich stetig, und es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_x e^x \cos(y) = e^x \cos(y) = \partial_y e^x \sin(y) = \partial_y v , \\ \partial_y u &= \partial_y e^x \cos(y) = -e^x \sin(y) = -\partial_x e^x \sin(y) = -\partial_x v . \end{aligned}$$

Die Funktion exp ist daher komplex differenzierbar auf ganz $\mathbb{C}$.

(ii) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \Re e(z) = 0\}$. Eine Logarithmusfunktion $\tilde{L} : D \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\tilde{L}(x+iy) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + i\arctan(\frac{y}{x}) \tag{3}$$

mit $\arctan(t) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Da $\partial_t \arctan(t) = \frac{1}{1+t^2}$ gilt, folgen die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_x \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x} = \partial_y \arctan(\frac{y}{x}) = \partial_y v\,, \\ \partial_y u &= \partial_y \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{y}{x^2} = -\partial_x \arctan(\frac{y}{x}) = -\partial_x v\,. \end{aligned}$$

$\tilde{L}$ ist daher komplex differenzierbar auf D.

(iii) Potenzen $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$. Anstelle die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen nachzuprüfen, gehen wir in diesem Falle anders vor und schreiben f folgendermaßen um:

$$z^n = d^n + (z-d)(z^{n-1} + dz^{n-2} + \ldots + d^{n-2}z + d^{n-1})$$

Schreibe also $f(z) = d^n + (z-d)\phi(z)$ mit $\phi(z) = z^{n-1} + dz^{n-2} + \ldots + d^{n-2}z + d^{n-1}$; dann gilt nämlich:

$$\lim_{z\to d} \frac{f(z)-f(d)}{z-d} = \lim_{z\to d} \phi(z) = n \cdot d^{n-1}\,.$$

Somit ist f auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.

(iv) Setze $f(z) = \overline{z}$, also $f(x+iy) = x - iy$. Dann ist $\partial_x u = 1 \neq -1 = \partial_y v$; die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen sind nicht erfüllt.

◇

Satz 2.6. *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(i) *$f + \lambda g$ ist holomorph auf D.*

(ii) *$f \cdot g$ ist holomorph auf D, und es gilt die Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.*

(iii) *Für eine holomorphe Funktion $h : f(D) \to \mathbb{C}$ ist auch $h \circ f$ holomorph und es gilt die Kettenregel $(h \circ f)' = (h' \circ f) \cdot f'$.*

(iv) *Sofern g nullstellenfrei auf D ist, ist auch $\frac{f}{g}$ holomorph auf D und es gilt die Quotientenregel $(\frac{f}{g})' = \frac{gf'-g'f}{g^2}$.*

Beweis. (i) Folgt direkt aus der Definition.

(ii) Wir verwenden die zweite Äquivalenz aus Satz 2.2. Es gibt stetige Funktionen ϕ_1, ϕ_2 mit $\phi_1(d) = f'(d)$ und $\phi_2(d) = g'(d)$, so dass folgende Schreibweise möglich ist:

$$f(z) = f(d) + (z-d)\phi_1(z) \qquad g(z) = g(d) + (z-d)\phi_2(z)\,.$$

Punktweise Multiplikation liefert:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(z) &= f(d)\cdot g(d) + f(d)(z-d)\phi_2(z) + g(d)(z-d)\phi_1(z) + (z-d)^2\phi_1(z)\phi_2(z)\\ &= f(d)\cdot g(d) + (z-d)\left(f(d)\phi_2(z) + g(d)\phi_1(z) + (z-d)\phi_1(z)\phi_2(z)\right)\\ &= f(d)\cdot g(d) + (z-d)\tilde{\phi}(z)\end{aligned}$$

Hier ist $\tilde{\phi}$ wieder eine stetige Funktion. Somit ist $f\cdot g$ holomorph mit der Ableitung

$$(fg)'(d) \;=\; \tilde{\phi}(d) \;=\; f(d)g'(d) + g(d)f'(d)$$

(iii) Verwende die dritte Äquivalenz aus Satz 2.2:

$$f(z) \;=\; f(d) + (f'(d) + r_1(z))(z-d)$$

und

$$h(\tilde{z}) \;=\; h(\tilde{d}) + (h'(\tilde{d}) + r_2(\tilde{z}))(\tilde{z}-\tilde{d})$$

mit

$$\lim_{z\to d} r_1(z) \;=\; \lim_{\tilde{z}\to\tilde{d}} r_2(\tilde{z}) \;=\; 0\,;$$

wähle in dieser Darstellung $\tilde{d} = f(d)$. Daraus folgt:

$$h(f(z)) \;=\; h(f(d)) + (h'(f(d)) + r_2(f(z))(f(z) - f(d))\,.$$

Also:

$$\frac{(h\circ f)(z) - (h\circ f)(d)}{z-d} \;=\; \frac{(h'(f(d)) + r_2(f(z))(f(z)-f(d))}{z-d} \;\longrightarrow\; (h'\circ f)(d)\cdot f'(d)\,,$$

Letzteres im Limes $z\to d$.
(iv) Die Quotientenregel folgt aus $fg^{-1} = f\cdot(h\circ g)$ mit $h(\tilde{z}) = \tilde{z}^{-1}$ und $h'(\tilde{z}) = -\tilde{z}^{-2}$, denn auf $D = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist mit

$$h(x+iy) \;=\; \frac{1}{x+iy} \;=\; \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

und unter Verwendung der reellen Kettenregel:

$$\partial_x u \;=\; \partial_x \frac{x}{x^2+y^2} \;=\; \frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2} \;=\; -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \;=\; -\partial_y \frac{y}{x^2+y^2} \;=\; \partial_y v\,.$$

Die zweite Cauchy-Riemannsche Differenzialgleichung rechnet sich genauso nach. Wende nun Produkt- und und Kettenregel an:

$$(\frac{f}{g})' \;=\; f'\cdot(h\circ g) + f\cdot(h\circ g)' \;=\; \frac{f'}{g} + f\cdot(h'\circ g)\cdot g' \;=\; \frac{f'}{g} - f\cdot\frac{1}{g^2}\cdot g' \;=\; \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

□

Korollar 2.7. *Jede rationale Funktion*

$$f = \frac{P}{Q}$$

mit Polynomen P, Q ist holomorph auf $D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Q(z) = 0\}$.

Satz 2.8 (Implizite Funktionen)**.** *Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung und $g : D' \to \mathbb{C}$ mit $D' \supset f(D)$ eine holomorphe Abbildung. Außerdem gelte*

$$g(f(z)) = z \quad \forall\, z \in D \textit{ und } g'(z) \neq 0 \quad \forall\, z \in f(D)\,.$$

Dann ist f holomorph auf D und

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))}$$

für alle $z \in D$.

Beweis. Zuerst folgt aus den Voraussetzungen, dass f injektiv ist: Sei nämlich $z, d \in D, z \neq d$. Annahme: $f(z) = f(d)$. Dann wäre $(g \circ f)(z) = (g \circ f)(d)$, was ein Widerspruch zu der Forderung $g(f(z)) = z \quad \forall\, z \in D$ ist. Für die Gleichung betrachten wir

$$1 = \frac{z-d}{z-d} = \frac{(g \circ f)(z) - (g \circ f)(d)}{z-d} = \frac{g(f(z)) - g(f(d))}{f(z) - f(d)} \cdot \frac{f(z) - f(d)}{z-d}$$

Der Limes $\lim_{z \to d}$ existiert trivialerweise auf der linken Seite und - da f stetig ist - auch von dem ersten Faktor der rechten Seite (dieser ist insbesondere ungleich 0, da sonst die Gleichung nicht erfüllt sein könnte); folglich auch von dem zweiten Faktor:

$$\lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{z-d} = \lim_{z \to d} \frac{f(z) - f(d)}{g(f(z)) - g(f(d))} = \frac{1}{g'(f(d))}\,.$$

□

Beispiel. Sei $g(z) = \exp(x + iy)$ definiert wie in (2). Der Logarithmus $f = \mathrm{Log}$ soll die Umkehrfunktion von exp sein; wähle hierfür

$$D = \exp(f(D)) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}\,.$$

Mit dieser Wahl von D und $f(0)$ ist die durch Satz 2.8 gegebene holomorphe Funktion

$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$$

der Hauptzweig des Logarithmus. Wenn $z = re^{i\phi} \in D$ die Polardarstellung einer komplexen Zahl wie in (1) ist, allerdings mit $\phi \in (-\pi, \pi)$, weil $\mathbb{R}_{\leq 0} \cap D = \emptyset$, dann gilt

$$\begin{aligned} re^{i\phi} = e^{\Re e(\mathrm{Log}(z))} e^{i \Im m(\mathrm{Log}(z))} \quad &\Longleftrightarrow \quad \Re e(\mathrm{Log}(z)) = \log(r) \text{ und } \Im m(\mathrm{Log}(z)) = \phi \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Log}(re^{i\phi}) = \log(r) + i\phi \end{aligned}$$

(Hier ist log der bekannte reelle Logarithmus). Des Weiteren soll nun mit $\tilde{L} : \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aus (3) verglichen werden. Für $z = re^{i\phi}$ mit $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, gilt nach (3)

$$\tilde{L}(z) \;=\; \log(r) + i\phi\,,$$

d.h. auf $\{z = x + iy \;:\; x > 0\}$ stimmt $\tilde{L}$ mit Log überein. Aber für $z \in \{z = x + iy \;:\; x < 0\}$ gilt

$$\exp(\tilde{L}(z)) \;=\; \exp(\log(r)) \cdot \exp(i\phi) \;=\; -z\,;$$

hier stimmen die Funktionen also nicht überein. ◇

Satz 2.9. *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ offen. Äquivalent sind:*

(i) *f ist lokal-konstant in D, d.h. $\forall\, d \in D\; \exists$ offene Umgebung $U_d \subset D$ von d, so dass $f|_{U_d}$ konstant ist.*

(ii) *f ist holomorph in D und $f'(d) = 0 \quad \forall\, d \in D$.*

Ist D zusammenhängend, so ist f konstant auf D.

Beweis. Der Schritt (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar, weil ja die Differenzenquotienten verschwinden. Zeigen wir nun (ii)$\Longrightarrow$(i). Sei $z_0 \in D$ und $z \in B_\epsilon(z_0) \subset D$. Setze $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$g(t) \;=\; f(tz + (1-t)z_0) \;=\; f(z_0 + t(z - z_0))\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{g(s) - g(t)}{s - t} \;&=\; \frac{f(z_0 + s(z - z_0)) - f(z_0 + t(z - z_0))}{s(z - z_0) - t(z - z_0)} \cdot \frac{s(z - z_0) - t(z - z_0)}{s - t} \\ &\to\; f'(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0) \qquad \text{wenn } s \to t\,,\end{aligned}$$

weil f holomorph ist. Somit ist nach Voraussetzung

$$g'(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0,1]\,.$$

Also ist g und somit auch f konstant auf $B_\epsilon(z_0)$. □

Korollar 2.10.

(i) *Jede holomorphe Funktion, die nur reelle (oder nur imaginäre) Werte annimmt, ist lokal-konstant.*

(ii) *Jede holomorphe Funktion mit konstantem Betrag (d.h. $|f(z)| = const$) ist lokalkonstant.*

Beweis. (i) Setze wie immer $f = u + iv$. Die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen liefern $\partial_x u = \partial_y v = 0 \Longrightarrow f' = 0$. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.9.
(ii) Nach Voraussetzung ist $|f|^2 = u^2 + v^2 = \text{const}$. Leite diese Gleichung nach x und y ab:

$$u\partial_x u + v\partial_x v \;=\; 0\,, \qquad u\partial_y u + v\partial_y v \;=\; 0\,.$$

Verwende die Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_y u = -\partial_x v$:

$$-u\partial_y u \;=\; v\partial_y v \quad \text{impliziert} \quad u\partial_x v \;=\; v\partial_x u\,.$$

Multipliziere nun die Ableitung nach x mit u:

$$0 \;=\; u^2\partial_x u + uv\partial_x v \;=\; u^2\partial_x u + v^2\partial_x u \;=\; (u^2+v^2)\partial_x u\,.$$

Also ist $\partial_x u = 0$. Durch analoges Vorgehen erhält man auch $\partial_x v = 0$ und durch Anwendung der Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen $f' = 0$. Aus Satz 2.9 folgt wieder die Behauptung. □

2.2 Wirtinger-Kalkül

Die Idee ist, das Paar $(z, \overline{z})$ anstelle von (x, y) zur Beschreibung einer Funktion zu verwenden. Setzte dann

$$\partial_z \;=\; \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \;\text{ und }\; \partial_{\overline{z}} \;=\; \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)\,.$$

Satz 2.11. *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ reell differenzierbar, D offen, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Regeln:*

(i) *Die Ableitungen sind lineare Operationen: $\partial_z(f + \lambda g) = \partial_z f + \lambda\partial_z g$ und $\partial_{\overline{z}}(f + \lambda g) = \partial_{\overline{z}} f + \lambda\partial_{\overline{z}} g$.*

(ii) *Es gilt die übliche Produktregel: $\partial_z(f \cdot g) = (\partial_z f)g + f(\partial_z g)$ und $\partial_{\overline{z}}(f \cdot g) = (\partial_{\overline{z}} f)g + f(\partial_{\overline{z}} g)$.*

(iii) *z und $\overline{z}$ hängen folgendermaßen zusammen: $\partial_{\overline{z}} f = \overline{\partial_z \overline{f}}$.*

(iv) *f ist holomorph genau dann wenn $\partial_{\overline{z}} f = 0$ ist (kompakte Schreibweise der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen). Dann ist $f' = \partial_z f$.*

(v) *Insbesondere verhält sich bei der Ableitung der jeweils andere Parameter unabhängig: $\partial_z z^n \overline{z}^m = nz^{n-1}\overline{z}^m$ und $\partial_{\overline{z}} z^n \overline{z}^m = mz^n \overline{z}^{m-1}$.*

Beweis. (i) Betrachte die Ableitung ∂_z (die andere berechnet sich analog).

$$\begin{aligned}
\partial_z(f + \lambda g) &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)((u + iv) + \lambda(u' + iv')) \\
&= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) + \lambda\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u' + iv') \\
&= \partial_z f + \lambda\partial_z g
\end{aligned}$$

(ii) Produktregel:

$$\begin{aligned}
\partial_z(f \cdot g) &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)((u + iv) \cdot (u' + iv')) \\
&= \left(\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv)\right)(u' + iv') + \left(\frac{1}{2}(u + iv)(\partial_x - i\partial_y)(u' + iv')\right) \\
&= (\partial_z f)g + f(\partial_z g)
\end{aligned}$$

Diese Regeln vererben sich also direkt von der reellen Differentiation.

(iii) $\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \overline{\frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u - iv)} = \overline{\partial_z \overline{f}}$

(iv) $\partial_{\overline{z}} f = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(u + iv) = \frac{1}{2}(\partial_x u - \partial_y v) + \frac{i}{2}(\partial_x v + \partial_y u) = 0 \Longleftrightarrow \Im m(\partial_{\overline{z}} f) = \Re e(\partial_{\overline{z}} f) = 0$.

(v) Folgende Identitäten gelten:

$$\begin{aligned}
\partial_z z &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(x + iy) \;=\; 1 \\
\partial_z \overline{z} &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(x - iy) \;=\; 0 \\
\partial_{\overline{z}} z &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(x + iy) \;=\; 0 \\
\partial_{\overline{z}} \overline{z} &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(x - iy) \;=\; 1
\end{aligned}$$

Mithilfe der Produktregel folgt dann die Behauptung. □

Die Strategie ist also: Beim Differenzieren mit ∂_z und $\partial_{\overline{z}}$ betrachte z und $\overline{z}$ als unabhängige Variable. Holomorph sind genau die Funktionen, die nicht von $\overline{z}$ abhängen.

Beispiel 2.12. Für welche $a \in \mathbb{C}$ ist die Funktion

$$f(x + iy) \;=\; x^2(1 + 2a + a^2) \;+\; 2ixy(1 - a^2) \;-\; y^2(1 - 2a + a^2)$$

analytisch? Es ist möglich, dies mithilfe der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen zu überprüfen, oder aber "zu sehen", dass für $z = x + iy$ gilt

$$f(z) \;=\; (z + a\overline{z})^2 \;.$$

Also ist die Funktion analytisch genau dann wenn $a = 0$. ◇

2.3 Potenzreihen

In diesem Paragraphen untersuchen wir konvergente Potenzreihen in $z \in \mathbb{C}$, wie sie schon aus der Analysis bekannt sind. Beachten Sie allerdings, dass hier nur z und nicht $\overline{z}$ vorkommt. Also wenn $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ und Potenzreihen in $x = \Re e(z)$ und $y = \Im m(z)$ betrachtet werden, so erhält man eine viel größere Klasse an Reihen.

Definition 2.13. Eine formale Potenzreihe um den Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\alpha(z) \;=\; \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n \;,$$

wobei $a_n \in \mathbb{C}$. Die Menge der Potenzreihen um z_0 wird mit $\mathbb{C}[z - z_0]$ bezeichnet. Definiere die *Ordnung* einer Potenzreihe durch

$$\mathcal{O}(\alpha) = \begin{cases} n & , \quad \text{wenn } a_0 = ... = a_{n-1} = 0, a_n \neq 0 \\ \infty & , \quad \text{wenn } a_i = 0 \;\forall\, i, \text{d. h. } \alpha \equiv 0 \end{cases} .$$

Im folgenden werden verschiedene Operationen eingeführt, die mit Potenzreihen durchgeführt werden können. Seien dazu

$$\alpha(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \;, \qquad \beta(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} b_n(z-z_0)^n \;,$$

zwei Potenzreihen um den gleichen Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

- **Linearkombination:**

$$(\alpha + \lambda\beta)(z) = \sum_{n\geq 0} (a_n + \lambda b_n)(z-z_0)^n$$

  Somit ist $(\mathbb{C}[z-z_0], +, \cdot)$ ein komplexer Vektorraum der Dimension ∞. Der Nullvektor 0 ist offensichtlich die Reihe $0(z) = 0$, also $a_n = 0$ für alle n.

- **(Cauchy-)Multiplikation:**

$$(\alpha \bullet \beta)(z) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) (z-z_0)^n$$

  Somit ist $(\mathbb{C}[z-z_0], +, \cdot, \bullet)$ Algebra über $\mathbb{C}$ mit dem Einselement 1 gegeben durch

$$1(z) \;=\; 1 \;.$$

  Gemäß der definierenden Formel gilt offensichtlich $\alpha \bullet \beta \;=\; \beta \bullet \alpha$, so dass die Algebra kommutativ ist, und zudem

$$\mathcal{O}(\alpha \bullet \beta) \;=\; \mathcal{O}(\alpha) \;+\; \mathcal{O}(\beta)\,.$$

- **Einsetzen von Potenzreihen und Umordnen:** Für $b_0 \;=\; z_0$ ist das Einsetzen der Potenzreihe $\beta(z)$ in die Potenzreihe $\alpha(z)$ definiert:

$$\begin{aligned}
(\alpha \circ \beta)(z) \;&=\; \alpha(\beta(z)) \\
&=\; \sum_{n\geq 0} a_n(\beta(z) - z_0)^n \\
&=\; \sum_{n\geq 0} a_n \Big(\sum_{m\geq 1} b_m(z-z_0)^m \Big)^n \\
&=\; a_0 \;+\; a_1 b_1 (z-z_0) \;+\; (a_1 b_2 \;+\; a_2 b_1^2)(z-z_0)^2 \;+ \ldots
\end{aligned}$$

  Die Notation $\circ$ reflektiert, dass es sich hier um die Hintereinanderausführung von α nach β handelt.

Folgende Regeln für $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{C}[z-z_0]$ und $\beta(z_0) = z_0$ lassen sich nachprüfen:

(i) $(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta$

(ii) $(\alpha_1 \bullet \alpha_2) \circ \beta = (\alpha_1 \circ \beta) \bullet (\alpha_2 \circ \beta)$

(iii) $1 \circ \beta = 1$

(iv) $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$, wenn auch $\gamma(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ als ersten Koeffizienten $c_0 = z_0$ hat

(v) Wenn die Potenzreihe ϵ definiert ist durch $\epsilon(z) = z = z_0 + (z - z_0)$, dann gilt $\epsilon \circ \beta = \beta$

Im folgenden beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $z_0 = 0$. Alle Sätze sind aber auch auf den allgemeinen Fall anwendbar.

Satz 2.14.

(i) $\mathbb{C}[z]$ *ist nullteilerfrei, d.h. aus* $\alpha \bullet \beta = 0$ *folgt* $\alpha = 0$ *oder* $\beta = 0$.

(ii) $\alpha \bullet \beta = 1$ *ist genau dann eindeutig lösbar nach* β *bei festem* α, *wenn* $a_0 \neq 0$ *ist (solche* α *sind die Einheiten von* $\mathbb{C}[z]$, *d.h. Teiler der* 1).

(iii) $\mathbb{C}[z]$ *ist faktoriell, d.h. es gibt immer eine Primzahlzerlegung in eine Einheit und endliche viele Primelemente. Es gibt nur „ein“ Primelement* $\epsilon(z) = z$.

(iv) *Sei* $b_0 = 0$. *Dann ist* $\alpha \circ \beta = \epsilon$ *lösbar nach* β *genau dann wenn* $a_0 = 0$ *und* $a_1 \neq 0$. *Die Lösung ist in diesem Fall eindeutig (dies ist sozusagen ein Satz für implizite Funktionen für Potenzreihen). Es gilt sogar* $\beta \circ \alpha = \epsilon$

Beweis. (i) Es gilt $\mathcal{O}(\alpha \bullet \beta) = \mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}(\beta)$, also $\mathcal{O}(\alpha \bullet \beta) = \infty \iff \mathcal{O}(\alpha) = \infty$ oder $\mathcal{O}(\beta) = \infty$.
(ii) $\alpha \bullet \beta = 1$ gilt genau dann, wenn man nach Potenzen aufgelöst folgendes schreiben kann:

$$\begin{aligned} a_0 b_0 &= 1 \\ a_0 b_1 + a_1 b_0 &= 0 \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält also eine eindeutige Lösung für $a_0 \neq 0$ (da nur durch a_0 geteilt werden muss) und keine Lösung für $a_0 = 0$.
(iii) Sei $\mathcal{O}(\alpha) = n$. Setze $\beta(z) = \sum_{k \geq n} a_k z^{n-k}$. Dann ist β Einheit (vgl. (ii)) und α lässt sich schreiben als

$$\alpha(z) \quad = \quad z \cdot \ldots \cdot z \cdot \beta(z)$$

also $\alpha = \epsilon^n \cdot \beta$.

(iv) Es gilt

$$\alpha \circ \beta \;=\; \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} a_0 & = & 0 \\ a_1 b_1 & = & 1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1^2 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 b_n + \text{Polynom in } (a_1, ...a_n, b_1 ..., b_{n-1}) & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right.$$

Eine Lösung existiert also genau dann, wenn $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$, also $\mathcal{O}(\alpha) = 1$. Die letzte Aussage ist eine Übung. □

Definition 2.15. Eine Potenzreihe heißt *konvergent*, wenn es ein $z \neq z_0$ gibt, so dass die Zahlenreihe

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

konvergiert.

Satz 2.16 (Cauchy-Hadamard)**.** *Definiere für eine Potenzreihe*

$$\alpha(z) \;=\; \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

den Konvergenzradius nach der Formel von Cauchy-Hadamard:

$$\rho_\alpha \;=\; \frac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \;\in\; [0, \infty] \;.$$

Falls $\rho_\alpha > 0$ ist, so ist α konvergent und es gilt:

(i) *α ist normal konvergent auf $B_{\rho_\alpha}(z_0)$*

(ii) *α divergiert auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\rho_\alpha}(z_0)}$*

(iii) *Sei $a_n \neq 0$ bis auf endlich viele n. Dann gilt:*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \;\leq\; \rho_\alpha \;\leq\; \limsup_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \;.$$

Beweis. Für den Beweis braucht man die geometrische Reihe; bekanntlich ist $\sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$ für $|z| < 1$.
(i) Falls $\rho_\alpha = 0$ ist, ist nicht zu zeigen. Sei also $0 < r < R < \rho_\alpha$ und $z \in \overline{B_r(z_0)}$, also $|z - z_0| \leq r$. Nach Definition von ρ_α gibt es ein $N = N(R)$ mit $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$ für alle $n \geq N$. Somit:

$$|a_n| \cdot |z - z_0|^n \;<\; \frac{|z - z_0|^n}{R^n} \;\leq\; \left(\frac{r}{R}\right)^n , \qquad n \geq N$$

Da $r < R$ ist, kann die geometrische Reihe auf $\frac{r}{R}$ angewendet werden:

$$\sum_{n\geq N} |a_n| \cdot |z - z_0|^n \;\leq\; \sum_{n\geq N} \left(\frac{r}{R}\right)^n \;=\; \frac{1}{1-\frac{r}{R}} \;<\; \infty$$

Somit ist $\sum_{n\geq 1} a_n \cdot |z - z_0|^n$ nach Satz 1.31 uniform konvergent auf $\overline{B_r(z_0)}$. Da r beliebig nahe an ρ_α gewählt werden kann, folgt die normale Konvergenz auf $B_{\rho_\alpha}(z_0)$.
(ii) Sei $|z - z_0| > r > \rho_\alpha$, d.h. $\frac{1}{r} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Nach Definition von lim sup gibt es unendlich viele n mit $|a_n|^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{r}$, also

$$|a_n(z - z_0)^n| \;\geq\; \frac{|z - z_0|^n}{r^n} \;=\; \left(\frac{|z - z_0|}{r}\right)^n$$

für diese n. Man erhält somit eine Teilfolge von Summanden, die divergiert, somit divergiert α.
(iii) Sei

$$0 < \; r \; < \; R \; = \; \liminf_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

und $|z - z_0| < r$.

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \;\; \exists\, N = N(r) \text{ mit } \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} > r \text{ für } \; n \geq N \\
&\Longrightarrow \;\; |a_n| \;<\; \frac{1}{r}|a_{n-1}| \;<\; \frac{1}{r^2}|a_{n-2}| \;<\ldots<\; \frac{1}{r^{n-N}}|a_N| \qquad \text{für } \; n \geq N \\
&\Longrightarrow \;\; |a_n(z - z_0)^n| \;\leq\; \frac{|z - z_0|^n}{r^n}\frac{|a_N|}{r^{-N}}
\end{aligned}$$

Da $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$ ist, kann die geometrische Reihe angewendet werden. Es folgt, dass $\sum_{n\geq 1} |a_n(z - z_0)^n| < \infty$ ist, also $r < \rho_\alpha$. Die zweite Ungleichung lässt sich ähnlich zeigen. □

Beispiel. Wir betrachten einige Spezialfälle:

(i) Für $\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ ist $\rho_\alpha = 1$.

(ii) Betrachte die Exponentialreihe $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$. Nach Teil (iii) des letzten Satzes ist der Limes von $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, falls existent, gleich dem Konvergenzradius („Quotientenkriterium"):

$$\rho_{\exp} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty$$

Der gleiche Konvergenzradius $\rho = \infty$ gilt für $\sin(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ und $\cos(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$, da diese Reihen Teilreihen von $\exp(iz)$ sind. Folgende Identitäten gelten:

(1) $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$

(2) $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$, denn $\exp(z)\cdot\exp(w) = \left(\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n\geq 0}\frac{w^n}{n!}\right)$. Dies ist ein Produkt aus zwei absolut konvergenten Reihen; wende also das Cauchy-Produkt an:

$$\begin{aligned}\exp(z)\cdot\exp(w) &= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!(k-l)!}z^l w^{k-l}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(z+w)^k}{k!}\\ &= \exp(z+w)\end{aligned}$$

Somit ist $\exp(x+iy) = \exp(x)+\exp(iy) = e^x(\cos(y)+i\sin(y))$, womit die Exponentialfunktion und -Reihe konsistent definiert ist.

(3) Allgemein gilt $\Re e(f) = \frac{1}{2}(f+\overline{f})$ und $\Im m(f) = \frac{1}{2i}(f-\overline{f})$; hier angewendet liefert das $\cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ und $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$.

(iii) Definiere die Logarithmusreihe $\alpha(z) = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$. Dann ist $\rho_\alpha = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1$. Später werden wir sehen, dass die Identität $\alpha(z) = \log(1-z)$ für $|z|<1$ gilt.

$\diamond$

Bemerkung. Das Konvergenzverhalten auf dem Rand $\partial B_{\rho_\alpha}(z_0)$ kann durch keine allgemeinen Sätze beschrieben werden, wie die folgenden Beispiele zeigen.

- Für $\alpha(z) = \sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n^2}$ ist $\rho_\alpha = \lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^2 = 1$ und für alle $e^{i\phi}\in\partial B_{\rho_\alpha}(0)$ liegt absolute Konvergenz vor.
- Für $\beta(z) = \sum_{n\geq 1} z^n$ ist $\rho_\beta = 1$, die Reihe divergiert aber für alle z mit $|z| = 1$.
- Für $\gamma(z) = -\sum_{n\geq 1}\frac{z^n}{n}$ (die Logarithmusreihe) ist $\rho_\gamma = 1$. Die Reihe divergiert bekanntlich für $z = 1$ (harmonische Reihe) und konvergiert nach dem Leibniz Kriterium (bedingt) für $z = -1$ (alternierende Reihe). Man kann zeigen, dass für alle anderen z mit $|z| = 1$, $z\neq 1$ ebenfalls bedingte Konvergenz gilt.

$\diamond$

Satz 2.17. *Seien α, $\beta\in\mathbb{C}[z]$ Potenzreihen, $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ und $\rho(\alpha)>0$, $\rho(\beta)>0$. Dann gelten folgende Regeln:*

(i) $\rho(\lambda\alpha) = \rho(\alpha)$

(ii) $\rho(\alpha+\beta)\geq\min\{\rho(\alpha),\rho(\beta)\}$

(iii) $\rho(\alpha\bullet\beta)\geq\min\{\rho(\alpha),\rho(\beta)\}$

(iv) *Falls $b_0 = 0$, also $\mathcal{O}(\beta)\geq 1$ ist, folgt $\rho(\alpha\circ\beta)>0$. Genauer gilt: Sei $r>0$, so dass $\sum_{n\geq 1}|b_n|r^n<\rho(\alpha)$. Dann ist $\rho(\alpha\circ\beta)\geq r$.*

(v) *Sei* $a_0 \neq 0$, *also* $\mathcal{O}(\alpha) = 0$. *Dann folgt aus* $\alpha \bullet \gamma = 1$, *dass* $\rho(\gamma) > 0$ *sein muss.*

(vi) *Sei* $a_0 = 0$ *und* $a_1 \neq 0$, *also* $\mathcal{O}(\alpha) = 1$. *Dann folgt aus* $\alpha \circ \gamma = \epsilon$, *dass* $\rho(\gamma) > 0$ *sein muss.*

Beweis. (i) und (ii) sind klar, bez. eine einfache Übung.
(iii) folgt aus dem Cauchyschen Doppelreihensatz.
(iv) Für hinreichend kleines r gilt

$$\sum_{n\geq 1} |b_n| r^n \;=\; r\left(\sum_{n\geq 1} |b_n| r^{n-1}\right) \;<\; R \;<\; \rho(\alpha)\;.$$

Für $|z| < r$ folgt dann

$$|\alpha(\beta(z))| \;\leq\; \sum_{n\geq 0} |a_n| \cdot |\beta(z)|^n \;\leq\; \sum_{n\geq 0} |a_n| \cdot R^n \;<\; \infty$$

Aus dieser absoluten Konvergenz folgt dann $r \leq \rho(\alpha \circ \beta)$.
(v) Ohne Einschränkung können wir $a_0 = 1$ setzen. Eine Lösung γ existiert nach Satz 2.14(ii). Nun wird noch eine Formel für diese Lösung hergeleitet. Setze $\delta(z) = 1 - z$ und $\eta(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$. Dann ist $\rho(\delta) = \infty$, $\rho(\eta) = 1$ und für $|z| < 1$ ist $\delta \bullet \eta = 1$. Setze weiterhin $\tilde{\alpha} = 1 - \alpha$. Dann offensichtlich $\rho(\tilde{\alpha}) = \rho(\alpha) > 0$. Zudem ist $\alpha = \delta \circ \tilde{\alpha}$. Zusammengefasst folgt:

$$1 \;=\; 1 \circ \tilde{\alpha} \;=\; (\delta \bullet \eta) \circ \tilde{\alpha} \;=\; (\delta \circ \tilde{\alpha}) \bullet (\eta \circ \tilde{\alpha}) \;=\; \alpha \bullet (\eta \circ \tilde{\alpha})$$

Dann ist $\gamma = \eta \circ \tilde{\alpha}$ und dies ist nach Satz 2.14(ii) sogar eindeutig. Somit $\rho(\gamma) = \rho(\eta \circ \tilde{\alpha}) > 0$, Letzteres nach Punkt (iv) da $\mathcal{O}(\tilde{\alpha}) \geq 1 > 0$ und sowohl η als auch $\tilde{\alpha}$ einen positiven Konvergenzradius haben.
(vi) folgt aus dem Satz für implizite Funktionen (Satz 2.8), wenn man weiß, dass die konvergenten Potenzreihen genau die holomorphen Funktionen sind. Dieser Sachverhalt wird im Laufe der Vorlesung bewiesen, wobei der nächste Satze eine Implikation zeigt. Die Aussage (vi) wird in diesen Beweisen nicht benutzt. □

Satz 2.18. *Sei*

$$\alpha(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n \;\in\; \mathbb{C}[z - z_0]$$

und $\rho(\alpha) > 0$. *Dann ist* α *holomorph auf* $B_{\rho(\alpha)}(z_0)$ *mit Ableitung*

$$\alpha'(z) \;=\; \sum_{n\geq 1} a_n \cdot n \cdot (z - z_0)^{n-1}$$

und unverändertem Konvergenzradius $\rho(\alpha') = \rho(\alpha)$. *Nach Iteration dieser Aussage folgt:* α *ist unendlich oft komplex differenzierbar auf* $B_{\rho(\alpha)}(z_0)$ *und die kte Ableitung ist*

$$\alpha^{(k)}(z) \;=\; \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

mit Konvergenzradius $\rho(\alpha^{(k)}) = \rho(\alpha)$.

Bemerkung 2.19. Dies besagt, dass bei einer konvergenten Potenzreihe die (komplexe) Ableitung $\frac{d}{dz}$ mit dem Summenzeichen $\sum_{n\geq 0}$ vertauscht. $\diamond$

Beweis. Aus $\sqrt[n]{n+1} \to 1$ für $n \to \infty$ folgt

$$\rho(\alpha') \;=\; \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_{n+1}|(n+1)}} \;=\; \frac{1}{\limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}} \;=\; \rho(\alpha)\,.$$

Sei $|z-z_0| < r < \rho(\alpha)$ und $h \in \mathbb{C}$ mit $0 \neq |h| < r - |z-z_0|$, so dass $|z-z_0+h| < r$. Verwende die Abkürzung $\hat{z} = z - z_0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(z+h)-\alpha(z)}{h} \;&=\; \sum_{n\geq 0} \frac{a_n\left((\hat{z}+h)^n - \hat{z}^n\right)}{h} \\ &=\; \sum_{n\geq 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} \hat{z}^{n-k} \right)\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} \hat{z}^{n-k} \right| \leq n \cdot r^{n-1}$$

und somit ist die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergent, weil $\sum_{n\geq 1} |a_n| \cdot nr^{n-1} < \infty$ eine konvergente Majorante liefert. Nach dem Weierstraß-Kriterium ist die Reihe uniform konvergent in $\hat{z}$ und h für $\hat{z}$ und h ausreichend klein. Also ist sie insbesondere stetig bei $h = 0$. Also:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(z,h)-\alpha(z)}{h} \;=\; \sum_{n\geq 1} a_n n \hat{z}^{n-1} \;=\; \alpha'(z)\,.$$

$\square$

Satz 2.20 (Identitätssatz für Potenzreihen)**.** *Seien* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}[z]$ *mit* $r = \min\{\rho(\alpha), \rho(\beta)\} > 0$. *Sei außerdem*

$$A \;\subset\; B_r(0)$$

eine Teilmenge mit Häufungspunkt 0*, so dass* $\alpha(z) = \beta(z)$ *für alle* $z \in A$*. Dann* $\alpha = \beta$*.*

Beweis. Sei $(z_k)_{k\geq 1}$ konvergente Folge in A mit $\lim_k z_k = 0$:

$$a_0 = \lim_{k\to\infty} \alpha(z_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\geq 0} a_n (z_k)^n = \lim_{k\to\infty} \beta(z_k) = b_0$$

Dann subtrahiere von beiden Reihen $a_0 = b_0$ und teile durch z. Für diese neuen Reihen $\tilde{a}$ und $\tilde{\beta}$ liefert das gleiche Argument $a_1 = b_1$ und schließlich durch Iteration des Verfahrens $a_n = b_n \;\forall\, n$, also $\alpha = \beta$. $\square$

2.4 Beispiele analytischer Funktionen

Polynome sind holomorph (Synonym für analytisch) auf ganz $\mathbb{C}$ und konvergente Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius.

Definition 2.21. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion heißt eine *ganze Funktion*. Eine ganze Funktion heißt *transzendent*, wenn sie kein Polynom ist.

Beispiel. Die Funktionen $\exp, \sin, \cos$ sind transzendent, log dagegen ist nicht einmal ganz. $\diamond$

Satz 2.22. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offenes und zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Äquivalent sind:*

(i) *$f(z) = a \cdot \exp(bz)$ für $z \in D, a, b \in \mathbb{C}$.*

(ii) *$f'(z) = b \cdot f(z)$ für $b \in \mathbb{C}$.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Nach Satz 2.18 werden Potenzreihen gliedweise differenziert:

$$\frac{d}{dz} f(z) = \frac{d}{dz} a \sum_{n\geq 0} \frac{(bz)^n}{n!} = a \sum_{n\geq 1} bn \frac{(bz)^{n-1}}{n!} = b \cdot a \sum_{n\geq 0} \frac{(bz)^n}{n!} = b \cdot f(z)\,.$$

(ii)$\Longrightarrow$(i): Setze $h(z) = f(z) \cdot \exp(-bz)$. h ist als Produkt analytischer Funktionen analytisch. Betrachte also die Ableitungen:

$$\frac{d}{dz} h(z) \;=\; f'(z) \cdot \exp(bz) - f(z) \cdot b \exp(bz) \;=\; b \cdot f(z) \cdot \exp(bz) - f(z) \cdot b \cdot \exp(bz) \;=\; 0\,.$$

Nach Satz 2.9 ist dann $h(z) = a$ für alle $z \in D$; mit der Funktionalgleichung der exp-Funktion $\exp(a + b) = \exp(a) \cdot \exp(b)$ folgt die Behauptung. $\square$

Definition 2.23. Die Zahl $p \in \mathbb{C}$ heißt Periode einer ganzen Funktion f, wenn $f(z+p) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Satz 2.24. *Die Perioden von* exp *sind $p = i2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Die Perioden von* cos *und* sin *sind $p = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$.*

Beweis. Die Gleichung $\exp(z) = \exp(z + p) = \exp(z) \exp(p)$ ist genau dann erfüllt, wenn $\exp(p) = 1$ ist:

$$\begin{aligned} \exp(p) \;=\; 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{\Re e(p)}(\cos \Im m(p) + i \sin \Im m(p)) \;=, 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Re e(p) = 0 \text{ und } \Im m(p) \;=\; 2\pi n \;\text{ mit }\; n \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die als bekannt vorausgesetzte Periodizität des rellen Sinus und Cosinus verwendet.

Sei p Periode von sin, d.h. $\sin(z + p) = \sin(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. Die Ableitung dieser Gleichung liefert $\cos(z+p) = \cos(z)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$. Nach dem ersten Teil des Satzes und der Euleridentität der exp-Funktion folgt dann $\exp(i(z+p)) = \exp(iz)\ \forall\ z \in \mathbb{C}$, also $ip = i2\pi n$ $(n \in \mathbb{Z})$. $\square$

Satz 2.25. *Die Abbildung* $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus* $\mathbb{C}$ *nach* $\mathbb{C}$*, als additive bzw. multiplikative Gruppe aufgefasst mit*

$$\mathrm{Kern}(\exp) = \{\text{Perioden von } \exp\}$$

(*Allgemein gilt:* $\phi : X \to Y$ *Homomorphismus* $\Longrightarrow \mathrm{Kern}(\phi)$ *ist Untergruppe von* X*.*)

Beweis. Die Homomorphismus-Eigenschaft $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$ wurde bereits bewiesen. Zur Surjektivität: Gesucht ist ein z, das $\exp(z) = r \cdot e^{i\phi}$, $r > 0$, erfüllt. Wähle $z = \log r + i\phi$ mit der reellen Logarithmus-Funktion log. □

Die Zweige des komplexen Logarithmus sind definiert durch:

- Hauptzweig:
$$\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \{z \in \mathbb{C} \;:\; -\pi < \Im m(z) < \pi\}$$
Dann gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ die Identität $\exp(\mathrm{Log}(z)) = z$ und für z aus dem Streifen $-\pi < \Im m(z) < \pi$ die Identität $\mathrm{Log}(\exp(z)) = z$.
- Andere Zweige: $\mathrm{Log}_k : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Log}_k = \mathrm{Log}(z) + 2\pi i k$. Dann ist $\mathrm{Log} = \mathrm{Log}_0$ und $\exp(\mathrm{Log}_k(z)) = z \; \forall \, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$.
- Der Definitionsbereich des gesamten Logarithmus $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{Log}_k$ ist dann die Riemannsche Fläche von $\exp^{-1}$; dies ist eine Schraube ohne Achse mit unendlich vielen Blättern.

Folgende Rechenregeln gelten:

(i) $$\mathrm{Log}(zz') = \mathrm{Log}(z) + \mathrm{Log}(z') + \begin{cases} -2\pi i\,, & \text{falls } \arg(z) + \arg(z') \geq \pi \\ 2\pi i\,, & \text{falls } \arg(z) + \arg(z') \leq -\pi \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) $\mathrm{Log}_n(zz') = (\mathrm{Log}_k(z) + \mathrm{Log}_l(z')) \mod 2\pi i$

Hierbei ist das Argument

$$\arg(z) \;=\; \arg(re^{i\phi}) \;=\; \phi \in [-\pi, \pi)\,.$$

Satz 2.26. *Für* $z \in B_1(0)$ *ist*

$$\mathrm{Log}(1-z) \;=\; -\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}\,.$$

Beweis. Sei $\lambda(z) = -\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$. Dann ist der Konvergenzradius $\rho(\lambda) = 1$ und nach Satz 2.18 ist

$$\lambda'(z) \;=\; -\sum_{n \geq 1} z^{n-1} \;=\; -\frac{1}{1-z}$$

mit $\rho(\lambda') = 1$. Nach dem Satz über implizite Funktionen (Satz 2.8) ist

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(1-z) \quad = \quad \frac{1}{\exp'(\mathrm{Log}(1-z))}\frac{d}{dz}(1-z) \;=\; -\frac{1}{1-z} \;=\; \lambda'(z)\,.$$

Somit ist $\frac{d}{dz}(\mathrm{Log}(1-z) - \lambda(z)) = 0$ und nach Satz 2.9 $\mathrm{Log}(1-z) = \lambda(z) + a$ mit einer Konstanten a. Der Wert bei $z = 0$ ist bei beiden Funktionen 1, also ist $a = 0$. □

Satz 2.27. *Die Funktionenfolge* $f_n(z) = (1 + \frac{z}{n})^n$ *konvergiert kompakt gegen* $\exp(z)$.

Beweis. Sei N fest und z aus der kompakten Menge $\overline{B_{\frac{N}{2}}(0)}$. Für $n \geq N$ gilt

$$\left|\frac{z}{n}\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\,;$$

die Zahl $1 + \frac{z}{n}$ liegt also im Definitionsbereich von Satz 2.26. Setze $g_n(z) = n \cdot \log(1 + \frac{z}{n})$; dann erlaubt Satz 2.26 die Darstellung

$$g_n(z) = -n \sum_{k \geq 1} \frac{(-\frac{z}{n})^k}{k}$$

und

$$\begin{aligned} |g_n(z) - z| \;&=\; \left| -n \sum_{k\geq 1} \frac{(-\frac{z}{n})^k}{k} - z \right| \;=\; \left| n \sum_{k\geq 2} \frac{(-\frac{z}{n})^k}{k} \right| \;\leq\; n \sum_{k\geq 2} \left|\frac{z}{n}\right|^k \\ &=\; n \left(\frac{1}{1 - \frac{|z|}{n}} - 1 - \frac{|z|}{n} \right) \;=\; \frac{1}{n} \frac{|z|^2}{1 - \frac{|z|}{n}} \;\leq\; \frac{1}{n} \frac{(\frac{N}{2})^2}{\frac{1}{2}} \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } n \to \infty \end{aligned}$$

Somit konvergieren die $g_n(z)$ kompakt gegen die Identitätsabbildung $f(z) = z$ auf ganz $\mathbb{C}$.

Als nächstes zeigen wir, dass $\exp(g_n)$ kompakt konvergiert gegen $\exp(f)$ auf $\mathbb{C}$. Verwende

$$|\exp(w) - 1| \;\leq\; \sum_{n\geq 1} \frac{|w|^n}{n!} \;\leq\; |e^{|w|} - 1| \leq |w| \cdot C_M$$

für $w \in B_M(0)$. Sei $z \in B_N(0)$. Dann gilt auf jedem Kompaktum:

$$\begin{aligned} |\exp(g_n(z)) - \exp(f(z))| \;&\leq\; |\exp(g_n(z) - f(z)) - 1| \cdot |\exp(f(z))| \\ &\leq\; C_M(g_n(z) - f(z)) \cdot \sup_{z \in B_N(0)} |\exp(f(z))| \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } n \to \infty\,. \end{aligned}$$

□

Definition 2.28. Für $\alpha \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{Z}$ und $z \neq 0$ definiert man den k^{ten} Zweig der allgemeinen α-Potenz

$$f_k(z) = \exp(\alpha \operatorname{Log}_k(z))$$

Eine vieldeutige Schreibweise ist $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log}_k(z)}$. Wenn allerdings $\alpha \in \mathbb{Z}$, dann ist z^α eindeutig bestimmt durch

$$z^\alpha = \begin{cases} z \cdot z \cdot \ldots \cdot z\,, & \alpha > 0 \\ 1\,, & \alpha = 0 \\ \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{z}\,, & \alpha < 0 \end{cases}$$

Für $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit teilerfremden p, q hingegen ist z^α endlich vieldeutig mit q Zweigen. Dann sind alle q Werte durch den Hauptzweig ausgedrückt:

$$\exp\left(\frac{p}{q}(\mathrm{Log}(z) + 2\pi i k)\right) \;=\; \exp\left(\frac{p}{q}\,\mathrm{Log}(z)\right)\; e^{2\pi i \frac{pk}{q}}\;, \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1\;.$$

Wiederum kann man die Vieldeutigkeit beheben, indem man z.B. $z^{\frac{1}{2}}$ auf einer Riemannschen Fläche definiert.

Wir kommen nun zu einer weiteren wichtigen Klasse von elementaren holomorphen Funktionen, den sogenannten Möbiustransformationen. Hierfür sind einige Vorbereitungen von Nöten. Die multiplikative Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ ist definiert durch

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \;=\; \left\{ T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;:\; a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det(T) \neq 0 \right\}.$$

Die Gruppe $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ hat die Untergruppe

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \;=\; \{T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \;:\; \det T = 1\}\,,$$

die sogenannte spezielle lineare Gruppe.

Definition 2.29. Definiere die Riemannsche Zahlenkugel $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^2$. Für $T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

definiere die *Möbiustransformation* $M_T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ durch

$$M_T(z) \;=\; \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}\,, & \text{falls } z \neq -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c}\,, & \text{falls } z = \infty \\ \infty\,, & \text{falls } z = -\frac{d}{c} \end{cases}$$

Bemerkungen:

(i) Für $\lambda \neq 0$ gilt $M_{\lambda T} = M_T$ (λ kürzt sich weg). Da $\det(\lambda T) = \lambda^2 \det(T)$, reicht es, M_T für $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ zu betrachten.

(ii) M_T beschränkt auf den Definitionsbereich $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ ist holomorph; dies folgt aus dem Wirtingerkalkül, da nur z und kein $\overline{z}$ vorkommt.

(iii) $M_T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Bijektion, da

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \iff wcz + wd = az + b \iff (wc - a)z = b - wd \iff z = \frac{wd - b}{-cw + a}\,.$$

Dies ist also eine Bijektion $\mathbb{C}\backslash\{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ und zudem $M_T(\infty) = \frac{a}{c}$ und $M_T(-\frac{d}{c}) = \infty$.

Satz 2.30. *Die Abbildung* $T \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \mapsto M_T \in \mathrm{Bij}(\overline{\mathbb{C}})$ *in die Bijektionen auf der Riemann'schen Zahlenkugel ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h. explizit* $M_{TT'} = M_T \circ M_{T'}$.

Beweis. Sei $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. Dann ist $TT' = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned}
(M_T \circ M_{T'})(z) &= M_T(\frac{a'z+b'}{c'z+d'}) \\
&= \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'}+d} \\
&= \frac{a(a'z+b')+b(c'z+d')}{c(a'z+b')+d(c'z+d')} \\
&= \frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+(cb'+dd')} \\
&= M_{TT'}(z)
\end{aligned}$$

Außerdem ist $(M_T \circ M_{T'})(\infty) = M_T(\frac{a'}{c'}) = \frac{a\frac{a'}{c'}+b}{c\frac{a'}{c'}+d} = \frac{aa'+bc'}{ca'+dc'} = M_{TT'}(\infty)$ und, unter Verwendung der Definition und $M_{TT'} = M_T \circ M_{T'}$,

$$M_{TT'}(-\frac{cb'+dd'}{ab'+bd'}) \;=\; \infty \;=\; (M_T \circ M_{T'})(-\frac{cb'+dd'}{ab'+bd'})\,.$$

□

Folgendes kann aus diesem Theorem gefolgert werden: Es gilt $(M_T)^{-1} = M_{T^{-1}}$ (die Umkehrabbildung kann nach obiger Bemerkung (iii) gebildet werden); denn für $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist $M_{\mathbb{E}}(z) = z$ für alle z und

$$M_T \circ M_{T^{-1}} \;=\; M_{T \cdot T^{-1}} = M_{\mathbb{E}} \;=\; \mathrm{id}\,;$$

also $M_{T^{-1}} = ((M_T)^{-1} \circ M_T) \circ M_{T^{-1}} = (M_T)^{-1} \circ \mathrm{id} = (M_T)^{-1}$.

Satz 2.31. *Die Gruppe der Möbiustransformationen ist isomorph zur Quotientengruppe*

$$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\big/_{\{\pm\mathbb{E}\}}$$

Beweis. Seien $T, T' \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Wähle die Notation

$$T'T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
M_T \;=\; M_{T'} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{id} \;=\; M_T \circ (M_{T'})^{-1} = M_{T'T^{-1}} \\
&\Longleftrightarrow \quad az+b \;=\; z(cz+d) \quad \forall\; z \in \mathbb{C} \\
&\Longleftrightarrow \quad c = 0\,,\;\; b = 0\,,\;\; a = d \in \{-1,+1\} \\
&\Longleftrightarrow \quad T'T^{-1} \;=\; \pm\mathrm{id} \\
&\Longleftrightarrow \quad T' \;=, \pm T\,.
\end{aligned}$$

Hierbei kommt die Forderung $a = d \in \{-1, +1\}$ aus der Determinantenbegingung von $T'T^{-1} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. $\square$

Definition 2.32. Folgende spezielle Möbiustransformationen haben eigene Namen:

- $M_{\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}(z) = z + \lambda$ heißt *Translation* um $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $M_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}}(z) = \lambda^2 z$ heißt *Dilatation* (Drehstreckung) um λ^2.
- $M_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}(z) = -\frac{1}{z}$ heißt *Inversion.*

Satz 2.33. *Jede Möbiustransformation kann als Komposition von Translationen, Dilatationen und Inversionen dargestellt werden.*

Beweis. Sei $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\det(T) = 1$. Zunächst sei $c = 0$. Dann folgt aus $\det T \neq 0$ die Tatsache $ad = 1$, und schließlich

$$M_T(z) = \frac{az+b}{d} = \left(\sqrt{\frac{a}{d}}\right)^2 z + \frac{b}{d} = \left[M_{\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \circ M_{\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{a}{d}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{d}{a}} \end{pmatrix}}\right](z)\,.$$

Nun sei $c \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} M_T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c^2(z+\frac{d}{c})} \\ &= \left[M_{\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \circ M_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} \circ M_{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}} \circ M_{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right](z)\,. \end{aligned}$$

$\square$

Definition 2.34. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to f(D)$ eine Abbildung.

(i) f heißt *biholomorph*, wenn f holomorph und injektiv, $f(D)$ offen und $f^{-1} : f(D) \to D$ ebenfalls holomorph ist.

(ii) Falls zusätzlich $f(D) = D$ ist, so heißt f *Automorphismus* von D. Die Menge aller Automorphismen von D ist mit $\mathrm{Aut}(D)$ bezeichnet. Sie ist eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung.

Bemerkung. Diese Definition kann auf komplex analytische Mannigfaltigkeiten (holomorphe Kartenwechsel) übertragen werden. Zum Beispiel ist $M_T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ für $T \in SL(2, \mathbb{C})$ ein Automorphismus von $\overline{\mathbb{C}}$, d.h. $M_T \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{C}})$. $\diamond$

Nun soll ein weiteres Beispiel für eine biholomorphe Abbildung gegeben werden.

Satz 2.35. *Definiere die Einheitsscheibe und die obere Halbebene durch*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$$

und

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Im m(z) > 0\}\,.$$

Setze

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}\,.$$

Dann ist $M_C : \mathbb{H} \to \mathbb{D}$ biholomorph. Die Abbildung M_C heißt Cayley-Transformation.

Beweis. Es ist $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ und $(M_C)^{-1} = M_{C^{-1}}$ und

$$\Im m(M_{C^{-1}}(z)) \ = \ \frac{i}{2}\big(\overline{M_{C^{-1}}(z)} - M_{C^{-1}}(z)\big) \ = \ \frac{i}{2}\Big(- \frac{\overline{z}+1}{i\overline{z}-i} - \frac{z+1}{iz-i}\Big) \ = \ \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}\,.$$

Somit:

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{D} &\iff 1 - |z|^2 > 0 \\ &\iff \Im m(M_{C^{-1}}(z)) > 0 \\ &\iff M_{C^{-1}}(z) \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

Analog gilt $1 - |M_C(z)|^2 = \frac{4\,\Im m(z)}{|z|^2 + 2\Im m(z) + 1}$. Also: $z \in \mathbb{H}$ impliziert $M_C(z) \in \mathbb{D}$. $\square$

Satz 2.36. *Für $T \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ ist $M_T \in Aut(\mathbb{H})$, d.h. $M_T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ ist biholomorph.*

Bemerkung. Gleiches gilt für die untere Halbebene, und die reelle Achse ist invariant unter M_T, $T \in SL(2, \mathbb{R})$. Später werden wir sehen:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \big/ _{\{\pm \mathbb{E}\}}\,.$$

$\diamond$

Beweis. Da $T^{-1} \in SL(2, \mathbb{R})$, genügt es zu zeigen, dass $M_T : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Dies folgt für $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ aus:

$$\begin{aligned} \Im m(M_T(z)) \ &= \ \frac{i}{2}(\overline{M_T(z)} - M_T(z)) \ = \ \frac{i}{2}\Big(\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} - \frac{az+b}{cz+d}\Big) \\ &= \ \frac{i}{2}\frac{(a\overline{z}+b)(cz+d) - (az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \ \frac{i}{2}\frac{(\overline{z}-z)(ad-bc)}{|cz+d|^2} \ = \ \frac{1}{|cz+d|^2}\Im m(z) \ > \ 0\,. \end{aligned}$$

$\square$

Satz 2.37. *Sei die Lorentzgruppe der Signature* $(1,1)$ *definiert durch*

$$\mathrm{U}(1,1) \;=\; \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;:\; \alpha,\, \beta \in \mathbb{C} \textit{ mit } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Für $T \in \mathrm{U}(1,1)$ *ist dann* $M_T \in Aut(\mathbb{D})$.

Beweis. Es gilt nach den bisherigen Sätzen (mit $S \in SL(2,\mathbb{R})$ beliebig) folgendes Schema:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \overset{M_S}{\longrightarrow} & \mathbb{H} \\ M_C \downarrow & & \downarrow M_C \\ \mathbb{D} & \underset{M_T}{\longrightarrow} & \mathbb{D} \end{array}$$

Also ist $M_T = M_C \circ M_S \circ M_{C^{-1}} = M_{CSC^{-1}}$ und es reicht zu zeigen, dass

$$C \cdot \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \cdot C^{-1} \;=\; \mathrm{U}(1,1)$$

Dies folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \;&=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib & a-ib \\ c+id & c-id \end{pmatrix} \\ &=\; \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+d)+i(b-c) & (a-d)-i(b+c) \\ (a-d)+i(b+c) & (a+d)-i(b-c) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

denn es ist leicht zu überprüfen, dass Letzteres wirklich in $\mathrm{U}(1,1)$ ist, wenn $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ und $ad - bc = 1$. $\square$

3 Komplexe Integration

3.1 Komplexe Wegintegrale

Folgende Tatsachen aus der reellen Analysis werden als bekannt vorausgesetzt:

- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $a < b \in \mathbb{R}$. Dann ist f Riemann-integrierbar, d.h. folgender Limes existiert und definiert das Integral:

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f\big(a + \tfrac{b-a}{N} j\big)\,\frac{b-a}{N}\;.$$

  Ausserdem kann das Integral als Limes von Ober- oder Untersummen berechnet werden:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt \;&=\; \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} \sup_{x\in[a+\frac{b-a}{N}(j-1),a+\frac{b-a}{N}j]} f(x)\\ &=\; \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=1}^{N} \inf_{x\in[a+\frac{b-a}{N}(j-1),a+\frac{b-a}{N}j]} f(x)\end{aligned}$$

- Fundamentalsatz: Für $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F' = f$ gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; F(b) - F(a)\;.$$

  Dann heißt F Stammfunktion von f (sie ist bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt).

- Partielle Integration: Wenn $F' = f$ und $G' = g$, so gilt

$$\int_a^b F(t)g(t)\,dt \;=\; F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(t)G(t)\,dt$$

- Substitutionsregel: Für eine stetig differenzierbare Funktion $\phi : [a,b] \to [\phi(a), \phi(b)]$, gilt

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,dt \;=\; \int_a^b f(\phi(t))\frac{d\phi(t)}{dt}\;dt$$

Definition 3.1 (Ableitung und Integral komplexwertiger Funktion auf einem Intervall)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist stetig genau dann, wenn $\Re e(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $\Im m(f) : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig sind. Analog ist $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ differenzierbar genau dann, wenn $\Re e(f) : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $\Im m(f) : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im reellen Sinne sind. Wieder ist nun $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ Stammfunktion, wenn $F' = f$ auf (a,b) gilt. Weiter ist für stetiges $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ das Integral definiert als

$$\int_a^b f(t)\,dt \;=\; \left(\int_a^b \Re e(f(t))\,dt\right) \;+\; i\left(\int_a^b \Im m(f(t))\,dt\right)\;.$$

Alle diese Definitionen beruhen einfach darauf, dass für eine komplexwertige Funktion Real- und Imaginärteil separat betrachtet werden. Somit gilt auch für komplexwertige Funktionen auf einem Intervall wieder der Fundamentalsatz. Beachte, dass die obige Differenzierbarkeit wegen des reellen Definitionsbereiches nichts mit der komplexen Differenzierbarkeit zu tun hat.

Wir betrachten nun Wege in $\mathbb{C}$, entlang derer wir später integrieren möchten.

Definition 3.2 (Weg in $\mathbb{C}$). (i) Eine stetige Abbildung $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt ein *parametrisierter Weg* oder *Kurve* in $\mathbb{C}$.

(ii) Die Bildpunkte $\{\Gamma(t) \in \mathbb{C} \ : \ a \leq t \leq b\}$ von Γ heißen

$$\mathrm{Bild}(\Gamma) \ = \ \mathrm{Spur}(\Gamma) \ = \ \mathrm{Graph}(\Gamma) \ .$$

(iii) $\Gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* und $\Gamma(b)$ *Endpunkt*.

(iv) Γ heißt *geschlossen*, wenn $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ ist.

(v) Sei $\phi : [c, d] \to [a, b]$ eine monoton wachsende, stetige und surjektive Abbildung. Dann ist

$$\tilde{\Gamma} \ = \ \Gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{C}$$

eine *Umparametrisierung* des Weges Γ.

(vi) Die Umkehrung $-\Gamma$ des Weges Γ ist der Weg

$$-\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

mit $(-\Gamma)(t) = \Gamma(a + b - t)$.

(vii) Seien $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma : [b, c] \to \mathbb{C}$ Wege, die aneinander anknüpfen, d.h. $\Gamma(b) = \gamma(b)$. Dann ist der *verknüpften Weg* $\Gamma + \gamma : [a, c] \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(\Gamma + \gamma)(t) \ = \ \begin{cases} \Gamma(t) & \text{falls } t \in [a, b] \\ \gamma(t) & \text{falls } t \in [b, c] \end{cases} \ .$$

(viii) Ein Weg $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ heißt *stetig differenzierbar*, wenn die Abbildungen $t \mapsto \Re e(\Gamma(t))$ und $t \mapsto \Im m(\Gamma(t))$ als Abbildungen von Teilmengen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind.

(ix) Γ heißt *stückweise stetig differenzierbar*, wenn

$$\Gamma = \Gamma_1 + ... + \Gamma_K$$

(wie in (vii) definiert) mit stetig differenzierbaren Teilwegen. Γ_k, $k = 1, ..., K$.

(x) Γ heißt *rektifizierbar*, wenn folgendes Supremum endlich ist (man sagt auch, es existiert):

$$|\Gamma| \;=\; \sup_N \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_N=b} \sum_{j=1}^N |\Gamma(t_j)-\Gamma(t_{j-1})| \;<\; \infty$$

Dann heißt $|\Gamma|$ die Länge von Γ.

Satz 3.3. *Sei Γ stetig differenzierbar. Dann ist Γ rektifizierbar, und es gilt*

$$|\Gamma| \;=\; \int_a^b \big|\frac{d}{dt}\Gamma(t)\big|\,dt \;=\; \int_a^b \sqrt{\Re e(\Gamma'(t))^2+\Im m(\Gamma'(t))^2}\,dt$$

Beweis. Es gilt für jede Zerlegung $a=t_0<\ldots<t_N=b$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N |\Gamma(t_j)-\Gamma(t_{j-1})| \;&=\; \sum_{j=1}^N \Big|\int_{t_{j-1}}^{t_j}\Big(\frac{d}{dt}\Gamma(t)\Big)\,dt\Big| \\ &\le\; \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j}\big|\frac{d}{dt}\Gamma(t)\big|\,dt \\ &=\; \int_a^b \big|\frac{d}{dt}\Gamma(t)\big|\,dt \;<\; \infty\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Länge $|\Gamma|\le\int_a^b|\Gamma'(t)|\,dt$ beschränkt ist. Für die Ungleichung in die andere Richtung verwende, dass Γ' (als stetige Abbildung, die auf einem kompaktem Zeitintervall definiert ist) gleichmäßig stetig ist (siehe Literatur). □

Folgender Sachverhalt folgt nun aus den oben zitierten Aussagen:

Satz 3.4 (Wegintegral)**.** *Sei $\Gamma:[a,b]\to D\subset\mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $f:D\to\mathbb{C}$ stetig. Dann existiert der folgende Limes und definiert das* Wegintegral *von f entlang Γ:*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz \;=\; \lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^N (f\circ\Gamma)(a+\tfrac{b-a}{N}j)\cdot\Big(\Gamma\big(a+\tfrac{b-a}{N}j\big)-\Gamma(a+\tfrac{b-a}{N}(j-1))\Big)$$

Das Wegintegral (*als wohldefiniertes Riemann-Integral*) *explizit berechnet werden durch*

$$\int_\Gamma f(z)dz \;=\; \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt\,.$$

Bemerkung. Es ist möglich, dass Wegintegral auch für nur rektifizierbare Kurven zu definieren, aber dies ist in der Funktionentheorie nicht wirklich notwendig. Allerdings wird oft mit stückweise stetig differenzierbaren Wegen gearbeitet (mit endlich vielen stetig differenzierbaren Teilstücken). Für diese können die obigen Formeln zu

$$\int_\Gamma f(z)dz \;=\; \sum_k \int_{\Gamma_k} f(z)dz$$

verbunden und als Definition des Wegintegrals verwendet werden. ◇

Konvention: Alle Wege und Umparametrisierungen sind stückweise stetig differenzierbar.

Satz 3.5 (Eigenschaften des Wegintegrals)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.*

(i) *Es gilt die Standardabschätzung*

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \;\leq\; \left(\sup_{a\leq t\leq b} |(f\circ\Gamma)(t)|\right)\cdot|\Gamma|\,.$$

(ii) *Sei $\tilde\Gamma = \Gamma\circ\phi$ eine Umparametrisierung von Γ. Dann ist $\int_{\tilde\Gamma} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz$.*

(iii) *Orientierungswechsel: $\int_{(-\Gamma)} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz$*

(iv) *Verknüpfte Wege: $\int_{(\Gamma_1+\Gamma_2)} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \;+\; \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz$*

(v) *Linearität für g stetig und $\lambda\in\mathbb{C}$: $\int_\Gamma (f+\lambda g)(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz \;+\; \lambda\int_\Gamma g(z)\,dz$*

(vi) *Sei $h : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $\tilde\Gamma = h\circ\Gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ der unter der Abbildung h transportierte Weg. Für Spur$(\Gamma)\subset G$ ist dann*

$$\int_{\tilde\Gamma} f(z)\,dz \;=\; \int_\Gamma (f\circ h)(\zeta)\cdot h'(\zeta)\,d\zeta\,.$$

(vii) *Seien $f_n : D\to\mathbb{C}$ stetige Abbildungen, und die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ konvergiere uniform auf D gegen f. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Gamma f_n(z)\,dz \;=\; \int_\Gamma f(z)\,dz\,.$$

(viii) *Sei X metrischer Raum und $g : \mathbb{C}\times X\to\mathbb{C}$ sei stetig in $(z,x)\in\mathbb{C}\times X$. Dann ist auch die Abbildung $x\mapsto\int_\Gamma g(z,x)\,dz$ stetig.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \;=\; \left|\int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\,dt\right| \;\leq\; \int_a^b \sup_{a\leq\tau\leq b}|f(\Gamma(\tau))|\cdot|\Gamma'(t)|\,dt\,,$$

und das Integral über $|\Gamma'(t)|$ ist gerade die Länge $|\Gamma|$.

(ii) Sei $\phi : [c,d]\to[a,b]$ Bijektion mit $\phi'(t) > 0$ und $\tilde\Gamma = \Gamma\circ\phi : [c,d]\to\mathbb{C}$. Verwende die reelle Substitutionsregel (das Integral sei hierfür in Real- und Imaginärteil aufgetrennt). Setze $s = \phi(t)$ und verwende $\phi(c) = a$ und $\phi(d) = b$:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde\Gamma} f(z)\,dz \;&=\; \int_c^d f(\tilde\Gamma(t))\cdot\tilde\Gamma'(t)\,dt \;=\; \int_c^d f(\Gamma(\phi(t)))\cdot\Gamma'(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt\\ &=\; \int_a^b f(\Gamma(s))\cdot\Gamma'(s)ds \;=\; \int_\Gamma f(z)\,dz\,.\end{aligned}$$

(iii) Ebenfalls mit Substitutionsregel.

(iv) Folgt aus der Additivität des Riemann-Integrals unter Vereinigung disjunkter Intervalle.

(v) Schreibübung.

(vi) Schreibübung.

(vii) f ist als uniformer Limes stetiger Funktionen stetig und somit ist $\int_\Gamma f(z)\,dz$ also definiert. Dann gilt:

$$\left|\int_\Gamma f_n(z)\,dz - \int_\Gamma f(z)\,dz\right| \overset{(v)}{=} \left|\int_\Gamma (f_n(z) - f(z))\,dz\right| \overset{(i)}{\leq} |\Gamma| \cdot \|f_n - f\|_{\infty, D} \;\to\; 0\;,$$

für $n \to \infty$.

(viii) folgt aus der entsprechenden Eigenschaft für das Riemann-Integral. □

Beispiel (Ein im weiteren Verlauf sehr wichtiges Wegintegral)**.** Sei $J \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Spur}(\Gamma) = \partial B_r(J)$, d.h. (positiv orientiert): $\Gamma(t) = J + re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist

$$\int_\Gamma (z-J)^n\,dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i \cdot r^{n+1}\;, & n = -1\,, \\ 0\;, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}\,. \end{cases}$$

Denn:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma (z-J)^n\,dz \;&=\; \int_0^{2\pi} (\Gamma(t) - J)^n \Gamma'(t)\,dt \;=\; \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot rie^{it}\,dt \\ &=\; ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{it(n+1)}\,dt \;=\; 2\pi i r^{n+1}\delta_{n+1,0}\,.\end{aligned}$$

Daher, für beliebiges $r > 0$ (da $r^0 = 1$):

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-J}\,\frac{dz}{2\pi i} \;=\; 1\,.$$

◇

3.2 Der Index (oder Windungszahl) eines geschlossenen Weges

Satz 3.6. *Sei Γ geschlossener Weg und stückweise stetig differenzierbar und $w \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\Gamma)$. Definiere den* Index *von w bzgl. Γ durch*

$$\mathrm{Ind}_w(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,\frac{dz}{2\pi i}\,.$$

Der Index $\mathrm{Ind}_w(\Gamma)$ heißt auch die Windungszahl *von Γ um w. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Ind}_w(\Gamma) \in \mathbb{Z}$

(ii) $\mathrm{Ind}_w(\Gamma)$ *ist konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\Gamma)$

(iii) *Für w außerhalb von Γ, d.h. w in der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}(\Gamma)$, *gilt* $\mathrm{Ind}_w(\Gamma) = 0$.

Beweis. Wähle die Parametrisierung $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ so, dass $\Gamma'(t) \neq 0$ ist.

(i) Explizite Berechung mit Substitutionsregel:

$$\mathrm{Ind}_w(\Gamma) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w}\, dt$$

Setze

$$\rho(s) \;=\; \exp\Big(\int_a^s \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w}\, dt \Big)$$

für $s \in [a, b]$. Dann ist $\rho(a) = 1$ und außerdem $\rho(b) = 1$ genau dann, wenn

$$\int_a^b \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - w}\, dt \;=\; 2\pi i n$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$, und dies passiert wiederum genau dann, wenn

$$\mathrm{Ind}_w(\Gamma) \in \mathbb{Z}\,.$$

Zu zeigen ist also $\rho(b) = 1$. Nun ist ρ reell differenzierbar und:

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \;=\; \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - w} \qquad \forall\, s \in [a, b]$$

Multipliziere dies mit $\rho(s)/\Gamma'(s)$ und betrachte die Abbildung

$$[a, b] \;\ni\; s \;\mapsto\; \frac{\rho(s)}{\Gamma(s) - w} \;=\; \frac{\rho'(s)}{\Gamma'(s)}\,.$$

Diese ist stetig (keine Singularität, da $\Gamma'(s) \neq 0$; beachte zudem, dass die endlich vielen Sprungstellen das Argument nicht ändern). Außerdem ist

$$\frac{d}{ds}\, \frac{\rho(s)}{\Gamma(s) - w} \;=\; \frac{(\Gamma(s) - w)\rho'(s) - \rho(s) \cdot \Gamma'(s)}{(\Gamma(s) - w)^2} \;=\; \frac{\Gamma'(s) \cdot \rho(s) - \rho(s) \cdot \Gamma'(s)}{(\Gamma(s) - w)^2} \;=\; 0\,.$$

Somit ist (abgesehen von eventuell endlich vielen Sprungstellen) $\frac{\rho(s)}{\Gamma(s)-w}$ lokal konstant. Da $\frac{\rho(s)}{\Gamma(s)-w}$ stetig ist, folgt sogar, dass $\frac{\rho(s)}{\Gamma(s)-w}$ konstant ist für alle $s \in [a,\, b]$. Weil $\rho(a) = 1$ gilt, ist

$$\rho(b) \;=\; \frac{\rho(b)}{\Gamma(b) - w}\, \frac{\Gamma(b) - w}{\rho(a)} \;=\; \frac{\rho(a)}{\Gamma(a) - w}\, \frac{\Gamma(a) - w}{\rho(a)}\,,$$

wobei wir einerseits die Konstanz des ersten Faktors und andererseits $\Gamma(a) = \Gamma(b)$ verwendet haben; letzteres ist klar, da Γ ein geschlossener Weg ist. Dies impliziert $\rho(b) = 1$.

(ii) Die Abbildung
$$\mathbb{C} \setminus \mathrm{Spur}\,(\Gamma) \ \ni \ w \ \mapsto \ \mathrm{Ind}_w(\Gamma) \ = \ \int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,\frac{dz}{2\pi i}$$
ist nach Teil (viii) von Satz 3.5 stetig, und offensichtlich ist eine ganzzahlige stetige Funktion lokal konstant.

(iii) Folgt aus (ii) mit der Abschätzung
$$|\mathrm{Ind}_w(\Gamma)| \ \leq \ \int_a^b \frac{|\Gamma'(t)|}{|\Gamma(t)-w|}\,\frac{dt}{2\pi}$$
Dies wird für große w beliebig klein, bei festgehaltenem Γ. □

3.3 Cauchy'scher Integralsatz und Cauchy'sche Integralformel

Definition 3.7 (Gebiete)**.** (i) $D \subset \mathbb{C}$ heißt *wegzusammenhängend*, wenn je zwei Punkte aus D durch einen Weg in D verbunden werden können.

(ii) $D \subset \mathbb{C}$ heißt *Gebiet*, wenn D offen und wegzusammenhängend ist.

(iii) Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt *Sterngebiet*, wenn es ein *Zentrum* $z_0 \in D$ gibt, so dass mit $z \in D$ auch die Verbindungslinie $[z_0, z]$ ganz in D liegt.

(iv) $D \subset \mathbb{C}$ heißt *konvex*, wenn für alle $z, z' \in D$ gilt $[z', z] \subset D$.

Bemerkung. Es gilt folgende Implikationskette für offene Mengen im $\mathbb{R}^n$: D konvex $\Longrightarrow$ D Sterngebiet $\Longrightarrow$ D wegzusammenhängend $\Longleftrightarrow$ D zusammenhängend (d.h. jede Zerlegung von D in zwei offene disjunkte Mengen ist trivial; diese letzte Äquivalenz ist nicht offensichtlich und bedarf eines Beweises). Dabei sind Sterngebiete im allgemeinen nicht konvex. ⋄

Satz 3.8. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ Sterngebiet mit Zentrum z_0, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Äquivalent sind (jeweils mit stückweise stetig differenzierbaren Wegen):*

(i) *Die Funktion f besitzt eine holomorphe Stammfunktion $F : D \to \mathbb{C}$, d.h. $F' = f$ mit Ableitung im komplexen Sinne.*

(ii) *Für alle $z, z' \in D$ und jeden Weg Γ in D mit Anfangspunkt z und Endpunkt z' gilt:*
$$\int_\Gamma f(z)\,dz \ = \ F(z') - F(z) \ = \ konst\,.$$
(Wegunabhängigkeit von Wegintegralen über f).

(iii) *Für alle geschlossenen Wege Γ in D gilt:*
$$\int_\Gamma f(z)\,dz \ = \ 0\,.$$

(iv) *Für jeden Dreiecksweg* $[z_0, z_1, z_2] = [z_0, z_1] + [z_1, z_2] + [z_2, z_0]$*, der ganz in* D *liegt, gilt:*

$$\int_{[z_0, z_1, z_2]} f(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

Bemerkung 3.9. Die Äquivalenzen in Satz 3.8 sind auch richtig in einem einfach zusammenhängend Gebiet D, d.h. in einem Gebiet, in dem sich jeder Weg (innerhalb D) auf einem Punkt zusammenziehen lässt. Sterngebiete sind einfach zusammenhängend, aber die Umkehrung gilt nicht (denken Sie an eine Mondsichel). Dies wird im folgenden Paragraphen weiter untersucht. ◇

Bemerkung 3.10. In der reellen Analysis hat jede stetige Funktion eine Stammfunktion. Hier (im Sinne von holomorpher Stammfunktion) ist das an Bedingungen geknüpft. ◇

Bemerkung 3.11. Betrachte $f(z)\, dz$ als Summe von zwei 1-Formen im Sinne der reellen Analysis:

$$f(z)\, dz \;=\; (u + iv)(dx + idy) \;=\; (udx - vdy) + i(udy + vdx)$$

Die Existenz einer holomorphen Stammfunktion entspricht dem Fall, dass beide 1-Formen simultan exakt sind, d.h.

$$f(z)\, dz \;=\; dF\,.$$

Begründung: Sei, wenn existent, $F = U + iV$. Dann ist

$$dF \;=\; d(U + iV) \;=\; \partial_x U dx + \partial_y U dy + i\partial_x V dx + i\partial_y V dy\,.$$

Nach den Cauchy-Riemannschen Differenzialgleichungen ist aber $\partial_y U = -\partial_x V$ und $\partial_y V = \partial_x U$. Setze also $u = \partial_x U$, $v = \partial_x V$. ◇

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii): Sei $\Gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ beliebiger Weg mit $\Gamma(a) = z, \Gamma(b) = z'$.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\, dz \;&=\; \int_a^b f(\Gamma(t))\Gamma'(t)\, dt \;=\; \int_a^b F'(\Gamma(t))\Gamma'(t)\, dt \\ &=\; \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\Gamma(t)))\, dt \;=\; F(\Gamma(b)) - F(\Gamma(a))\;.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Fundamentalsatz jeweils für $\Re e(f)$ und $\Im m(f)$ angewendet.

(ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(iv) ist klar.

(iv)$\Longrightarrow$(i): Setze $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta$ für $z \in D$. Für $h \in \mathbb{C}$ ausreichend klein ist auch der Dreiecksweg $[z_0, z, z + h] \subset D$. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral über diesen Integrationsweg. Es gilt per definitionem

$$F(z + h) \;=\; \int_{[z_0,\, z+h]} f(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta + \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta\,.$$

Also:

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta \;=\; \frac{1}{h}\int_0^1 f(z + th)\cdot h\, dt \;\longrightarrow\; f(z) \qquad \text{für } h \to 0\,,$$

Letzteres weil f stetig ist. □

Satz 3.12 (Integrallemma von Goursat, Beweis von Pringsheim)**.** *Sei D offen, $\Delta \subset D$ Dreieck mit Randweg $\partial\Delta$ (positiv orientiert). Außerdem seien $z_1 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $f|_{D\setminus\{z_1\}} : D \setminus \{z_1\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

Beweis. Betrachte zuerst den Fall $z_1 \notin \Delta$. Unterteile Δ in 4 kongruente Dreiecken Δ_j, $j = 1, ..., 4$. Malen Sie sich hiervon und allen anderen unten auftretenden Dreiecke ein Bild. Für die Länge der Randwege gilt $|\partial\Delta_j| = \frac{1}{2}|\partial\Delta|$. Setze nun

$$I(\Delta) \;=\; \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz\,.$$

Da sich umgekehrt durchlaufene Wege wegheben, gilt

$$I(\Delta) \;=\; \sum_{i=1}^{4} I(\Delta_i)\,.$$

Sei $\Delta^{(1)}$ dasjenige der 4 Dreiecke, für das $I(\Delta^{(1)})$ maximal ist. Nach Anwendung der Dreiecksungleichung folgt:

$$|I(\Delta)| \;\;\leq\;\; 4|I(\Delta^{(1)})|\,.$$

Zerlege nun wieder $\Delta^{(1)}$ in 4 kongruente Dreiecke und nenne dasjenige unter ihnen, welches den größten Integralwert liefert , $\Delta^{(2)}$. Es folgt

$$|I(\Delta)| \;\;\leq\;\; 4\,|I(\Delta^{(1)})| \;\leq\; 16\,|I(\Delta^{(2)})|\,,$$

und nach N Iterationen

$$|I(\Delta)| \;\;\leq\;\; 4^N\,|I(\Delta^{(N)})|\,.$$

Betrachte nun die auf diese Weise gewonnene unendliche Folge von absteigenden Dreiecken $(\Delta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist der Durchschnitt dieser Dreiecke

$$\bigcap_{n\geq 1} \Delta^{(n)} \;\;=\;\; \{z_0\}\;,$$

für ein gewisses z_0. Der Durchschnitt ist also einpunktig. Weil f holomorph ist (und nach Annahme $z_1 \neq z_0$), lässt sich mit einer stetigen Funktion g mit $g(z_0) = 0$ schreiben:

$$f(z) \;=\; f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)g(z)\,.$$

Nun hat $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ die Stammfunktion $F(z) = (f(z_0) - f'(z_0)z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)z^2$. Nach Satz 3.8 verschwindet jedes geschlossene Kurvenintegral über F. Der erste Summand von f

wird unter dem Integral also zu 0. Somit

$$\begin{aligned} |I(\Delta^{(N)})| &= \Big| \int_{\partial\Delta^{(N)}} (z - z_0) g(z)\, dz \Big| \\ &\leq |\partial\Delta^{(N)}| \max_{z \in \partial\Delta^{(N)}} |(z - z_0) g(z)| \\ &\leq |\partial\Delta^{(N)}| \cdot |\partial\Delta^{(N)}| \cdot ||g||_{\infty, \partial\Delta^{(N)}} \\ &= \Big(\frac{1}{2^N} |\partial\Delta| \Big)^2 \cdot ||g||_{\infty,\, \partial\Delta^{(N)}} \end{aligned}$$

Also folgt

$$\Longrightarrow |I(\Delta)| \;\leq\; 4^N |I(\Delta^{(N)})| \;\leq\; |\partial\Delta|^2 \cdot ||g||_{\infty,\, \partial\Delta^{(N)}} \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } N \to \infty\,,$$

Letzteres, da g stetig und $g(z_0) = 0$ ist.

Sei nun z_1 Eckpunkt von Δ, d.h. $\partial\Delta = [z_1, a, b]$. Unterteile Δ in 3 Dreiecke: eines um die Ecke z_1 mit Kantenlänge δ (nenne dieses Δ_1); die anderen beiden (Δ_2 und Δ_3) bekommt man, indem man den Rest von Δ mittels der Strecke vom Endpunkt einer der δ-Kanten zur gegenüberliegenden Ecke zerteilt. Dann gilt:

$$\Big| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \Big| \;=\; \Big| \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz + \int_{\partial\Delta_3} f(z)\, dz \Big|$$

Nach dem eben bewiesenen verschwinden die letzten beiden Integrale, da die zugehörigen Dreiecke die Singularität z_1 nicht enthalten:

$$\Big| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \Big| \;=\; \Big| \int_{\partial_1\Delta} f(z)\, dz \Big| \;\leq\; |\partial\Delta_1| \cdot \sup_{z \in \Delta_1} |f(z)| \;\longrightarrow\; 0 \cdot |f(z_1)| \;=\; 0 \qquad \text{für } \delta \to 0$$

wiederum unter Verwendung der Stetigkeit von f.

Falls $z_1 \in \Delta$ kein Eckpunkt ist, teile Δ in 3 Dreiecke auf, die jeweils z_1 als Eckpunkt haben und verwende Obiges. □

Bemerkung. Später werden wir sehen, dass z_1 eine sogenannte hebbare Singularität ist, d.h. letztendlich ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. ⋄

Satz 3.13 (Cauchy'scher Integralsatz auf Sterngebieten D mit Zentrum z_0)**.** *Sei D ein Sterngebiet mit Zentrum $z_0 \in D$. Sei $z_1 \in D$, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig, außerdem $f|_{D \setminus \{z_1\}} : D \setminus \{z_1\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt:*

(i) *Für alle geschlossenen Wege Γ in D gilt $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.*

(ii) *Zudem ist $F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta$ Stammfunktion von f.*

Beweis. Nach Satz 3.12 ist das Kriterium (iv) in Satz 3.8 erfüllt. □

Bemerkung. Später wird dieser Satz auf Gebiete D verallgemeinert, die homolog einfach zusammenhängend oder homotop einfach zusammenhängend sind. ⋄

Beispiel. Die Menge $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ ist ein Sterngebiet mit Zentrum $z_0 = 1$ (jeder andere Punkt in $\mathbb{R}_{>0}$ ist ebenfalls Zentrum). Der Hauptzweig des Logarithmus ist nun die Stammfunktion von $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, d.h.

$$\mathrm{Log}(z) \;=\; \int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta\,.$$

Begründung: Wegen der Wegunabhängigkeit des Wegintegrals können wir für $z = re^{i\phi}$ den direkten Weg $[1, z]$ ersetzen durch den “Umweg”$[1, r]$+[Kreisweg von r nach z]. Betrachte nun der Einfachheit halber den Fall $r > 1, \phi > 0$. Setze $\Gamma_1(t) := t$ für $1 \leq t \leq r$ und $\Gamma_2(t) = re^{it}$ für $0 \leq t \leq \phi$. Dann gilt:

$$\int_{[1,z]} \frac{1}{\zeta}\, d\zeta \;=\; \int_1^r \frac{1}{t}\, dt + \int_0^\phi \frac{1}{re^{it}}(r \cdot ie^{it})\, dt \;=\; \log(r) + i\phi \;=\; \mathrm{Log}[re^{i\phi}] \;=\; \mathrm{Log}[z]\,.$$

◇

Satz 3.14 (Cauchy’sche Integralformel für Sterngebiete $D \subset \mathbb{C}$)**.** *Sei D ein Sterngebiet. Seien $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, Γ ein geschlossener Weg in D und $z \in D$ mit $z \notin \mathrm{Spur}\,(\Gamma)$. Dann gilt*

$$f(z)\,\mathrm{Ind}_z(\Gamma) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,.$$

Beweis. Setze für $\zeta \in D$

$$g(\zeta) \;=\; \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}\,, & \text{falls } \zeta \neq z\,, \\ f'(z)\,, & \text{falls } \zeta = z\,. \end{cases}$$

Dann ist $g : D \setminus \{z\} \to \mathbb{C}$ holomorph und zudem $g : D \to \mathbb{C}$ stetig. Nach dem vorherigen Satz gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta\, g(\zeta) \;=\; 0\,.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta\, \frac{f(z)}{\zeta - z} \;=\; f(z) \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma d\zeta\, \frac{1}{\zeta - z} \;=\; f(z)\,\mathrm{Ind}_z(\Gamma)\,.$$

□

Bemerkung. Der wichtigste Fall ist $\mathrm{Ind}_z(\Gamma) = 1$ (z.B. Γ =Kreis). Für alle z im Inneren von Γ ist nach der Cauchy’schen Integralformel der Wert von $f(z)$ bereits durch die Werte von f auf Γ festgelegt. ◇

Bemerkung. Es gilt die *Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen*. Dies ist ein Spezialfall der Cauchy’schen Integralformel. Setze $\Gamma(t) = z + re^{it}$. Dies impliziert $\Gamma'(t) = rie^{it}$. Deswegen

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{it})}{z + re^{it} - z}(rie^{it})\, dt \;=\; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it})\, dt\,.$$

◇

3.4 Potenzreihenentwicklung und erste Konsequenzen

Nach Satz 2.18 sind konvergente Potenzreihen holomorph. Nun zeigen wir die Umkehrung.

Satz 3.15. *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ und $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f um z_0 durch eine konvergente Potenzreihe darstellbar:*

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n\,.$$

Der Konvergenzradius ρ erfüllt $\rho \geq R$, und die Koeffizienten a_n sind gegeben durch

$$a_n \;=\; \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,\frac{d\zeta}{2\pi i}$$

für beliebiges $r < R$. Insbesondere ist also f unendlich oft komplex differenzierbar, und

$$f^{(n)}(z_0) \;=\; \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta \;=\; n!\,a_n$$

(Taylor-Formel).

Beweis. Sei $z \in B_r(z_0)$, d.h. $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Nach der Cauchyschen Integralformel gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta - z_0}}\,\frac{d\zeta}{2\pi i} \end{aligned}$$

Mit $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$ lässt sich die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned} f(z) &= \oint_{\partial B_r(z_0)} f(\zeta)\,\frac{1}{\zeta - z_0}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n\,\frac{d\zeta}{2\pi i} \\ &= \oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\cdot \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,(z-z_0)^n \end{aligned}$$

Jetzt konvergiert die Reihe nach dem Weierstraß'schen Majorantentest uniform in ζ auf $\partial B_r(z_0)$, weil für $\zeta \in \partial B_r(z_0)$ gilt:

$$\left| f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right| \;\leq\; \frac{\sup_{\zeta\in\partial B_r(z_0)} f(\zeta)}{r}\cdot\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n\,.$$

Wird dieser Ausdruck über alle n summiert, so bleibt das Ergebnis kleiner ∞; somit bildet die rechte Seite eine Majorante.

Nach Satz 3.5 darf man jetzt Limes und Integral vertauschen. Somit:

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} \left[\oint_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, \frac{d\zeta}{2\pi i} \right] (z - z_0)^n \,.$$

Aus diesem Ausdruck lässt sich die Formel für a_n ablesen. Da

$$|a_n| \;\leq\; \frac{|\partial B_r(z_0)|}{2\pi} \sup_{\zeta \in \partial B_r(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{r^{n+1}} \;=\; \frac{\sup_{\zeta\in\partial B_r(z_0)} |f(\zeta)|}{r^n} \;=\; C \frac{1}{r^n}\,,$$

folgt für den Konvergenzradius für alle beliebig gewählten $r < R$:

$$\rho \;=\; \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \;\geq\; \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{C}{r^n}}} \;=\; r\,.$$

□

Korollar 3.16 (Cauchy-Abschätzungen)**.** *Sei $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt für alle r mit $0 < r < R$:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \;\leq\; \frac{n!}{r^n} \max_{z \;\; |z - z_0| \, = \, r} |f(z)|\,.$$

Beweis. Dies folgt aus der Gleichung $f^{(n)}(z_0) = n!\, a_n$. □

Satz 3.17 (Satz von Morera, Umkehrung vom Satz von Goursat)**.** *Sei $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0$$

für alle Dreiecke $\Delta \subset D$. Dann ist f holomorph auf D.

Beweis. Sei $B_r(z_0) \subset D$ beliebige Kugel, $z_0 \in D$. Nach Satz 3.8 ist das Verschwinden der Integrale über Dreieckswege äquivalent dazu, dass $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(\zeta)\, d\zeta$ Stammfunktion zu f ist. Nach dem vorherigen Satz ist $F^{(n)}$ holomorph auf $B_r(z_0)$ und darstellbar als n-te Ableitung einer Potenzreihe. Insbesondere ist $F' = f$ holomorph auf $B_r(z_0)$, und, da diese Kugel beliebig gewählt war, sogar holomorph auf ganz D. □

Zusammenfassung wichtiger Eigenschaften: Sei f eine holomorphe Funktion auf einem Sterngebiet D. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$ für alle geschlossenen Wege $\Gamma \subset D$.

(ii) $f(z) \operatorname{Ind}_z(\Gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$ für $z \notin \operatorname{Spur}(\Gamma)$.

(iii) f hat um jeden Punkt $z_0 \in D$ eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n\,,$$

wobei die Koeffizienten a_n für geeignetes $r>0$ gegeben sind durch

$$a_n \;=\; \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,\frac{d\zeta}{2\pi i} \;=\; \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,.$$

Außerdem gilt die Cauchy'sche Abschätzungsformel:

$$|a_n| \;\leq\; \frac{\max_{|z-z_0|=r}|f(z)|}{r^n}\,.$$

Satz 3.18 (Satz von Liouville)**.** *Sei f eine ganze Funktion (d.h. $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorph). Wenn es eine Konstante C gibt, so dass $|f(z)|\leq C \quad \forall\, z\in\mathbb{C}$ gilt, dann ist f konstant.*

Beweis. Betrachte die Potenzreihenentwicklung um $z_0=0$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n z^n\,.$$

Nach Satz 3.15 konvergiert diese Reihe auf ganz $\mathbb{C}$ und stimmt überall mit f überein. Verwende nun die Cauchy-Abschätzung:

$$|a_n| \;=\; \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \;\leq\; \frac{1}{r^n}\max_{|z|=r}|f(z)| \;\leq\; \frac{1}{r^n}C\,.$$

Im Limes $r\to\infty$ folgt $|a_n|=0$ für $n\geq 1$. □

Satz 3.19 (Weierstraß)**.** *Sei $D\subset\mathbb{C}$ offen, $f_n : D\to\mathbb{C}$ holomorph für $n\in\mathbb{N}$ und die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere kompakt auf D gegen f (d.h. uniform auf kompakten Teilmengen). Dann:*

(i) *f ist holomorph.*

(ii) *Die k-ten Ableitungen $(f_n^{(k)})_{n\geq 1}$ konvergiert kompakt auf D gegen $f^{(k)}$.*

Beweis. (i) Nach Satz 1.24 ist f stetig. Sei nun $\Delta\subset D$ Dreieck, und damit kompakt:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \;&=\; \int_{\partial\Delta}\lim_{n\to\infty} f_n(z)\,dz\\ &=\; \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz\\ &=\; \lim_{n\to\infty} 0\\ &=\; 0\end{aligned}$$

Limes und Integral kann wegen der kompakten Konvergenz vertauscht werden, das Integral über die holomorphe Funktion f_n verschwindet wegen dem Integrallemma von Goursat. Da dies für alle Dreiecke gilt, folgt nach dem Satz von Morera (Satz 3.17) die Holomorphie von f.

Nun zu (ii). Sei $K \subset D$ kompakt. Setze, für $r > 0$,

$$K_r \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;:\; |z-w| \leq r \; \textit{für ein}\; w \in K\} \;=\; \bigcup_{w \in K} \overline{B_r(w)}\,,$$

und wähle r so klein, dass $K_r \subset D$ (dies geht, da D offen ist). Dann ist K_r beschränkt und abgeschlossen und damit kompakt. Die Cauchy'sche Abschätzungsformel für die k-te Ableitung von der holomorphen Funktion $f_n - f$ liefert für $z \in K$ (mit $\partial B_r(z) \subset K_r$):

$$|(f_n - f)^{(k)}(z)| \;\leq\; \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in \partial B_r(z)} |f_n(w) - f(w)| \;\leq\; \frac{k!}{r^k} \sup_{w \in K_r} |f_n(w) - f(w)|\,.$$

Da $K_r \subset D$ kompakt ist und $f_n \to f$ kompakt konvergiert, folgt:

$$\sup_{z \in K} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \;\leq\; \sup_{z \in K} \left[\frac{k!}{r^k} ||f_n - f||_{\infty, K_r}\right] \;=\; \frac{k!}{r^k} ||f_n - f||_{\infty, K_r} \;\longrightarrow\; 0$$

im Limes $n \to \infty$. Dies ist (da das Kompaktum K beliebig gewählt war) gleichbedeutend mit der kompakten Konvergenz der $f_n^{(k)}$ gegen $f^{(k)}$ auf D. □

Satz 3.20 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $z_1 \in D$ und $f : D \setminus \{z_1\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f auf einer Umgebung von z_1 beschränkt ist, kann man $f(z_1)$ so wählen, dass $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph ist. Man sagt dann: z_1 ist eine „hebbare Singularität“.*

Beweis. Setze

$$g(z) \;=\; \begin{cases} (z-z_1)^2 f(z)\,, & \text{falls } z \neq z_1 \\ 0\,, & \text{falls } z = z_1 \end{cases}$$

für $z \in D$. Da f beschränkt ist, folgt

$$g'(z_1) \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{g(z_1 + h) - g(z_1)}{h} \;=\; \lim_{h \to 0} h f(z_1 + h) \;=\; 0\,.$$

Somit ist g holomorph auf ganz D, und kann um z_1 in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$g(z) \;=\; \sum_{n \geq 2} a_n (z - z_1)^n$$

Setze $f(z_1) := a_2$. Dann ist $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+2}(z - z_1)^n$. □

Satz 3.21 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Wenn f nicht konstant ist, so ist $f(D)$ offen.*

Beweis. Nach Translation von D und Substraktion einer Konstanten von f reicht es zu zeigen:

$$0 \in D \;\text{ und }\; f(0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \exists\, \epsilon > 0 \;\text{ mit }\; B_\epsilon(0) \subset f(D)\,.$$

Da f nicht konstant ist, hat sie die Darstellung $f(z) = a_n z^n + \mathcal{O}(z^{n+1})$ mit $|a_n| \neq 0, n \geq 1$. Daraus folgt, dass die Nullstelle 0 isoliert ist, d.h. $2\epsilon := \inf_{|z|=r} |f(z)| > 0$ für r hinreichend klein.

Behauptung: $B_\epsilon(0) \subset f(D)$

Denn wäre dies nicht so, so gäbe es ein $w \notin f(D)$ mit $|w| < \epsilon$. Dann ist

$$g(z) \;=\; \frac{1}{f(z) - w}$$

holomorph auf D, denn es gibt kein $z \in D$ mit $f(z) = w$; und die Cauchy-Abschätzung liefert

$$|g(0)| \;\leq\; \sup_{|z|=r} |g(z)| \;=\; \sup_{|z|=r} \frac{1}{|f(z) - w|} \;\leq\; \sup_{|z|=r} \frac{1}{|f(z)| - |w|} \;=\; \frac{1}{\inf_{|z|=r} |f(z)| - |w|} \;=\; \frac{1}{2\epsilon - |w|}\,.$$

Mit $g(0) = -\frac{1}{w}$ folgt $\frac{1}{|w|} \leq \frac{1}{2\epsilon - |w|}$, also $2\epsilon \leq 2|w|$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Somit ist folgende Aussage offensichtlich.

Korollar 3.22 (Satz von der Gebietstreue)**.** *Sei D Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann ist $f(D)$ ebenfalls ein Gebiet, d.h. offen und zusammenhängend.*

Satz 3.23 (Maximumsprinzip)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Außerdem existiere ein $z_0 \in D$ und $\epsilon > 0$ mit $|f(z)| \leq |f(z_0)|\ \forall\, z \in B_\epsilon(z_0)$, d.h. z_0 sei lokales Maximum. Dann ist f konstant.*

Analog gilt: Falls z_0 lokales Minimum ist mit $f(z_0) \neq 0$, ist f konstant.

Beweis. Betrachte den Fall, dass z_0 lokales Maximum ist. Nach Annahme gilt

$$f(B_\epsilon(z_0)) \;\subset\; \{w \in \mathbb{C} \;:\; |w| \leq |f(z_0)|\} \;=\; \overline{B_{|f(z_0)|}(0)}\,.$$

Daraus folgt, dass $f(B_\epsilon(z_0))$ nicht Umgebung von $f(z_0)$ ist, denn für alle $\delta > 0$ ist

$$(1 + \delta) f(z_0) \;\notin\; f(B_\epsilon(z_0))\,.$$

Somit ist f keine offene Abbildung und nach Satz 3.21 somit konstant.

Für das Minimumsprinzip betrachte $g := f^{-1}$. Dann hat g bei z_0 offensichtlich ein lokales Maximum. Nach dem Maximumsprinzip ist g und folglich auch f konstant. $\square$

Korollar 3.24. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränktes Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Außerdem sei $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für alle $z \in \overline{D}$*

$$|f(z)| \;\leq\; \max_{w \in \partial D} |f(w)|\,,$$

d.h. das Maximum wird auf dem Rand des Gebietes angenommen.

Beweis. Dies ist klar, denn es kann kein lokales Maximum im Inneren geben, außer, wenn die Funktion konstant ist, aber dann bleibt die Aussage richtig. □

Satz 3.25 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Sei $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ ein Polynom in $\mathbb{C}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ sowie $n \geq 1$. Dann gibt es eine Nullstelle $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$.*

Man folgert induktiv, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist, d.h. $\exists\, z_1, ..., z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$P(z) \;=\; a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)\ .$$

Erster Beweis mit Liouville. Gegenannahme: $P(z)$ hat keine Nullstelle. Dann ist $\frac{1}{P(z)}$ eine ganze Funktion, d.h. holomorph auf $\mathbb{C}$. Außerdem gilt wegen $a_n \neq 0$ auch $\lim_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$, also $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{|P(z)|} = 0$. Nach dem Satz von Liouville folgt wegen der Beschränktheit, dass $\frac{1}{P}$ und somit P konstant auf ganz $\mathbb{C}$ ist, was ein Widerspruch zu $\mathrm{Grad}(P) \geq 1$ ist. □

Wir geben einen weiteren Beweis an.

Zweiter Beweis mit Maximumsprinzip. Die Gegenannahme ist wieder: $P(z)$ hat keine Nullstelle. Insbesondere ist dann $a_0 = P(0) \neq 0$. Schreibe $P(z) = z^n(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z} + a_{n-2}\frac{1}{z^2} + ... + a_0 \frac{1}{z^n})$. Somit gilt für geeignetes c und große z:

$$\Big|\frac{1}{P(z)}\Big| \;\leq\; \frac{c}{|z|^n}$$

Zudem

$$\Big|\frac{1}{P(0)}\Big| \;=\; \frac{1}{|a_0|}\ .$$

Innerhalb einer geeignet großen Kreisscheibe nimmt $|\frac{1}{P}|$ also ein lokales Maximum an. Nach dem Maximumsprinzip ist P^{-1} konstant. Widerspruch wie oben. □

Satz 3.26 (Identitätssatz)**.** *Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph auf Gebiet D. Äquivalent sind:*

(i) *$f = g$, d.h. $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.*

(ii) *Die Menge $\{z \in D \ :\ f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt.*

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist klar. Für die Umkehrung, sei z_0 der Häufungspunkt. Dann haben f und g Potenzreihenentwicklungen um z_0. Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen (Satz 2.20) folgt schließlich $f = g$ auf ganz D. □

Definition 3.27. Sei D offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in \partial D$.

(i) z_0 heißt *regulär* (für f), wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt sowie eine Abbildung $g : B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph und $f(z) = g(z) \quad \forall\, z \in D \cap B_\epsilon(z_0)$. Man sagt dann, dass f bei z_0 *analytisch fortsetzbar* ist mit *analytischer Fortsetzung*

$$\tilde{f}(z) \;=\; \begin{cases} f(z)\ , & z \in D \\ g(z)\ , & z \in B_\epsilon(z_0) \setminus D \end{cases}$$

(ii) z_0 heißt *singulär* (für f), wenn z_0 nicht regulär ist.

(iii) Sind alle $z_0 \in \partial D$ singulär, dann heißt D *Holomorphiegebiet* von f und ∂D *natürliche Grenze* von f.

Bemerkung.

(i) Für einen isolierten Randpunkt im Inneren (d.h. $\exists\, \epsilon : B_\epsilon(z_0)\backslash\{z_0\} \subset D$) ist die Regularität nach Satz 6 (Hebbarkeitssatz) genau dann gegeben, wenn f beschränkt auf $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist für ein gewisses kleines $\epsilon > 0$.

(ii) Nach dem Identitätssatz (Satz 3.26) ist die analytische Fortsetzung eindeutig.

(iii) Der Hauptzweig des Logarithmus $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \to \mathbb{C}$ kann nicht im obigen Sinne zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{C}$ fortgesetzt werden, denn die Werte oberhalb und unterhalb der negativen reellen Achse $\mathbb{R}_{\leq 0}$ unterscheiden sich um $2\pi i$. Also sind alle Punkte in $\mathbb{R}_{\leq 0}$ singulär. Es ist allerdings möglich, die Logarithmusfunktion sowohl von oben auf ein neues Blatt als auch von unten auf ein (anderes) neues Blatt fortzusetzen. Der Wert dieser und weiteren Fortsetzungen unterscheidet sich um Vielfache von $2\pi i$.

(iv) Methoden zur Berechnung analytischer Fortsetzungen finden sich in der Literatur, z.B. *Schwarz'sches Spiegelungsprinzip.*

(v) Nach einem Satz von Weierstraß ist jedes Gebiet Holomorphiegebiet einer analytischen Funktion. Beispiel hierfür: Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$. Die Funktion

$$f(z) \ = \ \sum_{n \geq 0} z^{n!}$$

hat $\partial D = \mathbb{S}^1$ als natürliche Grenze, denn für $z = re^{2\pi i \frac{p}{q}}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ (d.h. rationale Phase) und $r < 1$ ist

$$f(z) \ = \ \sum_{n=0}^{q-1} r^{n!} e^{2\pi i \frac{p}{q} n!} \ + \ \sum_{n \geq q} r^{n!} \, .$$

Der erste Summand ist beschränkt, auch im Limes $r \to 1$, der zweite divergiert für $r \to 1$. Es folgt, dass

$$\lim_{r \to 1} |f(re^{2\pi i \frac{p}{q}})| \ = \ \infty \, ,$$

d.h. $e^{2\pi i \frac{p}{q}}$ ist ein singulärer Punkt. Somit hat man eine Dichte Menge von singulären Punkten auf $\mathbb{S}^1$ gefunden, was eine analytische Fortsetzung unmöglich macht.

(vi) Ein anderes Beispiel ist die geometrische Reihe

$$f(z) \ = \ \sum_{n \geq 0} z^n \ = \ \frac{1}{1 - z} \, .$$

Hier ist nur ein Punkt ($z_0 = 1$) auf ∂D singulär und somit ist die Kreisscheibe nicht das natürliche Holomorphiegebiet. Dies wird im folgenden Satz verallgemeinert. $\diamond$

Satz 3.28. *Auf dem Rand des Konvergenzkreises $B_\rho(z_0)$ einer Potenzreihe (die dann holomorph auf $B_\rho(z_0)$ ist) liegt mindestens ein singulärer Punkt.*

Beweis. Sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

und $\rho < \infty$ (sonst wäre ∞ singulärer Punkt in $\overline{\mathbb{C}}$). Gegenannahme: Zu jedem $w \in \partial B_\rho(z_0)$ $\exists\ \epsilon = \epsilon(w)$ und eine holomorphe Funktion $g_w : B_\epsilon(w) \to \mathbb{C}$ mit

$$(f - g_w)|_{B_\epsilon(w)\cap B_\rho(z_0)} \;=\; 0\,.$$

Da $\partial B_\rho(z_0)$ kompakt ist, reichen endlich viele $w_1, ..., w_N$ und

$$B_1 = B_{\epsilon(w_1)}(w_1)\ , \ldots,\ B_N = B_{\epsilon(w_N)}(w_N)$$

aus, um $\partial B_\rho(z_0)$ zu überdecken. Also gibt es ein $R > \rho$ mit

$$B_R(z_0) \subset B_1 \cup ... \cup B_N \cup B_\rho(z_0)\,.$$

Definiere die Erweiterung $\tilde{f} : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z)\ , & z \in B_\rho(z_0)\,, \\ g_{w_l}(z)\ , & z \in B_l\,. \end{cases}$$

Im allgemeinen kann $z \in B_R(z_0)$ in mehreren B_l liegen. Die Behauptung ist aber, dass diese Definition unabhängig von der Wahl von l ist. Begründung: Sei $z \in B_l \cap B_k$, aber $z \notin B_\rho(z_0)$. Die Menge $S = B_l \cap B_k \cap B_\rho(z_0) \neq \emptyset$ hat einen Häufungspunkt. Auf diesem Schnitt S ist $g_l = f = g_k$. Daraus folgt mit dem Identitätssatz, dass $g_l = g_k$ auf $B_l \cap B_k$.

Nach dem bisher gezeigten ist also $\tilde{f}$ holomorph und als Potenzreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ darstellbar, die auf $B_\rho(z_0)$ mit f übereinstimmt. Somit ist $\tilde{f}$ eine Erweiterung von f, d.h. die Koeffizienten a_n sind bei beiden Reihen gleich. Dann müsste mit der Maximalität des Konvergenzradiusses ρ aber $R \leq \rho$ folgen. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. $\square$

Satz 3.29 (Schwarz'sches Lemma)**.** *Sei $D = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 1\}$ und $f : D \to D$ holomorph und mit Fixpunkt $f(0) = 0$. Dann ist*

$$|f(z)| \leq |z| \qquad \textit{für alle } z \in \mathbb{C}\,.$$

Gilt Gleichheit für ein $z \in D\backslash\{0\}$, dann ist f eine Drehung, d.h. $f(z) \equiv e^{i\phi} z$ für ein $\phi \in [0, 2\pi)$.

Beweis. Betrachte

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}\ , & \text{falls } z \in D, z \neq 0 \\ f'(0)\ , & \text{falls } z = 0 \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist g (zumindest auf einer Umgebung der 0) beschränkt und stetig; dies folgt aus der Potenzreihendarstellung. Somit ist nach dem Hebbarkeitssatz (Theorem 3.20) g sogar auf ganz D holomorph. Da $|f(z)| < 1$ ist ($f(z) \in D$), folgt für $r < 1$ und $|z| = r$:

$$|g(z)| \;\leq\; \frac{1}{r}\,.$$

Das Maximumsprinzip (Satz 3.23) sagt aus, dass auf jeder Kreisscheibe das Maximum am Rand eingenommen wird. Angewendet auf $g|_{B_r(0)} : B_r(0) \to \mathbb{C}$ folgt, dass

$$|g|_{B_r(0)}(z)| \;\leq\; \frac{1}{r}$$

für $|z| \leq r$. Der Limes $r \to 1$ ergibt die Aussage

$$|g(z)| \;\leq\; 1 \text{ für alle } z \in D\,, \quad \text{d.h.} \quad |f(z)| \;\leq\; |z|\,.$$

Gilt Gleichheit bei $z_0 \in D$, also $|g(z_0)| = |\frac{f(z_0)}{z_0}| = 1$, so liegt hier ein lokales Maximum vor; dieses liegt (wegen $z_0 \notin \partial D$) im Inneren, nach Satz 3.23 folgt damit die Konstanz von g, d.h.

$$g(z) \;=\; \frac{f(z)}{z} \;=\; \text{const für alle } z \in D\,;$$

und mit $|g(z_0)| = |g(z)| = 1$ folgt sogar const $= e^{i\phi}$. □

Satz 3.30. *Sei $f : D \to D$ biholomorph (d.h. $f \in Aut(D)$). Dann ist $f = M_T$ Moebius-Transformation mit*

$$T \in \mathrm{U}(1,1) \;=\; \left\{ S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix} \;:\; \det(S) = |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}\,.$$

Also:

$$\mathrm{Aut}(D) \;\cong\; \mathrm{U}(1,1)/\{\pm 1\} \;=\; \mathrm{PU}(1,1)\,.$$

Beweis. Sei $f(0) = \gamma \in D$. Setze

$$S \;=\; \frac{1}{\sqrt{1 - |\gamma|^2}} \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \overline{\gamma} & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{U}(1,1)\,.$$

Dann ist

$$M_S(0) \;=\; \frac{1 \cdot 0 + \gamma}{\overline{\gamma} \cdot 0 + 1} \;=\; \gamma \;\text{ und }\; M_{S^{-1}}(\gamma) \;=\; 0\,.$$

Nach Theorem 2.37 sind $M_S, M_{S^{-1}} \in \mathrm{Aut}\,(D)$ und somit auch $M_{S^{-1}} \circ f \in \mathrm{Aut}\,(D)$ und

$$(M_{S^{-1}} \circ f)^{-1} \;=\; f^{-1} \circ (M_{S^{-1}})^{-1} \;=\; f^{-1} \circ M_S \;\in\; \mathrm{Aut}\,(D)\;.$$

Beide Letzteren erfüllen $(M_{S^{-1}} \circ f)(0) = 0 = (f^{-1} \circ M_S)(0)$. Anwendung des Schwarz'schen Lemmas gibt einerseits

$$|(M_{S^{-1}} \circ f)(z)| \;\leq\; |z|$$

und andererseits

$$|(M_{S^{-1}} \circ f)^{-1}(z)| \;=\; |(f^{-1} \circ M_S)(z)| \leq |z|\,,$$

also

$$|z| \;\leq\; |(M_{S^{-1}} \circ f)(z)| \quad \text{und zusammengenommen} \quad |(M_{S^{-1}} \circ f)(z)| \;=\; |z|\,.$$

Man kann daher $M_{S^{-1}}(f(z)) = ze^{i\phi}$ schreiben. M_S auf diese Gleichung angewendet liefert:

$$\begin{aligned} f(z) &= M_S(e^{i\phi}z) \\ &= \frac{e^{i\phi}z \cdot 1 + \gamma}{e^{i\phi}z \cdot \overline{\gamma} + 1} \\ &= \frac{e^{i\phi/2}z + e^{-i\phi/2}\gamma}{e^{i\phi/2}z \cdot \overline{\gamma} + e^{-i\phi/2}} \\ &= M_T(z)\,, \end{aligned}$$

wobei

$$T \;=\; \frac{1}{\sqrt{1-|\gamma|^2}} \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & \gamma e^{-i\phi/2} \\ \overline{\gamma} e^{i\phi/2} & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix} \;\in\; \mathrm{U}(1,1)\,.$$

□

3.5 Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes

In diesem Paragraphen wird der Cauchy'sche Integralsatz (Satz 3.13) von Sterngebieten auf allgemeinere Gebiete übertragen. Hierzu werden zunächst einige Begriffsbildungen benötigt.

Definition 3.31. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $\Gamma, \gamma : [0,1] \to D$ Wege mit $\Gamma(0) = \gamma(0)$ und $\Gamma(1) = \gamma(1)$. Außerdem sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt Γ *homotop* γ *in* D, wenn es ein stetige Abbildung $\Psi : [0,1] \times [0,1] \to D$ gibt mit

$$\begin{aligned} \Psi(t,0) &= \Gamma(t) \\ \Psi(t,1) &= \gamma(t) \\ \Psi(0,s) &= \Gamma(0) = \gamma(0) \qquad \forall\, s \in [0,1] \\ \Psi(1,s) &= \Gamma(1) = \gamma(1) \qquad \forall\, s \in [0,1] \end{aligned}$$

Man schreibt dann $\Gamma \sim_D \gamma$ und Ψ heißt die *Homotopie* (oder *Homotopie-Abbildung*) von Γ nach γ. Der zweite Parameter s heißt Homotopie-Parameter. Die Homotopie Ψ heißt C^k, wenn die Abbildung k-mal differenzierbar im Sinne der reellen Analysis auf dem Inneren $(0,1) \times (0,1)$ ist, und stückweise C^k, wenn das Rechteck $[0,1] \times [0,1]$ in kleinere achsenparalelle Rechtecke unterteilt werden kann, auf denen es C^k ist.

Bemerkung. An sich ist die Homotopie-Theorie eine topologische Theorie. Man fordert daher normalerweise von Ψ nur die Stetigkeit (also $\Psi \in C^0$). Es ist aber durch Approximationsargumente (wie dem Satz von Stone-Weierstraß) möglich, stetige Abbildungen auf Kompakta durch differenzierbare oder sogar durch Polynome beliebig gut in der uniformen Norm zu approximieren. ◇

Bemerkung. $\sim_D$ ist Äquivalenzrelation (d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv). $\diamond$

Definition 3.32. Ein Gebiet heißt *homotop einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve homotop ist zu einer Punktkurve, d.h. zu einer degenerierten Kurve, die an einem Punkt verbleibt. Man sagt dann, diese Kurve ist *homotop null*.

Bemerkung. Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht homotop einfach zusammenhängend. Dagegen sind alle konvexen Gebiete sowie Sterngebiet homotop einfach zusammenhängend. $\diamond$

Satz 3.33. *Seien $\Gamma \sim_D \gamma$ zwei homotop äquivalente Kurven in D und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \;=\; \int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Beweis. Ohne Einschränkung (nach Approximationssätzen) kann angenommen werden, dass ein C^2-Homotopie $\Psi \in C^2$ mit den oben genannten Eigenschaften vorliegt. Es gilt dann:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial s} \;=\; \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial t}\,.$$

Setze

$$I(s) \;=\; \int_0^1 f(\Psi(t,s)) \cdot \frac{d}{dt}\Psi(t,s)\, dt \;=\; \int_{\Gamma_s} f(z)\, dz\,,$$

wobei $\Gamma_s(t) = \Psi(t,s)$. Also ist

$$I(0) \;=\; \int_\Gamma f(z)\, dz \quad \text{und} \quad I(1) \;=\; \int_\gamma f(z)\, dz\,.$$

Zu zeigen ist also $I(0) = I(1)$. Ableiten liefert:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} I(s) \;&=\; \frac{d}{ds}\left[\int_0^1 f(\Psi(t,s)) \cdot \frac{d}{dt}\Psi(t,s)\, dt\right] \\
&=\; \int_0^1 \left[f'(\Psi(t,s))\left(\frac{d}{ds}\Psi(t,s)\right)\left(\frac{d}{dt}\Psi(t,s)\right) + f(\Psi(t,s))\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{dt}\Psi(t,s)\right)\right] dt \\
&=\; \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[f(\Psi(t,s))\left(\frac{d}{ds}\Psi(t,s)\right)\right] dt \\
&=\; \left[f(\Psi(1,s))\left(\frac{d}{ds}\Psi(1,s)\right)\right] - \left[f(\Psi(0,s))\left(\frac{d}{ds}\Psi(0,s)\right)\right]
\end{aligned}$$

Wegen $\Psi(0,s) = \Gamma(0)$ und $\Psi(1,s) = \Gamma(1)$ für alle $s \in [0,1]$ ist bei fixiertem $t = 0$ oder $t = 1$ die Ableitung längs s gleich 0. Folglich ist $\frac{d}{ds}I(s) = 0$ für alle $s \in [0,1]$, also $I(0) = I(1)$. $\square$

Satz 3.34 (Homotopieversion des Cauchy'schen Integralsatzes)**.** *Sei D homotop einfach zusammenhängend, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und Γ ein geschlossener Weg in D. Dann ist*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.33, denn in einem einfach zusammenhängenden Gebiet kann jede geschlossene Kurve zusammengezogen werden zu einem Punkt, und das Integral über einen Punkt verschwindet. □

Korollar 3.35. *Seien Γ, γ geschlossene Wege in D und $\Gamma \sim_D \gamma$. Dann ist*

$$\operatorname{Ind}_w(\Gamma) \;=\; \operatorname{Ind}_w(\gamma)$$

für alle $w \notin D$.

Beweis. Die Funktion $f(z) = (z-w)^{-1}$ ist holomorph in D, weil $w \notin D$ nach Voraussetzung. Dann gilt nach Satz 3.33

$$\operatorname{Ind}_w(\Gamma) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-w}\,dz \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-w}\,dz \;=\; \operatorname{Ind}_w(\gamma)\,,$$

wie behauptet. □

3.6 Homologieversion des Cauchy'schen Integralsatzes*

* Dieser Paragraph ist Zusatzmaterial der zweistündigen Vorlesung.

Definition 3.36 (Artin)**.** Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Parametrisierte Wege seien immer stückweise stetig differenzierbar.

(i) Die Menge

$$K(D) \;=\; \Big\{\sum_{j=1}^{N} n_j\Gamma_j \;:\; N<\infty,\; n_j\in\mathbb{Z},\; \Gamma_j \text{ Weg in } D\Big\}$$

heißt *Kettengruppe in D*. Dies ist eine abelsche Gruppe, die durch Wege in D erzeugt wird. Hierbei bedeuten negative n_j, dass die Wege rückwärts durchlaufen werden.

(ii) Die Menge

$$Z(D) \;=\; \Big\{\sum_{j=1}^{N} n_j\Gamma_j \;:\; N<\infty,\; n_j\in\mathbb{Z},\; \Gamma_j \text{ geschlossener Weg in } D\Big\}$$

heißt *Zykelgruppe von D*. Elemente von $Z(D)$ heißen *Zykel.* $Z(D)$ ist offensichtlich Untergruppe von $K(D)$.

(iii) Für $\Gamma = \sum_{j=1}^{N} n_j\Gamma_j \in Z(D)$ und

$$w \;\notin\; \operatorname{Spur}(\Gamma) \;=\; \bigcup_{j=1}^{N}\operatorname{Spur}(\Gamma_j)$$

definiere

$$\operatorname{Ind}_w(\Gamma) \;=\; \sum_{j=1}^{N} n_j\,\operatorname{Ind}_w(\Gamma_j) \;\in\; \mathbb{Z}\,.$$

(iv) Zwei Zykel $\Gamma, \gamma \in Z(D)$ heißen *homolog in D* (Notation $\Gamma \approx_D \gamma$), wenn $\mathrm{Ind}_w(\Gamma) = \mathrm{Ind}_w(\gamma)\ \forall\, w \notin D$.

(v) $\Gamma \in Z(D)$ heißt *homolog null* in D ($\Gamma \approx_D 0$), wenn $\mathrm{Ind}_w(\Gamma) = 0\ \forall\, w \notin D$.

(vi) D heißt *homolog einfach zusammenhängend*, wenn $\mathrm{Ind}_w(\Gamma) = 0\ \forall\, \Gamma \in Z(D)$ und $\forall\, w \notin D$, wenn also jeder Zykel $\Gamma \in Z(D)$ homolog null in D ist.

Bemerkung.

(i) Sei Γ geschlossene Kurve, die homotop null in D ist ($\Gamma \sim_D 0$). Dann folgt daraus, dass Γ sogar homolog null in D ist ($\Gamma \approx_D 0$) (Begründung hierfür analog wie in Korollar 3.35). Somit gilt: D homotop einfach zusammenhängend $\Longrightarrow$ D homolog einfach zusammenhängend.

(ii) Die Umkehrung ist falsch, es gilt nicht $\Gamma \approx_D 0 \Longrightarrow \Gamma \sim_D 0$. (Man kann z.B. auf $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ einen Weg Γ wählen, der Windungszahl 0 hat für alle $w \notin \mathrm{Spur}\,(\Gamma)$, aber der um die Punkte ± 1 herumgelegt ist, so dass der Weg nicht zusammenziehbar ist.)

(iii) Man kann (mit $\overline{\mathbb{C}}$-Einpunkt-Kompaktifizierung) folgenden Satz zeigen: Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet. D ist homolog einfach zusammenhängend, genau dann wenn $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ zusammenhängend im Sinne der Topologie ist.

◇

Satz 3.37 (Homologieversion der Cauchy'schen Formel und des Cauchy-Theorems)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und der Zykel Γ sei homolog null in D. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) *Für $z \notin \mathrm{Spur}\,(\Gamma)$ ist*

$$f(z) \cdot \mathrm{Ind}_z(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,.$$

(ii) *Es gilt*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

(iii) *Wenn D homolog einfach zusammenhängend ist, ist sogar*

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; 0$$

für alle Zykel $\gamma \in Z(D)$.

(iv) *Für zwei homologe Wege $\Gamma_1 \approx_D \Gamma_2$ gilt*

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\, dz \;=\; \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

Beweis. Beweis der einzelnen Aussagen: (i) Definiere $g : D \times D \to \mathbb{C}$ mittels

$$g(z,\zeta) \;=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\,, & \text{falls } z \neq \zeta\,, \\ f'(z)\,, & \text{falls } z = \zeta\,. \end{cases}$$

Wir zeigen zuerst, dass g stetig ist. Dies ist überall klar, nur nicht in der Nähe der Diagonalen $\{(w,w) \in D \times D\}$. Fixiere also $w \in D$ und $\epsilon > 0$. Dann $\exists\, \delta > 0$ mit $|f'(z) - f'(w)| < \epsilon \;\forall\, z \in B_\delta(w)$, da f holomorph ist und deswegen f' stetig. Für $z, \zeta \in B_\delta(w)$ setze $B(t) = (1-t)\zeta + tz$ für $t \in [0,1]$. Dann ist $\{B(t) \;:\; t \in [0,1]\}$ die Gerade zwischen z und ζ und es gilt $B'(t) = z - \zeta$. Mit dem Fundamentalsatz folgt

$$\int_0^1 (f'(B(t)) - f'(w))\, dt \;=\; \frac{1}{z-\zeta}(f(B(1)) - f(B(0))) - f'(w) \;=\; g(z,\zeta) - f'(w)$$

Also ist

$$|g(z,\zeta) - f'(w)| \;\leq\; \int_0^1 |f'(B(t)) - f'(w)|\, dt \;\leq\; \int_0^1 \epsilon\, dt \;=\; \epsilon\,,$$

und g somit auch in der Nähe der Diagonalen stetig. Somit kann man definieren:

$$G(z) \;=\; \int_\Gamma \frac{g(z,\zeta)}{2\pi i}\, d\zeta\,.$$

Aus $G(z) = 0$ folgt direkt die Behauptung (i). Zu zeigen ist also $G(z) = 0$. Hierfür zeigen wir zuerst: G ist holomorph in D. Zunächst ist G nach Satz 3.5(viii) stetig. Zudem gilt für jedes Dreieck Δ in D:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Delta} G(z)\, dz \;&=\; \int_{\partial\Delta} \left(\int_\Gamma \frac{g(z,\zeta)}{2\pi i}\, d\zeta \right) dz \\ &=\; \int_\Gamma \left(\int_{\partial\Delta} \frac{g(z,\zeta)}{2\pi i}\, dz \right) d\zeta\,. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Fubini für das Riemann-Integral angewendet. Nun ist $D \ni z \mapsto g(z,\zeta)$ nach dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz (Satz 3.20) holomorph. Zudem verschwindet nach dem Satz von Goursat das Integral über eine holomorphe Funktion auf Dreiecken:

$$\int_{\partial\Delta} g(z,\zeta)\, dz \;=\; 0\,, \quad \text{also} \quad \int_{\partial\Delta} G(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

Da dies für beliebige Dreiecke gilt, ist nach dem Satz von Morera G holomorph in D. Nun zeigen wir folgende Behauptung:

Behauptung. Es gibt eine ganze Funktion $\hat{G} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die Erweiterung von G ist, d.h. $\hat{G}|_D = G$.

Setze hierfür

$$E \;=\; \{z \in \mathbb{C} \;:\; z \notin \mathrm{Spur}\,(\Gamma)\,,\; \mathrm{Ind}_z(\Gamma) = 0\}\,.$$

Nach Voraussetzung ist das Komplement von D $D^c \subset E$. Definiere zunächst

$$\hat{G}(z) \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

für $z \in E$. Weil $E \ni z \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph ist für $\zeta \in \operatorname{Spur}(\Gamma)$, gilt nach gleicher Argumentationskette wie oben (erst Anwendung des Satzes von Goursat auf ein Dreieck, dann Anwendung des Satzes von Morera), dass $\hat{G}$ holomorph in E ist. Außerdem ist nach Definition von E

$$0 \;=\; \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{1}{\zeta - z}\,, \qquad \text{für } z \in E$$

Somit folgt

$$\hat{G}(z) \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,.$$

Für $z \in D \cap E$ ist daher $\hat{G}(z) = G(z)$. Setze nun $\hat{G}(z) := G(z)$ für $z \in E^c \subset D$. Somit erhält man eine ganze Funktion $\hat{G}$. Insbesondere gilt

$$\lim_{|z| \to \infty} |\hat{G}(z)| \;=\; \lim_{|z| \to \infty} \Big| \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \Big| \;=\; 0\,.$$

Die Funktion $\hat{G}$ ist demnach beschränkt, und nach dem Satz von Liouville sogar konstant, also $\hat{G}(z) = \text{const} = 0$. Mit $\hat{G}|_D = G$ folgt die Behauptung.

(ii) Wähle $z \in D \setminus \operatorname{Spur}(\Gamma)$ und setze $F(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)$ für $\zeta \in D$. Dann ist F holomorph auf D. Nach (i) ist also wegen $F(z) = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \cdot F(z) \;=\; 0\,.$$

(iii) Klar, denn in diesem Fall ist jedes $\gamma \in Z(D)$ homolog null.

(iv) Sei $\Gamma_1 \approx_D \Gamma_2$. Dann ist $\Gamma = \Gamma_1 - \Gamma_2 \approx_D 0$. Mit der in (ii) bewiesenen Identität folgt dann:

$$0 \;=\; \int_\Gamma f(z)\, dz \;=\; \int_{\Gamma_1} f(z)\, dz - \int_{\Gamma_2} f(z)\, dz\,.$$

□

4 Singularitäten

4.1 Klassifikation von Singularitäten und Laurent-Entwicklung

Definition 4.1 (Singularitäten). (i) Sei D offen, $z_0 \in D$, $f : D \backslash \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann spricht man von einer *isolierten Singularität* von f bei z_0.

(ii) z_0 heißt *hebbare Singularität*, wenn z_0 regulärer Punkt von f ist, d.h. $\exists\ \epsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion $\hat{f} : B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ mit

$$\hat{f}|_{D \cap B_\epsilon(z_0)} \;=\; f|_{D \cap B_\epsilon(z_0)} \,.$$

(iii) z_0 heißt *Pol*, wenn $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ ist (für alle Folgen $z_n \to z_0$ und nicht nur der $\limsup$).

(iv) z_0 heißt *wesentliche Singularität* von f, wenn die Singularität weder hebbar noch Pol ist. Dies ist nach dem Satz von Casorati-Weierstraß (Satz 4.3, weiter unten) gleichbedeutend damit, dass für alle $\epsilon > 0$

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$$

dicht in $\mathbb{C}$ ist.

Beispiel. (i) Die Funktion $z^{-1} \sin(z)$ hat eine hebbare Singularität bei $z_0 = 0$.

(ii) z^{-2} hat einen Pol bei $z_0 = 0$.

(iii) $\exp(z^{-1})$ hat eine wesentliche Singularität bei $z_0 = 0$, denn mit $z = re^{i\phi}$ ist $\exp(z^{-1}) = \exp(r^{-1}e^{-i\phi})$. Dies konvergiert nicht für $r \to 0$ uniform in ϕ. Z.B. führt $\phi = 0$ zu $+\infty$, während bei $\phi = \pi$ und $r > 0$ der Grenzwert von $\exp(-r^{-1})$ gebildet wird, welcher 0 ist.

$\diamond$

Satz 4.2. *Sei $f : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Äquivalent sind:*

(i) *z_0 ist Pol von f.*

(ii) *$\exists\ m \in \mathbb{N}$ mit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ für $z \in \tilde{D}$, wobei $\tilde{D}$ eine punktierte Umgebung von z_0 ist (d.h. $z_0 \notin \tilde{D}$), und g eine auf $\tilde{D} \cup \{z_0\}$ holomorphe Funktion mit $g(z_0) \neq 0$ ist.*

(iii) *$\exists\ m \in \mathbb{N}$, so dass $(z - z_0)^m f(z)$ beschränkt ist bei z_0, aber $(z - z_0)^{m-1} f(z)$ unbeschränkt ist bei z_0.*

Das m in (ii) und (iii) definiert die Ordnung von f bei z_0:

$$\mathrm{Ord}_f\,(z_0) \;=\; -m\,.$$

Beweis. Die Schritte (ii)$\Longrightarrow$(iii)$\Longrightarrow$(i) sind klar, somit verbleibt (i)$\Longrightarrow$(ii). Sei also z_0 Pol von f. Dann ist $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$ und entsprechend $\lim_{z\to z_0}|f(z)^{-1}| = 0$. Somit ist $h(z) := f(z)^{-1}$ nahe z_0 definiert und hat eine hebbare Singularität bei z_0 (Riemann'scher Hebbarkeitssatz, Satz 3.20). Die holomorphe (und somit insbesondere stetige) Fortsetzung $\hat{h}$ erfüllt $\hat{h}(z_0) = 0$. Somit kann $\hat{h}$ in eine Potenzreihe mit verschwindendem konstanten Anteil entwickelt werden:

$$\hat{h}(z) \;=\; \sum_{n\geq m} a_n(z-z_0)^n$$

mit $m \geq 1$ und $a_m \neq 0$. Dann kann man schreiben:

$$\hat{h}(z) \;=\; (z-z_0)^m \sum_{n\geq 0} a_{n+m}(z-z_0)^n \;=\; (z-z_0)^m \hat{g}(z)$$

Die so definierte Funktion $\hat{g}$ ist holomorph auf einer Umgebung von z_0 und $\hat{g}(z_0) = a_m \neq 0$. Somit ist auch $g = \hat{g}^{-1}$ holomorph, und es gilt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{\hat{h}(z)} \;=\; \frac{1}{(z-z_0)^m \hat{g}(z)} \;=\; \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

auf einer geeigneten punktierten Umgebung $\tilde{D}$. □

Bemerkung. Für $f(z) = (z-z_0)^{-k}$ gilt nach obiger Definition

$$\operatorname{Ord}_f(z_0) \;=\; -k\,.$$

Somit knüpft dieser Ordnungsbegriff an an die Definition der Ordnung einer Nullstelle. Insbesondere gilt

$$\operatorname{Ord}_{\frac{1}{f}}(z_0) \;=\; -\operatorname{Ord}_f(z_0)$$

und

$$\operatorname{Ord}_{\frac{f}{g}}(z_0) \;=\; \operatorname{Ord}_f(z_0) - \operatorname{Ord}_g(z_0)\,.$$

◇

Satz 4.3 (Casorati-Weierstraß)**.** *Der Punkt z_0 ist genau dann wesentliche Singularität von f, wenn $\forall\,\epsilon > 0$ das Bild $f(B_\epsilon(z_0)\setminus\{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ ist, d.h.*

$$\forall\,\epsilon > 0\,,\;\delta > 0\,,\;w\in\mathbb{C}\;\;\exists\,z\neq z_0\;\;\textit{mit}\;\;|z-z_0|<\epsilon\;\;\textit{und}\;\;|f(z)-w|<\delta\,.$$

Beweis. „$\Longrightarrow$". Gegenannahme: Die Behauptung stimmt nicht, d.h. bei gewissen gegebenen ϵ, δ, w lässt sich kein $z \in B_\epsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ finden, das $|f(z)-w| < \delta$ erfüllt ($\exists\,\epsilon > 0, \delta > 0, w \in \mathbb{C}$ mit $|f(z)-w| > \delta\;\forall\,z\neq z_0$, für die $|z-z_0|<\epsilon$ gilt). Setze dann

$$g(z) \;=\; \frac{1}{f(z)-w}$$

für $z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach Voraussetzung ist g auf $B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph und durch δ^{-1} beschränkt. Nach dem Hebbarkeitssatz gibt es dann eine holomorphe Fortsetzung $\hat{g}$ von g auf $B_\epsilon(z_0)$. Schreibe nun für $z \in B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$:

$$f(z) \;=\; f(z) - w + w \;=\; \frac{1}{\hat{g}(z)} + w\,.$$

Dies impliziert für die Ordnungen

$$\mathrm{Ord}_{f-w}(z_0) \;=\; \mathrm{Ord}_{\frac{1}{\hat{g}(z)}}(z_0) \;=\; -\,\mathrm{Ord}_{\hat{g}(z)}(z_0)\,.$$

Bei z_0 hat $f - w$ also einen Pol der Ordnung $|\mathrm{Ord}_{\hat{g}(z)}(z_0)|$. Negative Ordnungen werden durch Addition einer Konstante wie w aber nicht verändert, also

$$\mathrm{Ord}_f(z_0) \;=\; \mathrm{Ord}_{f-w}(z_0) \;=\; -\,\mathrm{Ord}_{\hat{g}(z)}(z_0)\,,$$

so dass auch f bei z_0 einen Pol hat. Somit liegt keine wesentliche Singularität vor, was ein Widerspruch zu den Voraussetzungen ist.

„$\Longleftarrow$“ Offensichtlich existiert der Limes $\lim_{z\to z_0}|f(z)|$ nicht (denn wäre $\lim_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$, so würde es $\epsilon_R > 0$ geben mit der Eigenschaft, dass $z \in B_{\epsilon_R}(z_0) \setminus \{z_0\}$ bereits $|f(z)| > R$ impliziert, im Widerspruch zur Dichtheit des Bildes). Zudem ist $|f(z)|$ auf keiner punktierten Umgebung beschränkt, die Singularität also nicht hebbar. Somit sind beide Alternativen ausgeschlossen, und z_0 eine wesentliche Singularität von f. □

Der folgende Satz stellt eine wesentliche Verschärfung des Satzes von Casorati-Weierstraß dar:

Satz 4.4 (Satz von Piccard, ohne Beweis)**.** *Der Punkt z_0 sei wesentliche Singularität. Dann gilt für alle $\epsilon > 0$ entweder*

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \;=\; \mathbb{C}$$

oder

$$f(B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\}) \;=\; \mathbb{C} \setminus \{w\} \qquad \text{für ein } w \in \mathbb{C}\,.$$

Beispiel. Für die Funktion $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ mit der wesentlichen Singularität bei $z_0 = 0$ gilt, dass ausschließlich der Punkt $w = 0$ nicht erreicht wird. ◇

Satz 4.5 (Casorati-Weierstraß)**.** *Sei f eine ganze transzendente Funktion (d.h. kein Polynom). Dann gilt*

$$\text{für alle } R > 0 \text{ ist die Menge } \{f(z)\;:\;|z| > R\} \text{ dicht in } \mathbb{C}\,,$$

oder ausgeschrieben

$$\text{für alle } w \in \mathbb{C} \text{ existiert eine Folge } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} z_n = \infty \text{ und } \lim_{n\to\infty} f(z_n) = w\,.$$

Beweis. Sei
$$f(z) \;=\; \sum_{m\geq 0} a_m z^m\,.$$
Setze $g(z) = f(z^{-1})$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Behauptung: g hat eine wesentliche Singularität in 0. Begründung: Sonst läge ein Pol oder eine hebbare Singularität in 0 vor, d.h. es gibt ein $N \geq 1$, so dass für alle $n \geq N$
$$z \;\mapsto\; z^n g(z) \;=\; \sum_{m\geq 0} a_m z^{-m+n}$$
eine hebbare Singularität bei 0 hat. Somit ist $z \mapsto z^n g(z)$ holomorph fortsetzbar in 0. Nach dem Integralsatz ist
$$0 \;=\; \int_{\partial B_1(0)} z^n g(z)\,dz \;=\; \sum_{m\geq 0} a_m \int_{\partial B_1(0)} z^{-m+n}\,dz \;=\; 2\pi i\cdot a_{n+1}\,,$$
denn nur beim Summanden mit $-m+n = -1$ verschwindet das Integral nicht. Also ist $a_{n+1} = 0$ für alle $n \geq N$, was impliziert, dass f ein Polynom ist. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen. □

Definition 4.6. Sei $a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z},\ D \subset \mathbb{C}$ offen.

(i) Die Reihe
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$$
heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n\geq 0} a_n$ und $\sum_{n<0} a_n$ jeweils absolut konvergent sind. Dann definiert man
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n \;+\; \sum_{n<0} a_n\,.$$

(ii) Die Reihe
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n$$
heißt *normal* (bzw. *kompakt*) *konvergent*, wenn $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ jeweils normal (bzw. kompakt) konvergent sind. Dann definiert man
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n \;+\; \sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n\,.$$
In diesem Falle heißt $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ eine in D konvergente Laurentreihe um z_0. Die Teilreihe $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ heißt der *Nebenteil* und $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ der *Hauptteil* der Laurentreihe.

Beispiel. Sei $0 < r < R$. Sei $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius R und
$$\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^{-n}$$

konvergente Potenzreihe mit Konvergenzradius r^{-1}. Dann ist die Laurentreihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$ normal konvergent auf dem Ringgebiet

$$D \;=\; B_R(z_0) \setminus \overline{B_r(z_0)} \;=\; \{z \in \mathbb{C} \text{ mit } r < |z-z_0| < R\}\,.$$

Denn für $|z-z_0| \geq (1+\epsilon)r$ mit $\epsilon > 0$ gilt:

$$\sum_{n<0} |a_n(z-z_0)^n| \;=\; \sum_{n>0} |a_{-n}| \left|\frac{1}{z-z_0}\right|^n \;\leq\; \sum_{n>0} |a_{-n}| \left|\frac{1}{(1+\epsilon)r}\right|^n \;<\; \infty\,.$$

◇

Für holomorphe Funktionen auf Ringgebieten gibt es einen Darstellungssatz (analog zu holomorphen Funktionen auf Kreisscheiben):

Satz 4.7 (Darstellungssatz)**.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < R$ und*

$$D \;=\; \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$$

und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann hat f eine eindeutige, auf D normal konvergente Laurent-Darstellung

$$f(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

mit

$$a_n \;=\; \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,,$$

wobei $r < \rho < R$ gewählt sei. Der Nebenteil ist holomorph auf $B_R(z_0)$, der Hauptteil auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B_r(z_0)}$. Zudem gelten die verallgemeinerten Cauchy-Abschätzungen:

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{|\zeta-z_0|\,=\,\rho} f(\zeta)}{\rho^n}\,.$$

Beweis. Sei $0 \leq r < \rho_1 < \rho_2 < R$. Betrachte die positiv orientierten Wege $\partial B_{\rho_1}(z_0)$ und $\partial B_{\rho_2}(z_0)$. Dann gilt die folgende Formel für $z \in B_{\rho_2}(z_0) \setminus \overline{B_{\rho_1}(z_0)}$:

$$f(z) \;=\; \int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;-\; \int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,.$$

Um dies einzusehen, teile den Ring $B_{\rho_2}(z_0) \setminus \overline{B_{\rho_1}(z_0)}$ durch eine Gerade durch z_0 in zwei Teile, dergestalt daß z nicht auf der Gerade liegt. Betrachte nun die positiv orientierten Wege Γ_1 und Γ_2 entlang der Ränder der beiden Teilstücke. Innerhalb eines der beiden liegt z, sagen wir Γ_2. Dann gilt

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; f(z)\,, \qquad \int_{\Gamma_1} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; 0\,.$$

Wenn nun die Summe der Integrale betrachtet wird, so folgt die obige Formel, weil die Integrale über die beiden Verbindungsstücke auf der Geraden sich gerade wegheben, denn sie werden in umgekehrte Richtung je zweimal durchlaufen. Ein alternativer Beweis obiger Formel verwendet die Homologieversion des Cauchy'schen Integralformel. Diese beiden Wege $\partial B_{\rho_2}(z_0) \setminus \partial B_{\rho_1}(z_0)$ sind homolog in D, d.h. sie besitzen gleiche Windungszahlen $\forall\ z \notin D$. Dann ist der Zykel $\Gamma = \partial B_{\rho_2}(z_0) - \partial B_{\rho_1}(z_0) \approx_D 0$ (homolog null in D). Nach der Cauchy'schen Integralformel gilt für $z \in D$ mit $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ wegen

$$\mathrm{Ind}_z(\Gamma) \;=\; \mathrm{Ind}_z(\partial B_{\rho_2}(z_0)) - \mathrm{Ind}_z(\partial B_{\rho_1}(z_0)) \;=\; 1 - 0 \;=\; 1$$

folgt:

$$f(z) \;=\; f(z) \cdot 1 \;=\; \int_\Gamma \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;=\; \int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,.$$

Nun zeigen wir die Behauptung für den Nebenteil (mit $|z - z_0| < \rho_2 = |\zeta - z_0|$):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;&=\; \int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\
&=\; \int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n \\
&=\; \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n \int_{\partial B_{\rho_2}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\
&=\; \sum_{n \geq 0} (z - z_0)^n a_n
\end{aligned}$$

weil ρ_2 durch ρ ersetzt werden darf nach dem Cauchy'schen Integralsatz. Bei der Vertauschung von Summe und Integral wurde die normale Konvergenz der geometrischen Reihe und der Vertauschungssatz angewendet. Dasselbe für den Hauptteil (mit $|z - z_0| > \rho_1 = |\zeta - z_0|$):

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \;&=\; \int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{(-f(\zeta))}{z - z_0}\,\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \\
&=\; -\int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{z - z_0} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n \\
&=\; -\sum_{n \leq 0} (z - z_0)^{n-1} \int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, f(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z_0}\right)^n \\
&=\; -\sum_{n < 0} (z - z_0)^n \int_{\partial B_{\rho_1}(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\,\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \\
&=\; -\sum_{n < 0} (z - z_0)^n a_n\,.
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt auch die Integraldarstellung von a_n, aus welcher wiederum die Cauchy Abschätzung direkt folgt.

Nun zur Eindeutigkeit der Darstellung: Sei

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n(z-z_0)^n$$

für alle $z \in D$. Multiplikation beider Seiten mit $(z-z_0)^{-k-1}$ und Integration auf dem Weg $\partial B_\rho(z_0)$ liefert, da wegen der normalen Konvergenz das Integral mit der Summation vertauscht werden darf, $a_k = b_k$. □

Satz 4.8 (Klassifikation isolierter Singularitäten durch Laurent-Reihen)**.** *Sei $B_R(z_0)\setminus\{z_0\}$ eine degenerierte (oder auch punktierte) Kreisscheibe und $f : B_R(z_0)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit zugehöriger Laurent-Reihe*

$$f(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$$

Dann gilt:

(i) *z_0 ist eine hebbare Singularität genau dann, wenn der Hauptteil $\sum_{n<0} a_n(z-z_0)^n$ verschwindet (also $a_n = 0 \;\forall\; n<0$).*

(ii) *z_0 ist Pol genau dann, wenn der Hauptteil endlich ist, d.h. $\exists\; N>0$ mit $a_n = 0 \;\forall\; -n \geq N$.*

(iii) *z_0 ist eine wesentliche Singularität genau dann, wenn es unendlich viele $n<0$ gibt mit $a_n \neq 0$.*

Beweis. Dies folgt direkt mit Satz 4.7 aus der Definition. □

Satz 4.9. *Die Laurent-Reihe um z_0 einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert auf dem größten Ringgebiet*

$$\tilde{D} \;=\; \{z\in\mathbb{C} \;:\; r < |z-z_0| < R\}\,,$$

in welches die Funktion analytisch fortgesetzt werden kann ($\tilde{D}$ ist mindestens der größte in D enthaltene Ring). Für dieses Gebiet $\tilde{D}$ gilt: f hat auf dem inneren und äußeren Begrenzungskreis jeweils mindestens einen singulären Punkt.

Beweis. Der Beweis folgt aus Satz 3.28, angewendet auf den Nebenteil $f_+(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ (liefert einen singulären Punkt auf dem äußeren Kreis) und auf den Hauptteil (liefert einen singulären Punkt auf dem inneren Kreis). □

Nun folgen eine Reihe von Beispielen, in denen ersichtlich wird, dass man Laurent-Reihen meistens durch Zurückführen auf bekannte Reihen berechnet.

Beispiel 4.10. Betrachte

$$f(z) \;=\; \frac{2}{z^2-4z+3} \;=\; \frac{2}{(z-3)(z-1)} \;=\; \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\,.$$

Die Reihe f konvergiert auf drei Ringgebieten:

$$D_1 \;=\; \{0<|z|<1\}\,, \qquad D_2 \;=\; \{1<|z|<3\}, \qquad D_3 \;=\; \{|z|>3\}$$

Die Laurent-Reihe für $z \in D_1$ ist:

$$f(z) \;=\; \frac{1}{1-z} \;-\; \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \;=\; \sum_{n\geq 0}\big(1 \;-\; \frac{1}{3^{n+1}}\big)z^n$$

Die Laurentreihe für $z \in D_2$ ist:

$$f(z) \;=\; -\,\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \;-\; \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \;=\; -\sum_{n<0} z^n \;-\; \sum_{n\geq 0} 3^{-n-1} z^n$$

Die Laurentreihe für $z \in D_3$ ist:

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}} \;-\; \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \;=\; \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\big(\frac{3}{z}\big)^n \;-\; \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}\big(\frac{1}{z}\big)^n \;=\; \sum_{n<0} z^n(3^{n+1}-1)$$

$\diamond$

Beispiel 4.11. Sei $k \in \mathbb{N}$. Betrachte die Laurentreihe von $f(z) = \exp(-z^{-k})$ um $z_0 = 0$, d.h. $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}(-1)^n z^{-nk}\,.$$

Es gibt hier also unendlich viele $n < 0$ mit $a_n \neq 0$; $z_0 = 0$ ist demnach eine wesentliche Singularität. $\diamond$

Beispiel 4.12. Betrachte die Laurentreihe um $z_0 = 0$ von

$$\cot(z) \;=\; \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\,.$$

Die Pole von $\cot(z)$ (Nullstellen vom Sinus) sind von der Form $\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Setze $D = \{z \in \mathbb{C} \;:\; 0 < |z| < \pi\}$. D ist offensichtlich größtmögliches Ringgebiet um $z_0 = 0$. Verwende nun die e-Funktionsdarstellung von cos und sin:

$$\cot(z) \;=\; i\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}} \;=\; i\,\frac{e^{2iz}+1}{e^{2iz}-1} \;=\; i \;+\; \frac{2i}{e^{2iz}-1} \;=\; i \;+\; \frac{1}{z}\frac{2iz}{e^{2iz}-1}$$

Man verwendet die Potenzreihenentwicklung für kleine z (d.h. $z \to 0$) der analytischen Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{z}{e^z-1} \;=\; \frac{z}{1+z+O(z^2)-1} \;=\; \frac{1}{1+O(z)} \;=\; \sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}\,z^n$$

wobei per Definitionem B_n die Bernoulli-Zahlen sind. Man kann die B_n durch Potenzreihenentwicklung berechnen mit der Näherungsformel (vgl. geometrische Reihe) $\frac{1}{1+\epsilon} = 1-\epsilon+\epsilon^2+O(\epsilon^3)$:

$$\begin{aligned}
f(z) \;&=\; \frac{z}{z+\frac{1}{2}z^2 \;+\; \frac{1}{6}z^3+...} \\
&=\; \frac{1}{1+\frac{1}{2}z \;+\; \frac{1}{6}z^2 \;+\; ...} \\
&=\; 1 \;-\; \big(\frac{1}{2}z+\frac{1}{6}z^2 \;+\; O(z^3)\big) \;+\; \big(\frac{1}{2}z \;+\; \frac{1}{6}z^2 \;+\; O(z^3)\big)^2 + O\big((\frac{1}{2}z \;+\; \frac{1}{6}z^2 \;+\; O(z^3))^3\big) \\
&=\; 1 \;-\; \frac{1}{2}\,z \;+\; \frac{1}{2!}\,\frac{1}{6}\,z^2 \;+\; O(z^3)
\end{aligned}$$

Also $B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}$; allgemein gilt: $B_{2n+1} = 0 \quad \forall\, n \geq 1$. Begründung hierfür:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{1}{2}z = \frac{2z + z(e^z - 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{z(e^z + 1)}{2(e^z - 1)} = \frac{(-z)(e^{-z} + 1)}{2(e^{-z} - 1)}$$

Die letzte Gleichheit ergibt sich sowohl bei der Ersetzung von z durch $-z$ als auch durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit e^{-z}; somit ist $\frac{z}{e^z-1} + \frac{1}{2}z$ eine gerade Funktion, weswegen die ungeraden Koeffizienten verschwinden müssen. Man kann dann zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\cot(z) &= i + \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0} \frac{B_n}{n!}(2iz)^n \\
&= i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\frac{1}{2}(2iz) + \frac{1}{z}\sum_{k\geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(2iz)^{2k} \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{k\geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(i2z)^{2k} \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{B_{2k}}{(2k)!}(i2)^{2k} z^{2k-1}
\end{aligned}$$

◇

4.2 Meromorphe Funktionen

Definition 4.13. Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet. Eine Funktion $f : D \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt *meromorph*, wenn es eine diskrete häufungspunktfreie Menge $P(f)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) $f : D \setminus P(f) \to \mathbb{C}$ holomorph.

(ii) f hat Pole in $P(f)$, und es gilt $f|_{P(f)} = \infty$.

Man sagt, f ist *meromorph in* z, falls f (für ein hinreichend kleines ϵ) meromorph auf $B_\epsilon(z)$ fortgesetzt werden kann.

Bemerkung.

(i) Jede holomorphe Funktion ist meromorph.

(ii) Meromorphe Funktionen haben keine wesentlichen Singularitäten.

(iii) Falls $z_0 \in P(f)$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ mit einer holomorphen Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ (siehe Satz 4.2).

(iv) Die obige Definition ist analytischer Natur. Es gibt auch eine algebraische Version der Definition: f heißt meromorph, falls $f = \frac{\alpha}{\beta}$ mit Potenzreihen α, β und $\beta \not\equiv 0$. Die Begründung hierfür liegt im Satz von Mittag-Leffler (siehe unten).

◇

Beispiel. Rationale Funktionen sind von der Gestalt $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit Polynomen P, Q. Sofern $Q \neq 0$ ist und P und Q keine gemeinsamen Nullstellen haben, ist f meromorph auf $D = \mathbb{C}$ und

$$P(f) \;=\; \{\text{Nullstellen von } Q\}\,.$$

Eine meromorphe Funktion, die nicht rational ist, ist $f(z) = \cot(z)$. Die Polmenge ist $P(f) = n\mathbb{Z}$ $\diamond$

Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph und g nicht die Nullfunktion. Dann ist fg^{-1} meromorph, weil nach Theorem 3.21 (Satz von der offenen Abbildung) die Menge

$$\{\text{Nullstellen von } g\}$$

diskrete ist. Sei $g(z_0) = 0$. Dann hat wegen $g \not\equiv 0$ die Reihenentwicklung von g um z_0 folgende Gestalt, wobei $m \geq 1$ und $a_m \neq 0$:

$$g(z) \;=\; \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n\,.$$

Also hat fg^{-1} einen Pol bei z_0. Tatsächlich gilt die Umkehrung, die im Satz 5.7 später bewiesen wird.

Satz 4.14 (Satz von Mittag-Leffler)**.** *Jede meromorphe Funktion ist Quotient zweier holomorpher Funktionen f, g.*

Satz 4.15. *Die Menge*

$$M(D) \;=\; \{\textit{meromorphe Funktionen auf } D\}$$

versehen mit punktweiser Addition und Multiplikation ist ein Körper. Insbesondere gibt es für $f \in M(D), f \not\equiv 0$ eine Funktion $g \in M(D)$ mit $fg = 1$ auf der Menge, wo keine Pole vorliegen. Die holomorphen Funktionen

$$O(D)$$

auf D bilden einen Unterring von $M(D)$, der aber kein Körper ist. Nach dem Satz von Mittag-Leffler ist $M(D)$ der Quotientenkörper von dem Integritätsring $O(D)$.

Beweis. Sei $f \in M(D)$. Setze

$$g \;=\; f^{-1}$$

auf $D \setminus P(g)$ wobei $P(g) = \{\text{Nullstellen von } f\}$ und $g(z) = 0$, falls $z \in P(f)$. Bei $P(g)$ liegen nach obigem Argument tatsächlich Pole vor. Mit dieser Wahl des multiplikativen Inversen lassen sich die Körpereigenschaften direkt überprüfen. $\square$

Satz 4.16 (Identitätssatz für meromorphe Funktionen)**.** *Seien $f, g \in M(D)$ und ein Gebiet $\tilde{D}$ gegeben durch $\tilde{D} = D \setminus \{P(f) \cup P(g)\}$. Äquivalent sind:*

(i) $f = g$

(ii) $\{z \in \tilde{D} \,:\, f(z) = g(z)\}$ *hat einen Häufungspunkt in* $\tilde{D}$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$(ii) ist trivial. (ii)$\Longrightarrow$(i) folgt aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen (Satz 3.26) und aus der Tatsache, dass f, g (eingeschränkt auf $\tilde{D}$) holomorph sind. □

Definition 4.17. Seien $D \subset \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ offen mit $\infty \in D$ und $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Abbildung.

(i) f heißt *meromorph bei* ∞, wenn $\hat{f}(z) = f(z^{-1})$ meromorph bei 0 ist.

(ii) f heißt *meromorph auf* D, wenn f meromorph in allen Punkten von D ist.

Weil $\infty \in D$ ist (ii) äquivalent dazu, dass f meromorph auf $D \setminus \{\infty\}$ ist und $\hat{f}$ meromorph auf $\hat{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \frac{1}{z} \in D\}$).

Beispiel.

(i) Die Möbiustransformation $M_T : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ ist eine meromorphe Bijektion (vgl. Definition 2.29); denn:

$$\hat{M}_T(z) \;=\; M_T\left(\tfrac{1}{z}\right) \;=\; \frac{a\frac{1}{z} + b}{c\frac{1}{z} + d} \;=\; \frac{bz + a}{dz + c} \;=\; M_{\hat{T}}(z) \quad \text{mit} \quad \hat{T} \;=\; \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix},$$

und $z \mapsto \hat{M}_T(z)$ ist meromorph bei 0.

(ii) Die Funktion $f(z) = \exp(z)$ ist nicht meromorph bei ∞, weil $\exp(z^{-1})$ eine wesentliche Singularität bei 0 hat.

(iii) Die rationale Funktion $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ist meromorph auf $\overline{\mathbb{C}}$.

◇

Satz 4.18. *Jede auf ganz* $\overline{\mathbb{C}}$ *meromorphe Funktion* f *ist rational.*

Beweis. Da f meromorph bei ∞ ist, ist f holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > R\}$ für ein gewisses großes R. Da $\overline{B_R(0)}$ kompakt ist, folgt, dass f endlich viele Pole $z_1, ..., z_n$ hat. Bei z_k, $1 \leq k \leq n$, gibt es eine Darstellung

$$f(z) \;=\; \frac{h(z)}{(z - z_k)^{m_k}}$$

mit einer holomorphen Funktion h. Demnach ist

$$F(z) \;=\; \left(\prod_{k=1}^{n} (z - z_k)^{m_k}\right) \cdot f(z)$$

eine ganze Funktion. Außerdem hat f (und somit F) keine wesentliche Singularität bei ∞. Dies impliziert, dass F ein Polynom ist, und f somit rational. □

4.3 Residuenkalkül

Definition 4.19. Der Punkt z_0 sei isolierte Singularität von f, d.h. $f : B_\epsilon(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Die zugehörige Laurent-Reihe sei

$$f(z) \;=\; \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-z_0)^n \,.$$

Dann ist das *Residuum* von f bei z_0 definiert durch

$$\operatorname{Res}_f(z_0) \;=\; a_{-1} \;\in\; \mathbb{C}\,.$$

Bemerkung.

(i) Nach Satz 4.7 ist

$$\operatorname{Res}_f(z_0) \;=\; a_{-1} \;=\; \oint_{\partial B_\rho(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i}\, f(\zeta)\,.$$

Das Residuum ist der Rest des Integrals, insofern, dass $\oint f(z)\,dz = 0$ für holomorphes f ist.

(ii) Falls f holomorph bei z_0 ist, so folgt $\operatorname{Res}_f(z_0) = 0$.

(iii) Falls z_0 hebbare isolierte Singularität von f ist, so ist ebenfalls $\operatorname{Res}_f(z_0) = 0$.

(iv) Allgemein folgt aus den Rechenregeln für die Laurentreihe

$$\operatorname{Res}_{f+\lambda g}(z_0) \;=\; \operatorname{Res}_f(z_0) \;+\; \lambda \operatorname{Res}_g(z_0)\;.$$

◇

Satz 4.20. *Sei z_0 isolierte Singularität von f.*

(i) *Sei z_0 Pol erster Ordnung. Dann ist*

$$\operatorname{Res}_f(z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)\,.$$

(ii) *Sei $f = gh^{-1}$ mit holomorphen Funktionen g und h und $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$. Dann ist*

$$\operatorname{Res}_f(z_0) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

(iii) *Sei z_0 Pol von m.ter Ordnung. Dann ist*

$$\operatorname{Res}_f(z_0) \;=\; \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-z_0)^m \frac{f(z)}{(m-1)!}\bigg|_{z=z_0}\;.$$

Beweis. (i) ist ein Spezialfall von (iii). Wir zeigen also die unter (iii) angegebene Formel. Sei z_0 Pol m.ter Ordnung. Setze

$$g(z) \;=\; (z-z_0)^m f(z) \;=\; \sum_{n\geq -m} a_n (z-z_0)^{n+m} \;=\; \sum_{n\geq 0} a_{n-m}(z-z_0)^n \,.$$

Die Funktion g hat somit eine hebbare Singularität und kann holomorph fortgesetzt werden. Betrachte die Ableitungen von g:

$$\begin{aligned} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z) &= \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \sum_{n\geq 0} a_{n-m}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} a_{n-m}(z-z_0)^n \\ &= \sum_{n\geq m-1} n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-2))a_{n-m}(z-z_0)^{n-(m-1)} \end{aligned}$$

Für $z\to z_0$ verschwindet nur der erste Summand nicht, und es folgt:

$$\left.\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-z_0)^m f(z)\right|_{z=z_0} \;=\; (m-1)!\cdot a_{-1}\,.$$

Bei (ii) liegt ein Pol von 1. Ordnung vor. Mit der Formel aus (i) unter Verwendung von $h(z_0)=0$ folgt:

$$\mathrm{Res}_f\,(z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \;=\; \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)}{h(z)-h(z_0)}g(z) \;=\; \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}\,.$$

□

Beispiel. Sei

$$f(z) \;=\; \frac{z^2}{1+z^4}\,.$$

Dann ist

$$z_0 \;=\; e^{i\frac{\pi}{4}} \;=\; \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Pol 1. Ordnung. Verwende Teil 2 von Satz 4.20 und die Eigenschaft $z_0\overline{z_0}=|z_0|^2=1$:

$$\mathrm{Res}_f\,(z_0) \;=\; \frac{z_0^2}{4z_0^3} \;=\; \frac{1}{4z_0} \;=\; \frac{1}{4}\overline{z_0} \;=\; \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\,.$$

◇

Beispiel. Sei

$$f(z) \;=\; \frac{4z}{(z^2+2pz+1)^2}$$

mit $p \in \mathbb{R}, p > 1$. Es liegen Pole zweiter Ordnung bei den reellen Zahlen

$$z_0 \;=\; -p + \sqrt{p^2-1} \text{ und } z_1 \;=\; -p - \sqrt{p^2-1}$$

vor. Aus Teil (iii) von Satz 4.20 folgt mit $z^2+2pz+1 = (z-z_0)(z-z_1)$ und $z_0 - z_1 = 2\sqrt{p^2-1}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_f(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z) \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}(z-z_0)^2 \frac{4z}{(z^2+2pz+1)^2} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\frac{4z}{(z-z_1)^2} \\
&= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{4}{(z-z_1)^2} - \frac{8z}{(z-z_1)^3}\right] \\
&= \frac{4}{4(p^2-1)} - \frac{8z_0}{8(p^2-1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{\sqrt{p^2-1} - z_0}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{p}{(p^2-1)^{\frac{3}{2}}} \,.
\end{aligned}$$

◇

Satz 4.21 (Residuensatz; Cauchy 1824)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $S \subset D$ endlich und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei Γ geschlossener Weg in D (stückweise stetig differenzierbar) mit*

$$\operatorname{Spur}(\Gamma) \cap S \;=\; \emptyset \,.$$

Dann ist

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, f(z) \;=\; \sum_{z_0\in S} \operatorname{Ind}_{z_0}(\Gamma)\, \operatorname{Res}_f(z_0) \,.$$

Bemerkung.

(i) Wenn f holomorph auf D ist ($S = \emptyset$), dann ist dies gerade der Cauchy'sche Integralsatz.

(ii) Sei $z_0 \in S$ und ϵ genügend klein. Für $\Gamma = \partial B_\epsilon(z_0)$ ist die Windungszahl gerade 1 und per definitionem

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, f(z) \;=\; 1 \cdot \operatorname{Res}_f(z_0) \,.$$

(iii) Die Voraussetzung, dass D einfach zusammenhängend ist, gilt insbesondere, wenn D Sterngebiet ist.

Beweis. Sei $S = \{z_1, ..., z_n\}$. Notiere den Hauptteil von f bei z_k gesondert unter

$$h^{(k)}(z) \;=\; \sum_{j \leq -1} a_j^{(k)} (z - z_k)^j \,.$$

Dann ist $\mathrm{Res}_f\,(z_k) = a_{-1}^{(k)}$. Setze

$$g(z) \;=\; f(z) \;-\; \sum_{k=1}^{n} h^{(k)}(z)\,.$$

Dann hat g hebbare Singularitäten bei allen Punkten aus S, kann also als holomorphe Funktion auf ganz D aufgefasst werden. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz (Theorem 3.34) verschwindet das Integral über g:

$$\int_\Gamma g(z)\,dz \;=\; 0\,.$$

Mit der Linearität des Integrals folgt:

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, f(z) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, h^{(k)}(z) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \leq -1} a_j^{(k)} \int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, (z - z_k)^j \,.$$

Nun ist die Funktion $z \in D \setminus \{z_k\} \mapsto (z - z_k)^j$ analytisch. Der Weg Γ kann also auf den Weg $\partial B_\epsilon(z_k)$ homotopiert werden, der jedoch genau $\mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma)$ Mal durchlaufen wird (falls $\mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma)$ negativ ist im negativ orientierten Sinne). Also

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, (z - z_k)^j \;=\; \mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma) \int_{\partial B_\epsilon(z_k)} \frac{dz}{2\pi i}\, (z - z_k)^j \;=\; \mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma)\; \delta_{j,-1}$$

weil sich mit der Substitution $z = z_k + \epsilon e^{i\phi}\,,\; dz/d\phi = i\epsilon e^{i\phi}$ ergibt:

$$\int_{\partial B_\epsilon(z_k)} \frac{dz}{2\pi i}\, (z - z_k)^j \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{(\epsilon e^{i\phi})^j}{2\pi i}\, i\epsilon e^{i\phi} d\phi \;=\; \epsilon^{j+1} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i(j+1)\phi}}{2\pi} d\phi \;=\; \begin{cases} 0\,, & j+1 \neq 0\,, \\ 1\,, & j+1 = 0\,. \end{cases}$$

Zusammengenommen folgt

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, f(z) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \sum_{j \leq -1} a_j^{(k)}\, \mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma)\; \delta_{j,-1} \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_{-1}^{(k)}\, \mathrm{Ind}_{z_k}(\Gamma)\,,$$

und daraus die Behauptung. □

Aufbauend auf der Homologieversion des Cauchy'schen Integralsatz gibt es auch eine Homologieversion des Residuensatzes (welche Zusatzmaterial der zweistündigen Veranstaltung ist).

Satz 4.22 (Homologieversion des Residuensatzes). *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen, $S \subset D$ endlich und $f : D \setminus S \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei Γ geschlossener Weg in D (stückweise stetig differenzierbar) mit*

$$\operatorname{Spur}(\Gamma) \cap S \;=\; \emptyset$$

und $\Gamma \approx_D 0$, d.h. Γ ist homolog 0 in D. Dann ist

$$\int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, f(z) \;=\; \sum_{z_0 \in S} \operatorname{Ind}_{z_0}(\Gamma)\, \operatorname{Res}_f(z_0)\,.$$

Beweis. Der Beweis ist im Wesentlichen derselbe. Es wird jedoch verwandt, dass

$$\Gamma \;\approx_{D\setminus\{z_k\}}\; \operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma) \cdot \partial B_\epsilon(z_k)\,.$$

Hier ist die Multiplikation des Weges $\partial B_\epsilon(z_k)$ mit der ganzen Zahl $\operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma)$ im Zykel-Sinne gemeint - $\partial B_\epsilon(z_k)$ wird also $|\operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma)|$-mal im positiven (oder, falls $\operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma)$ negativ ist, im negativen) Sinne durchlaufen. Nach Satz 3.37 ist

$$\int_\Gamma F(z)\, dz \;=\; \operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma) \int_{\partial B_\epsilon(z_k)} F(z)\, dz$$

für jede holomorphe Funktion $F : D \setminus \{z_k\} \to \mathbb{C}$, insbesondere für $F(z) = (z - z_k)^j$. Nun kann genau so wie im Beweis von Satz 4.21 argumentiert werden. □

Beispiel 4.23 (Trigonometrisches Integral). Wir möchten das reelle Integral

$$I \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos\phi}\, d\phi$$

für $a > 1$ berechnen. Dies kann als Parametrisierung eines komplexen Wegintegrals aufgefasst werden: Sei

$$z \;=\; e^{i\phi}\,, \qquad \frac{dz}{d\phi} \;=\; ie^{i\phi}\,,$$

also $d\phi = \frac{dz}{iz}$. Mit

$$\cos(\phi) \;=\; \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi}) \;=\; \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \;=\; \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big)$$

gelangt man zu der Darstellung

$$I \;=\; \int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{a + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})}\, \frac{dz}{iz} \;=\; \int_{\partial B_1(0)} \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1}\, dz\,.$$

Der Integrand sei mit $f(z) = \frac{-2i}{z^2+2az+1}$ bezeichnet. Die Nullstellen des Nenners sind $z_+ = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ und $z_- = -a - \sqrt{a^2 - 1}$. Deren Beträge erfüllen:

$$|z_-| \;=\; |+a + \sqrt{a^2 - 1}| \;=\; a\Big|1 + \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}\Big| \;\geq\; a \;>\; 1\,.$$

Also ist $z_- \notin \overline{B_1(0)}$ und folglich $\mathrm{Ind}_{z_-}(\partial B_1(0)) = 0$. Des Weiteren verwende $\sqrt{a^2-1} < \sqrt{a^2} = a$, d.h. $-a < -\sqrt{a^2-1}$, um zu zeigen, dass

$$z_+^2 \;=\; a^2 - 2a\sqrt{a^2-1} + (a^2-1) \;<\; a^2 - 2(a^2-1) + (a^2-1) \;=\; 1\,.$$

Also ist $z_+ \in B_1(0)$ und $\mathrm{Ind}_{z_+}(\partial B_1(0)) = 1$. Nun verwenden wir

$$f(z) \;=\; (-2i)\frac{1}{(z-z_-)(z-z_+)} \;=\; (-2i)\frac{(z-z_-)^{-1}}{z-z_+}\,,$$

wobei der Zähler holomorph bei z_+ ist und der Nenner dort eine Nullstelle hat, mit nichtverschwindender Ableitung. Wir können somit das Residuum bei z_+ wie folgt berechnen:

$$\mathrm{Res}_f\,(z_+) \;=\; (-2i)\frac{1}{z-z_-}\frac{1}{1}\bigg|_{z=z_+} \;=\; \frac{-2i}{z_+-z_-}\,.$$

Somit ist das Integral nach dem Residuensatz gegeben durch

$$I \;=\; 2\pi i\cdot 1\cdot \mathrm{Res}_f\,(z_+) \;=\; (2\pi i)(-2i)\frac{1}{z_+-z_-} \;=\; \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}\,.$$

◇

Wir betrachten nun ein weiteres Beispiel eines reellen Integrals, das nicht direkt durch eine Umparametrisierung in ein komplexes umgewandelt werden kann. Stattdessen muss dem Integrationsweg ein Kreisbogen hinzugefügt werden, so dass das Integral auf diesem Kreisbogen asymptotisch nichts beiträgt.

Beispiel 4.24 (Uneigentliches Integral)**.** Wir möchten

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx$$

berechnen. Hierfür schreiben wir es in ein komplexes Wegintegral um:

$$I = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z^2}{1+z^4}\,dz\,.$$

Hierbei ist $t \in (-1,1) \mapsto \Gamma_R(t) = tR$ der (nichtgeschlossene) Weg von $-R$ nach R entlang der reellen Achse. Sei γ_R der Weg, der von R in einem Halbkreis über iR nach $-R$ führt, also $t \in [1,2] \mapsto \gamma_R(t) = R\cdot e^{i\pi(t-1)}$. Somit ist

$$\Lambda_R = \Gamma_R + \gamma_R$$

ein geschlossener Weg in der oberen komplexen Halbebene. Der Lösungsweg ist nun, mittels des Residuensatzes den Wert des Integrals über Λ_R auszurechnen und zu argumentieren, dass für $R\to\infty$ der Beitrag des Halbkreisintegrals über γ_R verschwindet, so dass der errechnete Wert mit I zusammenfällt:

Die Singularitäten von

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

sind Pole erster Ordnung der Form $z_k = \exp(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi i k}{4})$ mit $k = 0, 1, 2, 3$. Nur z_0 und z_1 liegen im Inneren von Λ_R ($\mathrm{Ind}_{z_2}(\Lambda_R) = \mathrm{Ind}_{z_3}(\Lambda_R) = 0$). Die zugehörigen Residuen:

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_f\,(z_0) &= \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4}\overline{z_0} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\\ \mathrm{Res}_f\,(z_1) &= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}}\,.\end{aligned}$$

Nun zum Beitrag des Halbkreisintegrals ($|\gamma_R|$ ist die Länge des Weges):

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz\right| &\leq |\gamma_R| \cdot \sup_{z\in\gamma_R} \frac{|z^2|}{|1+z^4|}\\ &= \pi R \cdot \frac{R^2}{\inf_{\phi\in[0,\pi]} |1+(Re^{i\phi})^4|}\\ &= \frac{\pi R^3}{|R^4-1|} \longrightarrow 0\,, \qquad R\to\infty\,.\end{aligned}$$

Somit ist

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{\Lambda_R} \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = 2\pi i\,[\mathrm{Res}_f\,(z_0) + \mathrm{Res}_f\,(z_1)] = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

◇

Es folgt ein weiteres Beispiel, nochmals ganz anderer Natur.

Beispiel 4.25 (Oszillierendes Integral)**.** Für $t \in \mathbb{R}$ ist der (womöglich komplexe) Wert

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ixt} dx$$

gesucht. (Dieses Integral ist nicht absolut konvergent und daher nur im Riemannschen Sinne wohldefiniert.) Betrachte hierzu

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} e^{itz} = \frac{1}{2iz}\left(e^{iz(1+t)} - e^{iz(-1+t)}\right).$$

Dies ist eine ganze Funktion, denn bei $z = 0$ liegt lediglich eine hebbare Singularität vor. Als Integrationsweg Γ_R wählen wir das Teilstück $[-R, R]$ der reellen Achse, aber die 0 wird in einem Halbkreis mit Radius 1 unten herum umgangen. Nach Theorem 3.8 ist ein komplexes Wegintegral über eine holomorophe Funktion f mit Anfangspunkt $(-R, 0)$ und Endpunkt $(R, 0)$

unabhängig vom Integrationsweg. Deswegen darf bei der Integration entlang der x-Achse der Nullpunkt in der Tat wie oben beschrieben umgangen werden:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{2iz} e^{iz(1+t)}\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{2iz} e^{iz(-1+t)}\,dz.$$

Der Limes konnte auseinander gezogen werden, da die Singularität bei der 0 vermieden wird. Mit

$$I_R(s) = \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z}$$

formt man um zu:

$$I = \pi \lim_{R\to\infty} \left(I_R(t+1) - I_R(t-1)\right) .$$

Nun kann man Γ_R durch einen Halbkreis γ_R^+ in der oberen Halbebene gegeben durch $\theta \in [0,\pi] \mapsto Re^{i\theta}$ oder einen Halbkreis γ_R^- in der unteren Halbebene gegeben durch $\theta \in [0,\pi] \mapsto Re^{-i\theta}$ schließen. Da $\frac{e^{isz}}{z}$ nur bei $z_0 = 0$ einen Pol hat und die Umkehrung γ_R^- gegeben ist durch $\theta \in [\pi, 2\pi] \mapsto Re^{i\theta}$, folgt mit der Substitution $z = Re^{i\theta}$ ($\pi \le \theta \le 2\pi$):

$$\begin{aligned} I_R(s) &= \int_{\Gamma_R+\gamma_R^- -\gamma_R^-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z} \\ &= 0 + \int_{-\gamma_R^-} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z} \\ &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{isRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} Re^{i\theta} i d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{isRe^{i\theta}} . \end{aligned}$$

Analog gilt für den mit γ_R^+ geschlossenen Weg nach dem Residuensatz:

$$I_R(s) = \operatorname{Res}_{\frac{e^{isz}}{z}}(0) + \int_{-\gamma_R^+} \frac{dz}{2\pi i} \frac{e^{isz}}{z} = 1 - \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{isRe^{i\theta}}$$

Verwende jetzt $\left|e^{isRe^{i\theta}}\right| = e^{-sR\sin\theta}$. Falls $s \cdot \sin\theta > 0$ ist, geht dies gegen 0 im Limes $R \to \infty$. Also:

$$\lim_{R\to\infty} I_R(s) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } s < 0 \text{ (nach der Formel mit } \gamma_R^-) \\ 1\,, & \text{falls } s > 0 \text{ (nach der Formel mit } \gamma_R^+) \\ \frac{1}{2}\,, & \text{falls } s = 0 \end{cases}$$

Hierbei ist der Wert bei $s = \frac{1}{2}$ durch eine explizite Rechnung unter Verwendung des Integralsinus gegeben:

$$I_\infty(\tfrac{1}{2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{2}) + i\sin(\frac{x}{2})}{x} \frac{dx}{2\pi i} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x} \frac{dx}{2\pi} = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} \frac{dx}{\pi} = \frac{1}{2} .$$

Somit:

$$\begin{aligned}
I &= \pi \lim_{R\to\infty} \left(I_R(t+1) \;-\; I_R(t-1)\right) \\
&= \pi \left(\chi_{(0,\infty)}(t+1) \;+\; \frac{1}{2}\chi_{\{0\}}(t+1) \;-\; \chi_{(0,\infty)}(t-1) \;-\; \frac{1}{2}\chi_{\{0\}}(t-1)\right) \\
&= \pi \left(\chi_{(-1,\infty)}(t) \;+\; \frac{1}{2}\chi_{\{-1\}}(t) \;-\; \chi_{(1,\infty)}(t) \;-\; \frac{1}{2}\chi_{\{1\}}(t)\right) \\
&= \pi \begin{cases} 0\,, & \text{falls } t < -1 \\ \frac{1}{2}\,, & \text{falls } t = -1 \\ 1\,, & \text{falls } t \in (-1,1) \\ \frac{1}{2}\,, & \text{falls } t = +1 \\ 0\,, & \text{falls } t > +1 \end{cases} \\
&= \pi \begin{cases} 1\,, & \text{falls } |t| < 1 \\ \frac{1}{2}\,, & \text{falls } |t| = 1 \\ 0\,, & \text{falls } |t| > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

◇

Satz 4.26 (Logarithmisches Integral)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet und f meromorphe Funktion auf D mit den Polen $z_1, ..., z_K$ und den Nullstellen $w_1, ..., w_N$ in D. Sei Γ in D zusammenziehbar und vermeide Pole und Nullstellen von f. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{1}{2\pi i}\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Ind}_{z_k}(\Gamma) \operatorname{Ord}_f(z_k) + \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Ind}_{w_n}(\Gamma) \operatorname{Ord}_f(w_n) \\
&= \sum_{z\in D} \operatorname{Ind}_z(\Gamma) \operatorname{Ord}_f(z)\ .
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile ist nach Definition von Ord der erste Summand negativ, der zweite positiv. In der zweiten Zeile liefern nur die Pol- und Nullstellen einen nichtverschwindenden Beitrag, also hat die Summe nur endlich viele Summanden (in der ersten Zeile natürlich auch). Die Summe in der zweiten Zeile heißt auch die Ordnungssumme.

Beweis. Nahe einem Pol z_k gilt:

$$f(z) \;=\; (z - z_k)^m g(z)$$

mit $m = \operatorname{Ord}_f(z_k) < 0$ und einer holomorphen Funktion g mit $g(z_k) \neq 0$. Somit:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \;=\; \frac{m(z-z_k)^{m-1}g(z) + (z-z_k)^m g'(z)}{(z-z_k)^m g(z)} \;=\; \frac{m}{z-z_k} + \frac{g'(z)}{g(z)}\ .$$

Der zweite Summand ist nahe z_k eine holomorphe Funktion. Daher ist

$$\operatorname{Res}_{f'/f}(z_k) \;=\; m \;=\; \operatorname{Ord}_f(z_k)\ .$$

Einsetzen in den Residuensatz

$$\int_\Gamma \frac{F(z)}{2\pi i}\, dz \;=\; \sum_{z_0 \in S} \mathrm{Ind}_{z_0}(\Gamma)\, \mathrm{Res}_F\,(z_0)$$

mit $F = f'/f$ liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung.

(i) Die Summe ist endlich, weil Pol- und Nullstellen diskret liegen.

(ii) Falls $\Gamma = \partial B_R(z_0) \subset D$ und f holomorph:

$$\oint_{\partial B_R(z_0)} \frac{1}{2\pi i}\, \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \;=\; \#\{\text{Nullstellen von f in } B_R(z_0)\}\,.$$

(iii) Mit dem gleichem Beweis zeigt man für $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph:

$$\oint_\Gamma \frac{1}{2\pi i}\, \frac{f'(z)}{f(z)} g(z)\, dz \;=\; \sum_{z \in D} \mathrm{Ind}_z(\Gamma)\, \mathrm{Ord}_f\,(z) \cdot g(z)\,.$$

$\diamond$

Satz 4.27 (Rouche, 1862)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und beschränkt und f, g meromorph auf einer Umgebung der kompakten Menge $\overline{D}$. Sei Γ in D zusammenziehbar und vermeide Pole und Nullstellen von f. Unter der Annahme*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \textit{für alle } z \in \mathrm{Spur}\,(\Gamma)$$

gilt:

$$\sum_{z \in D} \mathrm{Ind}_z(\Gamma)\, \mathrm{Ord}_{f+g}\,(z) \;=\; \sum_{z \in D} \mathrm{Ind}_z(\Gamma)\, \mathrm{Ord}_f\,(z)\;.$$

Beweis. Betrachte $f + cg$ mit $c \in [0, 1]$. Für $z \in \mathrm{Spur}\,(\Gamma)$ gilt:

$$0 < |f(z)| - |g(z)| \le |f(z)| - c|g(z)| \le |f(z) + cg(z)| \le |f(z)| + c|g(z)| \le 2f(z)\,.$$

Die Funktion $f + cg$ hat demnach keine Nullstellen und Pole auf Spur (Γ), da Γdie Pole von f nach Annahme nicht trifft; somit ist der vorherige Satz anwendbar und liefert:

$$F(c) \;=\; \int_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}\, \frac{(f' + cg')(z)}{(f + cg)(z)} \;\in\; \mathbb{Z} \qquad \text{für alle } c \in [0, 1]\,.$$

Da $c \mapsto F(c)$ stetig ist, folgt $F(0) = F(1)$ und daraus die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich wieder (wie mit dem Satz von Liouville) der Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Sei

$$p(z) \;=\; \sum_{n=0}^{N} a_n z^n \;=\; f(z) + g(z)$$

mit $f(z) = a_N z^N$. Wähle R so groß, dass alle Nullstellen von p in $B_R(0)$ liegen und zudem

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{für alle } z \in \partial B_R(0) = \Gamma$$

gilt. Dann liefert der Satz die Aussage

$$\#\{\text{Nullstellen von } p = f + g\} \;=\; \#\{\text{Nullstellen von } f(z) = a_N z^N\} = N\,.$$

Die Nullstellen werden jeweils mit ihrer Multiplizität gezählt. ◇

Nun wird folgende Präzisierung des Satzes der offenen Abbildung (Theorem 3.21) bewiesen:

Satz 4.28. *Sei f holomorph in z_0 mit $f(z_0) = 0$. Die Nullstelle sei von Ordnung*

$$k \;=\; \mathrm{Ord}_f\,(z_0) > 0\,.$$

Dann gibt es offene Mengen $U, V \subset \mathbb{C}$ mit $z_0 \in U$, $0 = f(z_0) \in V$ (d.h. offene Umgebungen von z_0 und 0), so dass $f|_U : U \to V$ eine surjektive k-fache Überlagerung ist, d.h. jeder Punkt von V ist Bild von genau k Punkten in U.

Beweis. Wegen Stetigkeit von f können $\epsilon, \delta > 0$ gewählt werden, so dass $f(B_\delta(z_0)) \subset B_\epsilon(0)$ ist, und wegen der Separation seiner Nullstellen kann dies so gewählt werden, dass $f|_{\partial B_\delta(z_0)}$ nullstellenfrei ist. Wähle ein offenes, zusammenhängendes $V \subset B_\epsilon(0)$, so dass Werte aus V auf $\partial B_\delta(z_0)$ nicht angenommen werden (also $V \cap f(\partial B_\delta(z_0)) = \emptyset$), aber mit $0 \in V$. Jetzt setze für $w \in V$:

$$F(w) \;=\; \oint_{\partial B_\delta(z_0)} \frac{dz}{2\pi i}\, \frac{f'(z)}{f(z) - w}\,.$$

Nach Satz 4.26 ist

$$F(w) \;=\; \#\{z \in B_\delta(z_0) \;:\; f(z) = w\}\,,$$

mit Multiplizität gezählt. Insbesondere:

$$F(0) \;=\; \mathrm{Ord}_f\,(z_0) \;=\; k\,.$$

Nach Satz 3.5 ist F stetig auf V. Da F also ganzzahlige Werte annimmt und stetig ist auf einer zusammenhängenden Menge, ist $F(w) = k \;\forall\, w \in V$. Setze also

$$U \;=\; \{z \in B_\delta(z_0) \;:\; f(z) \in V\}\,.$$

Diese Menge enthält mindestens z_0 und kann somit nicht leer sein; außerdem ist sie als Urbild einer offenen Menge wieder offen. Dann erfüllt $f : U \to V$ das Gewünschte. □

Bemerkung.

(i) Der Beweis verwendete nicht den Satz der offenen Abbildung, gibt also einen neuen Beweis dieser Tatsache.

(ii) Durch Ersetzung von $f(z)$ durch $f(z) - f(z_0)$ kann eine analoge Aussage für $f(z_0) = w$ gezeigt werden.

(iii) Im Falle der Ordnung $k = 1$ erhält man lokal eine Bijektion und kann also die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to U$ betrachten. $\diamond$

Satz 4.29. *Sei f holomorph in z_0 und $f : B_\epsilon(z_0) \to \mathbb{C}$ injektiv. Außerdem sei $f(z_0) = 0$, aber $f'(z_0) \neq 0$, d.h. z_0 sei Nullstelle der Ordnung 1 und ϵ hinreichend klein. Setze $V = f(B_\epsilon(z_0))$ (V ist damit insbesondere offen). Dann ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : V \to B_\epsilon(z_0)$ holomorph und gegeben durch*

$$f^{-1}(w) \;=\; \oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{dz}{2\pi i} \, \frac{z f'(z)}{f(z) - w} \,, \qquad w \in V \,.$$

Beweis. Für $z = f^{-1}(w) \in B_\epsilon(z_0)$ und $k \in \mathbb{C}$ klein setze $f^{-1}(w+k) = z+h$ (genauer: $h = h(k)$). Dann gilt: $k \to 0 \Longleftrightarrow h \to 0$ und $f(z) = w,\ f(z+h) = w+k$. Somit

$$\frac{f^{-1}(w+k) - f^{-1}(w)}{k} \;=\; \frac{z+h-z}{f(z+h) - f(z)} \;\longrightarrow\; \frac{1}{f'(z)} \,, \qquad h \to 0 \,,\;\; k \to 0$$

und

$$(f^{-1})'(w) \;=\; \frac{1}{f'(z)} \;=\; \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$$

Dies stimmt natürlich mit der aus der Gleichung

$$\frac{d}{dz}(f \circ f^{-1}) \;=\; \frac{d}{dz} id$$

gewonnenen Umkehrformel überein. Wende nun die aus Satz 4.26 gefolgerte Formel

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i} \, \frac{f'(z)}{f(z)} g(z) \;=\; \sum_{z \in D} \mathrm{Ind}_z(\Gamma) \, \mathrm{Ord}_f\,(z) \, g(z)$$

an, mit f ersetzt durch $f - w$, $\Gamma = \partial B_\epsilon(z_0)$ und $g(\zeta) = \zeta$:

$$\oint_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{d\zeta}{2\pi i} \, \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \;=\; \sum_{z \in B_\epsilon(z_0)} 1 \cdot \mathrm{Ord}_{f-w}\,(z)\, z \;=\; z \;=\; f^{-1}(w) \,.$$

Dies gilt, weil $\mathrm{Ord}_{f-w}\,(z) = \delta_{z = f^{-1}(w)}$. $\square$

Bemerkung.

(i) Mit der Umkehrformel hat man eine weitere Möglichkeit, die implizite Gleichung $\alpha\circ\gamma = id$ für gegebene Potenzreihe α nach der Potenzreihe γ zu lösen (vgl. Satz 2.14). Außerdem gilt für den Konvergenzradius $\rho(\gamma)$

$$\rho(\gamma) \;\geq\; \sup\{\delta > 0 \;:\; B_\delta(f(z_0)) \subset V\}\,.$$

In konkreten Beispielen erlaubt dies, quantitative Abschätzungen zu erhalten.

(ii) Es folgt auch eine globale Aussage: Sei $D \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Nenne $D' = f(D)$. Dann ist $f^{-1} : D' \to \mathbb{C}$ holomorph. Denn: Jeder Wert von D' wird nur einmal angenommen, muss also von 1. Ordnung angenommen werden (d.h. $\mathrm{Ord}_{f-w}(z) = 1$, wenn $z = f^{-1}(w)$). Also kann Satz 4.29 in jedem Punkt angewendet werden.

(iii) Die Regularitätsaussage für die Inverse ist falsch in der reellen Analysis: $f(x) = x^3$ ist bijektiv und differenzierbar, aber $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ ist nicht differenzierbar in der 0.

(iv) Kriterium für globale Injektivität von $f : D \to \mathbb{C}$: Wir stellen folgende geometrische Forderung an D: Es existiere eine Konstante $C = C(D)$, so dass es $\forall\, z, z' \in D$ einen Weg $\Gamma = \Gamma(z, z')$ in D von z nach z' mit $|\Gamma(z, z')| \leq C(D) \cdot |z - z'|$ gibt. (Beispiel: Für ein Ringgebiet ist $C = 2\pi$). Wenn nun auch noch

$$\sup_{z\in D} |f'(z) - 1| \;\;\leq\;\; \frac{1}{C(D)}$$

gilt, dann ist f injektiv auf D.

Begründung: Seien $z \neq z'$ und Γ wie oben ein Weg von z nach z'. Dann ist nach Cauchy's Theorem

$$f(z') - f(z) \;\;=\;\; \int_\Gamma f'(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int_\Gamma d\zeta (f'(\zeta) - 1) + \int_\Gamma d\zeta\,.$$

Also:

$$|f(z') - f(z)| \;\geq\; |z - z'| - |\Gamma| \cdot \sup_{\zeta\in D} |f'(\zeta) - 1| \;\geq\; |z - z'| - |\Gamma| \frac{1}{C(D)} \;>\; 0\,.$$

Dies impliziert Injektivität. ◇

5 Konstruktion analytischer Funktionen

5.1 Der Weierstraßsche Produktsatz

Die zum Weierstraßschen Produktsatz hinführende Fragestellung ist die folgende: Gegeben eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ohne Häufungspunkt und eine weitere Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen, kann man eine ganze Funktion f konstruieren, die z_n als Nullstellen der Ordnung k_n hat?

Eine erste Antwort ist die folgende: Wenn die Folgen endlich sind, so erfüllt

$$f(z) \;=\; \exp(g(z))\prod_{k=1}^{N}(z-z_n)^{k_n}$$

das gewünschte, wobei ist die Wahl des Argumentes g der Exponentialfunktion einigermaßen willkürlich ist und gewährleisten soll, dass $g(z)$ keine weiteren Nullstellen beiträgt.

Falls die Folgen nicht endlich sind, benötigt man ein unendliches Produkt und muss dessen Konvergenz definieren.

Definition 5.1 (Weierstraß-Konvergenz für Produkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}$ und N so groß, dass $|a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Falls

$$\sum_{n\geq N} |\mathrm{Log}[1+a_n]| \;<\; \infty\,, \tag{4}$$

wobei $\mathrm{Log}[\cdot]$ der Hauptwert des Logarithmus ist, definiert man als konvergentes unendliches Produkt:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \;=\; \left(\prod_{n=1}^{N-1}(1+a_n)\right)\exp\left(\sum_{n\geq N}\mathrm{Log}[1+a_n]\right)\,.$$

Bemerkung.

(i) Wegen

$$\frac{1}{2}|a| \leq |\mathrm{Log}[1+a]| \leq 2|a|\,, \quad \text{wenn } |a| \leq \frac{1}{2}$$

kann man die Forderung (4) äquivalent ersetzen durch

$$\sum_{n\geq N} |a_n| \;<\; \infty\,,$$

was wiederum äquivalent zur absoluten Konvergenz der Zahlenreihe $\sum_{n\geq 1} a_n$ ist.

(ii) Nach der Definition gilt für ein konvergentes Produkt im obigen Sinne

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, n \;<\; N \text{ so dass } a_n = -1\\ &\Longleftrightarrow \quad \text{mindestens ein Faktor ist } 0\end{aligned}$$

sowie

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) \neq 0 \iff a_n \neq -1 \text{ für alle } n \geq 1\,.$$

(iii) Es gilt

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \;=\; \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N!} \;=\; 0\,,$$

ohne dass ein Faktor gleich 0 ist. Aber dieses Produkt konvergiert nicht im Sinne von Definition 5.1, da die Folgenglieder

$$a_k \;=\; \frac{1}{k} - 1$$

nicht summierbar sind. ◇

Satz 5.2. *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen für $n \geq 1$. Nehme an, dass die Partialsummen*

$$\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)_{N\geq 1} \tag{5}$$

normal konvergieren auf D, d.h. gleichmäßig absolut konvergieren auf jeder kompakten Teilmengen vom D. Dann ist

$$F(z) \;=\; \prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z)) \tag{6}$$

wohldefiniert im Sinne von Definition 5.1 und hat folgende Eigenschaften:

(i) *F ist holomorph auf D.*

(ii) *Das Urbild der 0*

$$F^{-1}(\{0\}) \;=\; \{z \in D \;:\; F(z) \;=\; 0\}$$

erfüllt

$$F^{-1}(\{0\}) \;=\; \bigcup_{n\geq 1} f_n^{-1}(\{-1\})\,.$$

(iii) *Falls $F \not\equiv 0$, so gilt*

$$\frac{F'(z)}{F(z)} \;=\; \sum_{n\geq 1} \frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}\,.$$

Beweis. Die (punktweise) Wohldefiniertheit von (6) folgt aus obiger Bemerkung.

(i) Sei nun eine kompakte Menge K gegeben. Wähle N beliebig, so dass gilt

$$\sup_{z\in K} \sum_{n\geq N} |f_n(z)| \;<\; \frac{1}{2}\,.$$

Dies ist möglich aufgrund der normalen Konvergenz der Funktionenreihe (5). Für $M > N$ ist dann (verwende Bemerkung (i))

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}\left|\sum_{n=N}^{M}\operatorname{Log}[1+f_n(z)]-\sum_{n=N}^{\infty}\operatorname{Log}[1+f_n(z)]\right| &\leq \sup_{z\in K}\sum_{k=M+1}^{\infty}\left|\operatorname{Log}[1+f_n(z)]\right| \\ &\leq \sup_{z\in K}\sum_{k=M+1}^{\infty}2\left|f_n(z)\right|\,,\end{aligned}$$

und dies geht gegen 0 für $M\to\infty$. Es liegt also normale Konvergenz der Partialsummen

$$\left(\sum_{n=N}^{M}\operatorname{Log}[1+f_n(z)]\right)_{M\geq N}$$

vor. Wegen (auf K bzw. dessen Bild unter einer stetigen Abbildung) gleichmäßiger Stetigkeit der Exponentialfunktion liegt sogar normale Konvergenz der Funktionen

$$g_M(z) \;=\; \exp\left(\sum_{n=N}^{M}\operatorname{Log}[1+f_n(z)]\right)$$

vor. Nach dem Satz von Weierstraß (Satz 1.31) ist die Grenzfunktion F_N holomorph auf D. Daher ist auch

$$F(z) \;=\; \left(\prod_{n=1}^{N-1}(1+f_n(z))\right)F_N(z)$$

als endliches Produkt holomorpher Funktionen holomorph.

(ii) Dies folgt aus Bemerkung (ii).

(iii) Wegen dem (anderen) Satz von Weierstraß (Satz 3.19) darf man gliedweise ableiten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}F_N(z) &= \frac{d}{dz}\exp\left(\sum_{n=N}^{\infty}\operatorname{Log}[1+f_n(z)]\right) \\ &= F_N(z)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f_n'(z)}{1+f_n(z)}\,.\end{aligned}$$

Die Produktregel beendet dann den Beweis. □

Also Vorbereitung für den Weierstraßschen Produktsatz benötigen wir das folgende

Lemma 5.3. *Die sogenannten Elementarfaktoren*

$$E_0(z) \;=\; 1-z$$

und

$$E_p(z) \;=\; (1-z)\exp\left(z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^p}{p}\right)\,,\quad p\geq 1\,,$$

erfüllen

$$|1-E_p(z)|\leq|z|^{p+1}\qquad \textit{für } |z| \;<\; 1\,.$$

Beweis. Dies ist klar für $p = 0$. Für $p \geq 1$ gilt für die Ableitung

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= \left[(1-z)(z + z^2 + ... + z^{p-1}) - 1\right] \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right) \\ &= -z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right) . \end{aligned}$$

Somit hat E_p' eine Nullstelle der Ordnung p bei 0 und zudem

$$E_p'(z) \; = \; -\sum_{n\geq 0} a_n z^{n+p}$$

mit $a_n \geq 0$ und $a_0 = 1$. Da $E_p(0) = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} 1 - E_p(z) &= -\int_{[0,\,z]} dw\, E_p'(w) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \int_{[0,\,z]} dw\, w^{n+p} \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \, \frac{1}{n+p+1} \, z^{n+p+1} . \end{aligned}$$

Somit gilt für $|z| \leq 1$ (was insbesondere $|z^n| \leq 1$ impliziert):

$$\begin{aligned} |1 - E_p(z)| &\leq |z|^{p+1} \sum_{n\geq 0} a_n \, \frac{1}{n+p+1} \\ &= |z|^{p+1} \int_{[0,\,1]} dw(-E_p'(w)) \\ &= |z|^{p+1}(1 - E_p(1)) \\ &= |z|^{p+1} , \end{aligned}$$

da $E_p(1) = 0$. □

Satz 5.4. *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ohne Häufungspunkt (also $|z_n| \to \infty$, denn wäre der* $\liminf$ *endlich, so gäbe es eine beschränkte Teilfolge, die nach Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt besäße). Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen, so dass für alle $R > 0$*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{p_n+1} \; < \; \infty .$$

(Dies ist immer erfüllt, wenn $p_n \geq n-1$, da dann die geometrische Reihe ab einem gewissen $n_0(R)$ als Majorante verwendet werden kann.) Sei $k_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$F(z) \; = \; z^{k_0} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

ein konvergentes unendliches Produkt, welches eine ganze Funktion F definiert mit genau folgenden Nullstellen

$$\mathrm{Ord}_F(0) \;=\; k_0\,, \quad \mathrm{Ord}_F(z_n) \;=\; \#\{l \in \mathbb{N} \;:\; z_l = z_n\}\,.$$

Beweis. Für festes R gibt es ein N, so dass

$$\frac{R}{|z_n|} \;<\; \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } n \geq N$$

gilt. Die Folge

$$F_N(z) \;=\; \prod_{n\geq N} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \;=\; \prod_{n\geq N}\left(1-\left(1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right)\right)$$

konvergiert nach Theorem 5.2 uniform auf dem Kompaktum $\overline{B_R(0)}$, weil nach Lemma 5.3

$$\sum_{n\geq N}\left|1-E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \;\leq\; \sum_{n\geq N}\left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} \;\leq\; \sum_{n\geq N}\left|\frac{1}{2}\right|^{p_n+1} \;<\; \infty\,,$$

uniform in z. Da R beliebig ist, folgt dass

$$F(z) \;=\; z^{k_0}\prod_{k=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

eine ganze Funktion ist. F hat nach Bemerkung (ii) und wegen der Darstellung

$$E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \;=\; (z_n - z)\frac{1}{z_n}\exp\left(\frac{z}{z_n}+\frac{1}{2}(\frac{z}{z_n})^2+\ldots+\frac{1}{p}(\frac{z}{z_n})^p\right)$$

genau die angegebenen Nullstellen. □

Satz 5.5 (Weierstraß'scher Produktsatz)**.** *Sei f eine ganze Funktion mit Nullstellen $(z_n)_{n\geq 1}$, $z_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aufgelistet mit ihrer Ordnung, und $\mathrm{Ord}_f(0) = k_0 \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Folge $(p_n)_{n\geq 1}$ und eine ganze Funktion g, so dass*

$$f(z) \;=\; e^{g(z)}z^{k_0}\prod_{k=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\,.$$

(*Diese Faktorisierung ist wegen der Wahl der p_n nicht eindeutig.*)

Beweis. Die Funktion

$$F(z) \;=\; z^{k_0}\prod_{k=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

ist bei geeigneter Wahl der p_n (z.B. $p_n \equiv n-1$) nach Satz 5.4 ganz und hat dieselben Nullstellen wie f mit den gleichen Ordnungen. Somit ist f/F eine Funktion mit hebbaren Singularitäten, kann also als ganze Funktion G aufgefasst werden. Außerdem hat G keine Nullstellen. Dies impliziert

$$\frac{G'}{G}(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} a_n\, z^n$$

ist eine ganze Funktion. Daher gibt es eine ganze Funktion

$$g(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

so dass $g' = G'/G$. Schließlich folgt

$$(e^{-g}G)' \;=\; -g'Ge^{-g} + e^{-g}G' \;=\; 0$$

und folglich $e^{-g}G = C = \text{const}$, also $G = C \cdot e^g$, d.h. $f = C \cdot e^g F$. □

Wir verallgemeinern nun Satz 5.4. Es sei daran erinnert, dass $\overline{\mathbb{C}} \cong \mathbb{S}^2$ die Riemann'sche Zahlenkugel ist.

Satz 5.6. *Sei $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ offen, $D \neq \overline{\mathbb{C}}$. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in D ohne Häufungspunkt in D (wohl aber auf dem Rand $\partial D \subset \overline{\mathbb{C}}$). Dann gibt es eine holomorphe Funktion*

$$F : D \to \mathbb{C}$$

mit

$$\mathrm{Ord}_F\,(z_n) \;=\; \#\{l \,:\, z_l = z_n\} \;\geq\; 1$$

und keinen weiteren Nullstellen.

Beweis. Nach Möbiustransformation darf man annehmen, dass $\infty \in D$ sowie $z_n \neq \infty$ für alle n. Zu z_n wähle unter Verwendung der Kompaktheit von $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ (als abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge) ein (nicht eindeutiges)

$$\zeta_n \;\in\; \partial D \;\subset\; \overline{\mathbb{C}} \setminus D$$

mit

$$|\zeta_n - z_n| \;\leq\; |\zeta - z_n| \quad \text{für alle } \zeta \in \overline{\mathbb{C}} \setminus D\,.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\zeta_n - z_n| \;=\; 0\,,$$

denn andernfalls hätte $(z_n)_{n\geq 1}$ einen Häufungspunkt in D. Setze

$$F(z) \;=\; \prod_{n\geq 1} E_n\left(\frac{z_n - \zeta_n}{z - \zeta_n}\right)\,.$$

Der $n$te Faktor verschwindet genau bei $z = z_n$ und ist holomorph auf D. Es bleibt also zu zeigen, dass das unendliche Produkt auf jedem Kompaktum $K \subset D$ uniform konvergiert. Setze

$$R \;=\; \mathrm{dist}(\overline{\mathbb{C}} \setminus D, K)\,.$$

Dies ist als Abstand zweier disjunkter Kompakta wohldefiniert und positiv. Wähle N so dass

$$|z_n - \zeta_n| \;\leq\; \frac{R}{2}\,, \qquad \forall\; n \geq N\,.$$

Dann gilt nach Lemma 5.3 dass für $z \in K$ und $n \geq N$

$$\left|1 - E_n\left(\frac{z_n - \zeta_n}{z - \zeta_n}\right)\right| \;\leq\; \frac{|z_n - \zeta_n|^n}{|z - \zeta_n|^n} \;\leq\; \frac{(\frac{R}{2})^n}{R^n} \;=\; \frac{1}{2^n}\,.$$

Somit ist

$$\sum_{n\geq 1}\left(1 - E_n\left(\frac{z_n - \zeta_n}{z - \zeta_n}\right)\right)$$

normal konvergent auf D und es folgt nach Satz 5.2, dass F holomorph auf D ist und die gewünschten Eigenschaften hat. □

Satz 5.7 (Satz von Mittag-Leffler)**.** *Jede meromorphe Funktion f auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist Quotient zweier holomorpher Funktionen g, h auf D:*

$$f \;=\; \frac{g}{h}\,.$$

Beweis. Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Pole von f, jeweils auftretend mit ihrer endlichen Multiplizität (endlich, da keine wesentlichen Singularitäten vorliegen). Sei

$$h : D \to \mathbb{C}$$

die in Satz 5.4 gewonnene Funktion, die die z_n als Nullstellen hat. h hat also bei einem Pol z von f der Ordnung $-k$ eine Nullstelle der Ordnung k, und h hat keine weitere Nullstelle. Setze

$$g \;=\; fh\,.$$

Dann hat g hebbare Singularitäten, kann also als auf D holomorphe Funktion angesehen werden. Dies liefert den Quotienten. □

Beispiel 5.8 (Produktdarstellung des Sinus)**.** Betrachte die ganze Funktion

$$f(z) \;=\; \sin(\pi z)$$

mit Nullstellen (erster Ordnung) $z_n = n$ wobei $n \in \mathbb{Z}$. Wir müssen für Satz 5.4 überprüfen, dass für alle $R > 0$ und geeignete p_n

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\frac{R}{|z_n|}\right)^{p_n+1} \;<\; \infty$$

gilt. Dies folgt für $p_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$, aus der Abschätzung

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} \;<\; \infty\,. \tag{7}$$

Somit:

$$\begin{aligned}\sin(\pi z) &= e^{g(z)} z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} E_1\left(\frac{z}{z_n}\right)\\ &= e^{g(z)} z \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z}{n}\right)\left(1+\frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} e^{-\frac{z}{n}}\\ &= e^{g(z)} z \prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

(Letzteres Produkt konvergiert tatsächlich wegen (7).) Noch zu bestimmen ist die ganze Funktion g. Zunächst gilt

$$\mathrm{Log}[\sin(\pi z)] = g(z) + \mathrm{Log}[z] + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left(\mathrm{Log}[1-\frac{z}{n}] + \frac{z}{n}\right) \tag{8}$$

Ableiten liefert

$$\pi\,\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} = g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\left[\frac{1}{(1-\frac{z}{n})}\left(-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n}\right].$$

Nochmaliges Ableiten liefert

$$g''(z) = -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(z-n)^2}.$$

Es lässt sich direkt nachrechnen, dass beide Summanden 1-periodisch sind und der Funktionalgleichung

$$\phi(z) = \frac{1}{4}\left(\phi\left(\frac{z}{2}\right) + \phi\left(\frac{z+1}{2}\right)\right)$$

genügen. Da diese Gleichung linear ist, ist auch g'' 1-periodisch und erfüllt diese Funktionalgleichung. Setze

$$M = \max_{\substack{0\leq \Re e(z)\leq 1\\ -\frac{1}{2}\leq \Im m(z)\leq \frac{1}{2}}} |g''(z)|.$$

Da g und somit auch g'' ganze Funktionen sind, folgt $M<\infty$. Sei z^* der Punkt in diesem (kompakten) Rechteck, wo das Maximum angenommen wird. Wegen der gewonnenen Eigenschaften von g'' folgt

$$M = \phi(z^*) = \frac{1}{4}\left(\phi\left(\frac{z^*}{2}\right) + \phi\left(\frac{z^*+1}{2}\right)\right) \leq \frac{1}{4}(M+M) = \frac{1}{2}M,$$

also $M=0$. Dies impliziert

$$g(z) = az + b$$

für noch zu bestimmende Konstanten a, b, und aus (8) folgt sofort (entwickle beide Seiten um den Nullpunkt und ignoriere $O(z^2)$-Terme), dass $a = 0$ und $b = \mathrm{Log}[\pi]$. Zusammenfassend gilt also

$$\sin(\pi z) \;=\; \pi z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Dies ist die Produktdarstellung des Sinus. ◇

5.2 Partialbruchzerlegung nach Mittag-Leffler

Die Fragestellung in diesem kurzen Paragraphen ist die folgende: Gegeben eine Folge von Polen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $z_n \neq z_m$ für $m \neq n$ und ohne Häufungspunkt, und jeweils zugehörigen endlichen Hauptteilen $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Erinnerung: der Hauptteil ist die negativ indizierte Teilreihe der Laurent-Entwicklung und, wenn diese abbricht, liegt keine wesentliche Singularität vor), gibt es eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit genau diesen Polen und Hauptteilen?

Falls lediglich endlich viele Pole betrachtet werden, ist

$$f \;=\; \sum_{n=1}^{N} h_n + g$$

offensichtlich eine Lösung dieses Problems, wobei g eine beliebige ganze Funktion ist.

Satz 5.9 (Mittag-Leffler 1877). *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkt ohne Häufungspunkt. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge endlicher Hauptteile, d.h.*

$$h_n(z) \;=\; \sum_{l=1}^{k_n} a_{-l}^{(n)} \frac{1}{(z-z_n)^l}\,, \qquad k_n \;=\; \mathrm{Ord}_{h_n}(z_n) \;<\; \infty\,.$$

Dann existiert eine Folge von Polynomen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$f(z) \;=\; \sum_{n\geq 1}(h_n(z) - P_n(z))$$

kompakt konvergent ist auf $\mathbb{C}\setminus\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ und definiert eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$, welche Pole bei z_n mit Hauptteil h_n hat und keinen weiteren Pol. Jede andere meromorphe Funktion F mit diesen Eigenschaften ist von der Gestalt

$$F \;=\; f + g$$

mit einer ganzen Funktion g.

Beweis. Die Eindeutigkeit modulo einer ganzen Funktion ist klar, da $F - f$ dann nur hebbare Singularitäten hat. Sei nun o.B.d.A. $z_n \neq 0$ für alle n (ansonsten betrachte zuerst $f - h_{z^*}$, wenn $z^* = 0$). Die Punkte z_n seien des Weiteren betragsmäßig aufsteigend geordnet. Für jedes n betrachte die Potenzreihenentwicklung von h_n um 0:

$$h_n(z) \;=\; \sum_{l\geq 0} b_l^{(n)} z^l\,, \qquad \text{für } |z| < |z_n|\,.$$

Da h_n holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{z_n\}$, konvergiert diese Reihe für $|z| < |z_n|$. Diese Konvergenz ist uniform auf jedem Kompaktum, z.B. für $|z| \leq \frac{1}{2}|z_n|$. Wähle L_n, so dass das Polynom

$$P_n(z) \;=\; \sum_{l=0}^{L_n} b_l^{(n)} z^l$$

erfüllt

$$|h_n(z) - P_n(z)| \;\leq\; \frac{1}{n^2} \qquad \text{für alle } |z| \leq \frac{1}{2}|z_n|\,.$$

Da die Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ keinen Häufungspunkt hat, gilt $|z_n| \to \infty$. Für gegebenes Kompaktum K existiert also ein N, so dass

$$B_{\frac{1}{2}|z_n|}(0) \;\supset\; K \qquad \text{für alle } n \geq N\,.$$

Also für $z \in K$,

$$\sum_{n\geq N} |h_n(z) - P_n(z)| \;\leq\; \sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2} \;<\; \infty\,,$$

so dass die Reihe nach dem Weierstraß'schen M-Test (Satz 1.31) uniform auf K konvergiert. Dies ist gerade die kompakte Konvergenz von f. □

Bemerkung.

(i) Man kann auch wesentliche Singularitäten zulassen.

(ii) Der Satz gilt auch für beliebige Gebiete D (verlange dann, dass $(z_n)_{n\geq 1}$ keinen Häufungspunkt in D hat).

(iii) Der Weierstraß'sche Produktsatz kann auch aus dem Satz von Mittag-Leffler hergeleitet werden. ◇

Beispiel 5.10. Sei

$$f(z) \;=\; \pi\cot(\pi z) \;=\; \pi\,\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}\,.$$

Diese Funktion hat Pole erster Ordnung bei allen $n \in \mathbb{Z}$. Der Hauptteil bei $z_n = n$ ist

$$h_n(z) \;=\; \frac{1}{z-n}\,.$$

Wähle $P_n(z) = -\frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Nach Satz 5.9 existiert eine ganze Funktion g, so dass

$$f(z) \;=\; g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} - \big(-\frac{1}{n}\big)\right)\,. \tag{9}$$

Die Summe konvergiert für gegebenes z, da

$$\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} = \frac{z}{(z-n)n} = O(n^{-2}) \qquad \text{für } n > |z|\,.$$

Bestimmung von g: Leite (9) ab:

$$\frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = g'(z) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Das gleiche Argument wie bei obiger Betrachtung des sin (Beispiel 5.8) führt zu $g'(z) = 0$. Also ist

$$g(z) = C = \text{const}\,,$$

und da f eine ungerade Funktion ist ($f(-z) = -f(z)$), folgt sogar $g(z) = 0$. Somit ist

$$\pi\cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right).$$

Dies ist die Summendarstellung des Kotangens. ◇

5.3 Der Riemannsche Abbildungssatz*

* Lediglich die Aussage des Riemannschen Abbildungssatzes ist Teil des Stoffes der zweistündigen Veranstaltung, nicht aber der Beweis.

Satz 5.11 (Riemannsche Abbildungssatz, Habilitationsschrift 1851)**.** *Sei $D \neq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet und*

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1\}\,.$$

Dann gilt folgendes:

(i) *Es existiert eine bijektive und holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{D}$ (also biholomorph nach Theorem 4.29). Man sagt: D und $\mathbb{D}$ sind konforme Gebiete.*

(ii) *Zu $z_0 \in D$ kann f so gewählt werden, dass*

$$f(z_0) = 0\,, \quad f'(z_0) \in \mathbb{R} \quad \textit{und} \quad f'(z_0) > 0\,.$$

(iii) *Die Abbildung f ist dann durch* (i) *und* (ii) *eindeutig bestimmt.*

Beispiel 5.12. Satz 2.35 zeigt, dass im Falle von der oberen Halbebene $D = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im m(z) > 0\}$ eine biholomorophe Abbildung durch eine Möbius Transformation gegeben ist, welche auch die Cayley Transformation genannt wird.

Bemerkung.

(i) Nach dem Satz von Liouville ist die Bedingung $D \neq \mathbb{C}$ notwendig, denn f ist ja beschränkt und müsste dann also konstant sein, kann also insbesondere nicht bijektiv sein.

(ii) Das Ergebnis ist überraschend, da D z.B. einen komplizierten Rand haben kann; und eine holomorphe Abbidlung ja schon durch eine lokale Potenzreihe festgelegt ist. $\diamond$

Korollar 5.13. *Das Gebiet D ist homotop einfach zusammenhängend genau dann wenn es homolog einfach zusammenhängend ist.*

Beweis. ,,$\Longrightarrow$“: Dies folgt nach der Cauchy-Formel.
,,$\Longleftarrow$“: $f : D \to \mathbb{D}$ ist insbesondere bistetig, und ,,homotop einfach zusammenhängend“ ist eine topologische Invariante. $\square$

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 5.11. Als topologische Vorbereitung werden diverse Kompaktheitsargumente in Funktionenräumen benötigt.

Definition 5.14. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $C(X) = C(X, \mathbb{C})$ die Menge der stetigen $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen auf X.

(i) Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X)$ heißt *punktweise beschränkt*, wenn für alle $x \in X$ es eine Konstante $M(x) < \infty$ gibt, so dass

$$|f(x)| \;\leq\; M(x) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{F}\,.$$

(ii) Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X)$ heißt *gleichgradig stetig* auf X, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$d(x, y) \;<\; \delta \quad \text{bereits} \quad |f(x) - f(y)| \;<\; \epsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}$$

impliziert.

Bemerkung. Wenn (ii) gilt, so ist insbesondere jedes $f \in \mathcal{F}$ gleichmäßig stetig auf X. $\diamond$

Satz 5.15 (Arzela-Ascoli)**.** *Nehme an, dass (X, d) separabel ist, also eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Sei $\mathcal{F} \subset C(X)$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig auf X. Dann besitzt jede Funktionenfolge in $\mathcal{F}$ eine auf X kompakt konvergente Teilfolge (d.h. diese Teilfolge konvergiert uniform auf jeder kompakten Teilmenge von X).*

Bemerkung.

(i) Für $X = \mathbb{C}$ kann man als abzählbare dichte Teilmenge z.B.

$$\{x + iy \,:\, x, y \in \mathbb{Q}\}$$

wählen.

(ii) Im allgemeinen muss die Limesfunktion einer Teilfolge nicht in $\mathcal{F}$ liegen, es sei denn $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen in $(C(X), ||\cdot||_\infty)$. Immer jedoch liegt die Limesfunktion in $C(X)$. $\diamond$

Beweis. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Auflistung der dichten Teilmenge und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}$. Konstruiere iterativ Teilmengen

$$S_{k+1} \subset S_k \subset S_{k-1} \subset ... \subset \mathbb{N}$$

wie folgt: Die Menge

$$\{f_n(x_k) \ : \ n \in S_{k-1}\} \subset \overline{B_{M(x_k)}(0)}$$

ist nach Voraussetzung beschränkt. Sie hat also eine konvergente Teilfolge, deren Indexmenge man als S_k wählt. Sei m_k das k^{te} Element von S_k (bzgl der Ordnung von $\mathbb{N}$). So erhält man die Diagonalfolge

$$S = (m_k)_{k\geq 1}\,.$$

Beachte: Für jedes k sind höchstens $k-1$ Elemente von $(m_k)_{k\geq 1}$ nicht in S_k. Daraus folgert man:

$$\lim_{l\to\infty} f_{m_l}(x_k) \qquad \text{existiert für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Wir behaupten: wenn $K \subset X$ kompakt ist, so ist

$$(f_{m_l})_{l\geq 1} \quad \text{Cauchy-Folge in } (C(K),\, ||\cdot||_\infty)\,.$$

Nach Satz 1.25 ist dann (f_{m_l}) uniform konvergent auf K, und der Grenzwert ist eine stetige Funktion.

Beweis der Behauptung: Sei $\epsilon > 0$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$d(x,\, y) \ < \ \delta \quad \text{impliziert} \quad |f_n(x) - f_n(y)| \ < \ \epsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Überdecke das gegebene Kompaktum K mit endlich vielen offenen Kugeln $B_1, \ldots, B_J$ mit Radius $\delta/2$. Für jedes $j = 1, \ldots, J$ wähle m_j, so dass

$$x_{m_j} \in B_j\,.$$

Da

$$\lim_{l\to\infty} f_{m_l}(x_{m_j})$$

existiert für alle j, wähle L so dass

$$|f_{m_l}(x_{m_j}) - f_{m_{l'}}(x_{m_j})| \ < \ \epsilon \qquad \text{für alle } l,\, l' \geq L,\, j = 1...J\,.$$

Für jedes $x \in K$ wähle j so dass $x \in B_j$. Dann ist $d(x,\, x_{m_j}) < \delta$. Also für $l,\, l' \geq L$:

$$|f_{m_l}(x) - f_{m_{l'}}(x)| \ \leq \ |f_{m_l}(x) - f_{m_l}(x_{m_j})| \, + \, |f_{m_l}(x_{m_j}) - f_{m_{l'}}(x_{m_j})| \, + \, |f_{m_{l'}}(x_{m_j}) - f_{m_{l'}}(x)|\,,$$

was also kleiner als 3ϵ ist. Da dies unabhängig von $x \in K$ ist, folgt die Behauptung. □

Wir benötigen folgende Verschärfung des Begriffes der punktweisen Beschränktheit (wenn dieser neue Begriff als Voraussetzung von Arzelo-Ascoli verwendet wird, ist der Beweis etwas einfacher).

Definition 5.16. Eine Familie $\mathcal{F} \subset C(X)$ heißt lokal beschränkt, wenn es für alle $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ und ein $M < \infty$ gibt mit

$$|f(y)| \leq M \quad \text{für alle } y \in B_\epsilon(x)\,, f \in \mathcal{F}\,.$$

Bemerkung. Eine äquivalente Definition ist die folgende: Für alle kompakten Mengen $K \subset X$ gibt es ein $M < \infty$, so dass

$$|f(y)| < M \quad \text{für alle } y \in K\,, f \in \mathcal{F}\,.$$

Beachte außerdem, dass lokale Beschränktheit punktweise Beschränktheit impliziert. ◇

Satz 5.17 (Satz von Montel 1912)**.** *Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\mathcal{F} \subset O(D)$ eine Familie holomorpher Funktionen. Dann ist $\mathcal{F}$ genau dann lokal beschränkt, wenn jede Folge in $\mathcal{F}$ eine auf D kompakt konvergente Teilfolge besitzt.* (*Man sagt dann, $\mathcal{F}$ ist eine* normale *Familie.*)

Bemerkung. Nach dem Satz von Weierstraß (Theorem 3.19) konvergiert die Teilfolge gegen eine auf D holomorphe Funktion, welche jedoch nicht notwendigerweise in $\mathcal{F}$ liegt. ◇

Beweis. „$\Longrightarrow$“. Sei $K \subset D$ kompakt, und

$$r = \operatorname{dist}(K, D^c) > 0\,.$$

Setze

$$K' = \left\{ z \,:\, \operatorname{dist}(z, K) < \frac{2}{3} r \right\}.$$

Dann gilt

$$K \subset K' \subset D\,.$$

Wähle $M < \infty$ so dass

$$|f(z)| \leq M \quad \text{für alle } z \in K' \text{ und alle } f \in \mathcal{F}\,.$$

Halte nun ein solches f fest. Für z_0, $z_1 \in K$ mit

$$|z_0 - z_1| \leq \frac{r}{3}$$

gilt nach der Cauchy'schen Integralformel

$$\begin{aligned} f(z_1) - f(z_0) &= \int_{\partial B_{\frac{2}{3}r}(z_0)} \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{f(w)}{w - z_1} - \frac{f(w)}{w - z_0} \right) \\ &= \int_{\partial B_{\frac{2}{3}r}(z_0)} \frac{dw}{2\pi i} \left(\frac{f(w)(z_1 - z_0)}{(w - z_1)(w - z_0)} \right). \end{aligned}$$

Also

$$|f(z_1) - f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} |z_1 - z_0| M \, 2\pi \, \frac{2}{3} r \, \frac{1}{(r/3)^2} \leq \frac{6M|z_1 - z_0|}{r}\,.$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Für

$$|z_1 - z_0| \;<\; \delta \;=\; \min\left\{\frac{r}{3}, \frac{\epsilon r}{6M}\right\}$$

gilt also

$$|f(z_1) - f(z_0)| \;<\; \epsilon\,.$$

Da f beliebig war, gilt dies uniform in $f \in \mathcal{F}$. Also ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig auf K und der Satz von Montel folgt aus dem Satz von Arzela-Ascoli.

„$\Longleftarrow$“: Diese Richtung werden wir nicht verwenden und sei als Übungsaufgabe gestellt. $\square$

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zum

Beweis von Theorem 5.11. Wir zeigen zunächst (ii) und (iii) gegeben (i)

Zu (ii): Nach Satz 2.36 und Satz 3.30 sind die Automorphismen von $\mathbb{D}$ genau die Möbiustransformationen der Gestalt

$$M(z) \;=\; \frac{\alpha z + \beta}{\overline{\beta} z + \overline{\alpha}}\,, \qquad |\alpha|^2 - |\beta|^2 \;=\; 1\,.$$

Diese bilden transitive Operationen auf $\mathbb{D}$, also kann jeder Punkt nach 0 verschoben werden. Fixgruppe von 0 (d.h. die Menge der Abbildungen, die 0 invariant lassen) sind die Drehungen

$$R \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}\,, \quad |\alpha| = 1\,.$$

Folglich lässt sich die gesuchte Abbildung zusammensetzen wie folgt, wobei f die in Teil (i) gewonnene Funktion ist:

$$R \circ T \circ f\,.$$

Hier verschiebt T den Nullpunkt auf z_0 und R dreht die Abbildung so, dass die Ableitung reell und positiv wird.

Zu (iii): Beide Abbildungen R und T sind eindeutig festgelegt durch die gegebenen Forderungen.

Wir zeigen nun die erste Behauptung (i). Betrachte die Familie

$$\mathcal{F} \;=\; \{f : D \to \mathbb{D} \text{ holomorph, injektiv, } f(z_0) = 0,\ f'(z_0) > 0\}\,.$$

Wir möchten zuerst zeigen, dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ist. Wir benötigen folgendes Lemma:

Lemma 5.18 (das holomorphe Wurzellemma)**.** *Sei D homolog einfach zusammenhängend, und*

$$F : D \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

holomorph ohne Nullstelle. Dann existiert eine Funktion $\phi : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\phi^2 = F$. Wir schreiben dann $\phi = \sqrt{F} = s \circ F$, wobei s für square root *steht.*

Beweis des Lemmas. Die Abbildung

$$D \ni z \mapsto \frac{F'(z)}{F(z)}$$

ist nach Voraussetzung holomorph. Wähle $z_0 \in D$. Der Cauchysche Integralsatz für D in seiner Homologieversion liefert

$$L(z) = \int_{\Gamma(z_0,\, z)} dw\, \frac{F'(w)}{F(w)}\,,$$

unabhängig von der Wahl des Weges $\Gamma(z_0,\, z)$ in D von z_0 nach z. Es gilt nach Satz 3.8:

$$L(z_0) = 0\,, \quad L'(z) = \frac{F'(z)}{F(z)}\,,$$

und L ist holomorph auf D. Setze

$$\phi(z) = \sqrt{F(z_0)}\, \exp\left(\frac{1}{2} L(z)\right)\,,$$

wobei $\sqrt{\cdot}$ beliebige Wahl der Wurzel ist. Dies erfüllt das gewünschte, weil

$$\phi(z_0)^2 = F(z_0), \qquad \phi'(z) = \phi(z)\,\frac{1}{2}\,L'(z)$$

und

$$\left(\phi(z)^2 \frac{1}{F(z)}\right)' = 2\phi(z)\left[\phi(z)\,\frac{1}{2}\,L'(z)\right]\frac{1}{F(z)} - \phi(z)^2 \frac{F'(z)}{(F(z))^2} = 0\,.$$

□

Wir können nun zeigen, dass $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ist. Wähle $z_1 \notin D$. Dann hat $F(z) = z - z_1$ keine Nullstelle und es gibt nach obigem Lemma ein holomorphes $\phi : D \to \mathbb{C}$ mit $\phi(z)^2 = z - z_1$. Die Abbildung ϕ ist injektiv, da

$$\phi(z_2) = \phi(z_3) \quad \text{impliziert nach Quadrierung} \quad z_2 - z_1 = z_3 - z_1\,, \quad \text{also} \quad z_2 = z_3\,.$$

Zudem gibt es keine $z_2,\, z_3 \in D$ mit $\phi(z_2) = -\phi(z_3)$ nach dem gleichen Argument. Da ϕ eine offene Abbildung ist, existiert $B_r(a) \subset \phi(D)$ (natürlich $r < |a|$, da $0 \notin \phi(D)$). Nach obigem gilt dann

$$B_r(-a) \cap \phi(D) = \emptyset\,.$$

Also ist

$$g(z) = \frac{r}{\phi(z) + a} \quad \text{holomorph und injektiv,}$$

und $|g(z)| < 1$ für alle $z \in D$, also sogar $g : D \to \mathbb{D}$. Mit geeigneter Möbiustransformation folgt, dass $\mathcal{F}$ nicht leer ist.

Es bleibt zu zeigen, dass es ein surjektives Element in $\mathcal{F}$ gibt. Wir benötigen die folgende Behauptung:

Behauptung. Wenn $f \in \mathcal{F}$ nicht surjektiv ist, folgt, dass es eine Funktion $F \in \mathcal{F}$ gibt mit

$$f'(z_0) \; < \; F'(z_0) \, .$$

Beweis der Behauptung. Nach Annahme gibt es ein $\alpha \in \mathbb{D} \setminus f(D)$. Die Abbildung

$$M_\alpha \circ f \; : \; D \; \to \; \mathbb{D}$$

hat also keine Nullstelle, wobei M_α die Möbiustransformation zu

$$\begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ -\overline{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Dies liegt an der Injektivität von M_α und an den Identitäten

$$M_\alpha(z) \; = \; \frac{z - \alpha}{-\overline{\alpha} z + 1} \quad \text{und} \quad M_\alpha(\alpha) \; = \; \frac{\alpha - \alpha}{1 - |\alpha|^2} \; = \; 0 \, .$$

Also können wir das Wurzel-Lemma anwenden und erhalten eine holomorphe Funktion $\phi : D \to \mathbb{D}$ mit $\phi^2 = M_\alpha \circ f$. Wähle (ähnlich wie im Beweis von (ii) weiter oben) eine Möbiustransformation M, so dass

$$F \; = \; M \circ \phi \; \in \; \mathcal{F}$$

liegt, also insbesondere $F(z_0) = 0$ und $F'(z_0) > 0$. Nun ist, mit der Abbildung $\psi : z \mapsto z^2$,

$$f \; = \; M_{-\alpha} \circ \phi^2 \; = \; M_{-\alpha} \circ \psi \circ \phi \; = \; M_{-\alpha} \circ \psi \circ M^{-1} \circ F \; = \; g \circ F \, ,$$

wobei die letzte Identität zur Definition von g dient. g ist nicht injektiv wegen dem Quadrat, aber erfüllt $g(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma (Theorem 3.29) gilt jedoch

$$|g(z)| \; < \; |z|$$

für alle $z \in \mathbb{D}$. Somit ist $|g'(0)| < 1$ und

$$|f'(z_0)| \; \leq \; |g'(F(z_0))F'(z_0)| \; < \; |F'(z_0)| \, ,$$

was wegen $f, F \in \mathcal{F}$ die Behauptung impliziert. $\diamond$

Setze also

$$m \; = \; \sup_{F \in \mathcal{F}} F'(z_0) \, .$$

Falls ein $f \in \mathcal{F}$ existiert mit $f'(z_0) = m$, dann folgt aus obiger Behauptung, dass f surjektiv ist (da dann keine echte Ungleichung mehr angenommen wird).

Sei $(f_n)_{n \geq 1}$ eine Folge in $\mathcal{F}$ mit

$$\lim_n f_n'(0) \; = \; m \, .$$

Da jedes $f_n \in \mathcal{F}$ nach $\mathbb{D}$ abbildet, ist $\mathcal{F}$ lokal beschränkt. Setze

$$f \; = \; \lim_n f_n \, ,$$

was dann nach dem Satz von Weierstraß holomorph ist. Offensichtlich gilt: $f(z_0) = 0$, und $f'(z_0) = m > 0$. (Wieder Weierstraß angewandt auf f_n'). Wegen letzterem ist f nicht konstant. Es bleibt noch die Injektivität zu zeigen (dann ist auch $f \in \mathcal{F}$). Dies folgt aus dem nachfolgenden Satz. $\square$

Satz 5.19 (Hurewitz)**.** *Sei* $(f_n)_{n\geq 1}$ *eine gegen* f *kompakt konvergente Folge holomorpher injektiver Funktionen. Dann ist* f *entweder konstant oder ebenfalls injektiv.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass dieselbe Behauptung gilt für Nullstellen: Ersetze injektiv durch nullstellenfrei in der Beschreibung der f_n. Dann ist f entweder nullstellenfrei oder $f \equiv 0$. Dies sieht man wie folgt: Sei $f \not\equiv 0$. Nehme an, dass z_0 eine Nullstelle von f ist. Wähle ϵ so dass

$$\overline{B_\epsilon(z_0)}$$

keine weiteren Nullstellen enthält (dies geht, da f holomorph ist). Dann ist

$$\int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial B_\epsilon(z_0)} \frac{dz}{2\pi i} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)};$$

die rechte Seite ist 0 nach Satz 4.26, da bei den f_n keine Nullstellen oder Pole auftreten. Die linke Seite ist nach Annahme ungleich 0, was zu einem Widerspruch führt.

Sei nun f nicht konstant und $z_0 \in D$. Dann ist

$$F_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$$

ohne Nullstelle auf $D \setminus \{z_0\}$, da f_n injektiv ist. Also hat nach obiger Behauptung

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = f(z) - f(z_0)$$

keine Nullstelle auf $D \setminus \{z_0\}$. Da z_0 beliebig ist, folgt die Behauptung. □

Literaturempfehlungen

- Busam, R., Freitag, E.: Funktionentheorie. Springer, 1993
- Fischer, W., Lieb, L.: Funktionentheorie. Vieweg, 1992
- Jänich, K.: Funktionentheorie. Eine Einführung. 3. Aufl., Springer, 1993
- Remmert, R., Schumacher, G.: Funktionentheorie I. 5. Aufl., Springer, 2002