

Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

Übungsblatt 10 (26.6.2026)

Aufgabe 46: Mit φ wird hier die Eulersche φ -Funktion bezeichnet, für die die Formel

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

gilt. Zeige:

(1) Es gilt

$$\prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}, \quad \text{und damit} \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

(2) Es gilt

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

(3) Für die Dirichlet-Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

sind die Konvergenzabszissen 2, d.h. $\sigma_k = \sigma_a = 2$.

(4) Für $\operatorname{Re}(s) > 2$ gilt

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Aufgabe 47: Sei p eine Primzahl. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$F_n = \{f(x) \in \mathbb{F}_p[x] : f(x) \text{ ist irreduzibel vom Grad } n \text{ und hat höchsten Koeffizienten } 1\}.$$

In der Algebra zeigt man die Zerlegung

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} \prod_{f(x) \in F_d} f(x).$$

(1) Zeige, dass für alle n

$$|F_n| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d$$

gilt. (Hinweis: Vergleiche die Grade in obiger Polynomidentität und wende die Möbiusschen Umkehrformeln an.)

(2) Berechne explizit $|F_\ell|$ für eine Primzahl ℓ .

(3) Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ (mindestens) ein irreduzibles Polynom vom Grad n in $\mathbb{F}_p[x]$ existiert.

Aufgabe 48:

(1) Sei G eine multiplikativ geschriebene abelsche Gruppe und $a : \mathbb{N} \rightarrow G$ eine Abbildung. Durch

$$b(n) = \prod_{d|n} a(d)$$

wird eine Abbildung $b : \mathbb{N} \rightarrow G$ definiert. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a(n) = \prod_{d|n} b(d)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

(2) Sei K ein Körper. Durch

$$\Phi_1(x) = x - 1 \quad \text{und} \quad \Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{\prod_{\substack{d|n \\ d < n}} \Phi_d(x)} \quad \text{für } n > 1$$

werden rekursiv Elemente $\Phi_n(x)$ des Quotientenkörpers von $K[x]$ definiert. Zeige, dass gilt

$$\Phi_n(x) = \prod_{d|n} (x^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}.$$

(Die $\Phi_n(x)$ sind sogar Polynome und werden Kreisteilungspolynome genannt.)

Aufgabe 49: Zeige, dass folgende Beziehungen zwischen zwei Funktionen $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ äquivalent sind:

$$g(x) = \sum_{n \leq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{für alle } x \geq 1$$

und

$$f(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) \quad \text{für alle } x \geq 1.$$

Aufgabe 50: Zeige, dass für alle $x \geq 1$ folgende Aussagen gelten:

(1)

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = 1.$$

(2)

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq \frac{1}{x} \left(1 + \sum_{n \leq x} |\mu(n)| \right).$$

(3)

$$\left| \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} \right| \leq 1.$$

(Hinweis: Für (1) verwende man die Inversionsformeln der vorangegangenen Aufgabe.)