Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Bei einem „endlich erzeugten“ Vektorraum V gibt es Vektoren $u_1, u_2, \dots u_n$, so dass jeder Vektor, d.h. jedes Element $u \in V$, als Linearkombination (**LK**) $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$ darstellbar ist, mit Skalaren $\lambda_i \in \mathbb{K}$ $(1 \le i \le n)$, wobei $\mathbb{K}$ der Skalaren-Körper des Vektorraumes ist, üblicherweise $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Man nennt solche Vektoren $u_1, \dots, u_n$ ein Erzeugendensystem (**E-System**) des Raumes V und schreibt $V = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ („Erzeugnis“ = Gesamtheit aller LKen der u_i).

Ein System $u_1, \dots, u_k$ von Vektoren heißt linear unabhängig (**lu**), wenn auf keines der u_i verzichtet werden kann, wenn also kein u_i als LK der anderen u_j darstellbar ist. Lässt man schrittweise jeweils ein durch die anderen darstellbares u_i weg, erhält man schließlich ein System, das lu ist und dieselbe Gesamtheit von LKen ergibt wie das ursprüngliche System.

Leicht einzusehen:
$u_1, \dots, u_k$ sind genau dann lu (m.a.W.: ein **LU-System**), wenn $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$ *nur* für $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$ gilt, d.h. der *Nullvektor nur trivial darstellbar* ist.

Denn gäbe es eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors, bei der also ein $\lambda_i \neq 0$, so könnte man die Gleichung $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_i u_i + \dots + \lambda_k u_k = 0$ nach u_i auflösen, also auf u_i verzichten.

Bezogen auf ein linear unabhängiges Erzeugendensystem (**LUE-System**) hat jeder Vektor $u \in V$ eindeutig bestimmte „skalare Koordinaten“ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Denn zwei Darstelllungen $\lambda_1 u_1 + \dots +_n u_n = u = \lambda'_1 u_1 + \dots + \lambda'_n u_n$ ergeben ja $(\lambda_1 - \lambda'_1) u_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda'_n) u_n = 0$ und damit $\lambda_1 - \lambda'_1 = \dots = \lambda_n - \lambda'_n = 0$.

Nicht von vornherein klar: *Alle LUE-Systeme haben* gleich viele *Elemente, und jedes LU-System hat* höchstens so viele *Elemente wie ein LUE-System.* Diese grundlegenden Tatsachen beweisen wir jetzt.

Sei $u_1, \dots, u_m$ ein LUE-System und $v_1, \dots, v_n$ ein LU-System des Vektorraumes V. Dann können wir ein geeignetes Element u_i durch v_1 ersetzen, und das neue System bleibt ein LUE-System.

Alle Elemente $v_1, \dots v_n$ sind als LKen der u_i darstellbar. Bei v_1 habe u_i einen Koeffizienten $\lambda_i \neq 0$. Wir ersetzen u_i durch v_1. Dann gilt: $u_i = \lambda_i^{-1} v_1 - \lambda_i^{-1} (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m - \lambda_i u_i)$; also bleibt es auch nach Ersetzen von u_i durch v_1 ein E-System.

Und dieses System ist lu. Denn eine nichttriviale Darstellung der Null, bei der v_1 einen Koeffizienten $\neq 0$ hat, ergäbe eine ebensolche Darstellung durch die u_j, bei der u_i einen Koeffizienten $\neq 0$ hat. Eine nichttriviale Darstellung der Null als LK der u_j $(j \neq i)$ allein ist auch nicht möglich.

Den Ersetzungsprozess können wir schrittweise auch auf $v_2, v_3, \dots$ anwenden. Da die v_j lu sind, muss immer ein noch verbliebenes u_i einen Koeffizienten $\neq 0$ haben.

Wäre nun $m < n$, ergäbe sich am Ende der Widerspruch, dass man die $u_1, \dots, u_m$ durch die Elemente $v_1, \dots, v_m$ ersetzt hätte und diese schon ein LUE-System wären.

Also $m \ge n$. Bei *zwei* LUE-Systemen kann man die Rollen vertauschen, und es folgt $m = n$. **Q.E.D.**

Die, wie wir jetzt wissen, *eindeutig bestimmte* Anzahl n der Elemente jedes LUE-Systems eines endlich erzeugten Vektorraumes nennt man **Dimension** des Raumes, und jedes LUE-System $u_1, \dots, u_n$ heißt eine **Basis** des Raumes. Man schreibt dann $V = \langle\langle u_1, \dots, u_n \rangle\rangle$ („linear unabhängiges Erzeugnis“). Klar:
Jedes E-System wird durch *Weglassen* von Elementen ein LUE-System, also eine *Basis;* ebenso wird jedes LU-System durch *Hinzufügen* von Elementen eine Basis.
Eine Basis ist also ein *maximales* linear unabhängiges System – und ein *minimales* Erzeugendensystem.

EMEW, TH N, 21.4.26