

DIE CANTOR-MENGE UND IHRE TEUFELSTREPPE

CHRISTOPH RICHARD

18. JULI 2025, VERSION 21. JULI 2025

ZUSAMMENFASSUNG. Wir geben eine elementare Einführung in die Cantor-Menge und die Cantor-Funktion.

1. DIE CANTOR-MENGE C (1883)

1.1. **Definition.** Konstruiere aus $C_0 = [0, 1]$ eine absteigende Folge $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \dots$ von Mengen: Entferne für C_n aus jedem Intervall in C_{n-1} das offene mittlere Drittel.

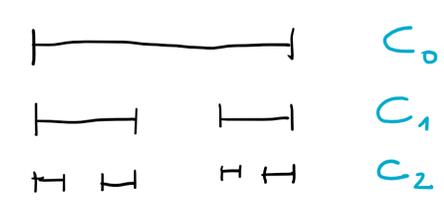


ABBILDUNG 1. Konstruktion der C_n

Offenbar gilt

$$C_n = \frac{1}{3} (C_{n-1} \dot{\cup} (2 + C_{n-1})) .$$

Betrachte nun die Menge $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ der Punkte in allen C_n . Nach Konstruktion sind die Randpunkte jedes Intervalls in C_n Elemente von C . Also enthält C unendlich viele Punkte. Man nennt C selbstähnlich. Tatsächlich gilt

Satz 1.1. Die Cantormenge C erfüllt die Gleichung

$$C = \frac{1}{3} (C \dot{\cup} (2 + C)) .$$

Beweis. Es gilt $3C \subset 3C_{n+1} = C_n \dot{\cup} (2 + C_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt

$$3C \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (C_n \dot{\cup} (2 + C_n)) = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \dot{\cup} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (2 + C_n) \right) = C \dot{\cup} (2 + C) .$$

Hier haben wir verwendet, dass alle Schnitte $C_r \cap (2 + C_s)$ leer sind. Es gelten ja $C_r \subset [0, 1]$ und $2 + C_s \subset [2, 3]$. Für die umgekehrte Inklusion beachte

$$C \dot{\cup} (2 + C) \subset C_n \dot{\cup} (2 + C_n) = 3C_{n+1} .$$

für beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Es folgt $C \cup (2 + C) \subset 3 \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_{n+1} = 3C$. Dies beweist die Aussage, denn aus $A \subset B$ und $B \subset A$ folgt $A = B$. □

Nach Konstruktion gehen die C_n bei Spiegelung an der Vertikale $x = 1/2$ in sich selbst über. Man sieht wie oben, dass auch die Cantormenge $C = 1 - C$ erfüllt. Welche Menge ergibt sich, wenn man C_n um jeden Punkt aus C_n verschiebt? Offenbar gilt $C_n + C_n = [0, 2]$. Hieraus folgt auch für die Cantormenge $C + C = [0, 2]$! Ein elementarer Beweis findet sich in [6].

1.2. Länge von C . C_1 hat 2 Intervalle der Länge $1/3$, C_2 hat 4 Intervalle der Länge $1/9$, C_3 hat 8 Intervalle der Länge $1/27$. Die Menge C_n hat 2^n Intervalle der Länge $(1/3)^n$. Für die Länge $\ell(C_n)$ von C_n gilt also

$$\ell(C_n) = 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

Also enthält C kein Intervall positiver Länge! Man setzt deshalb $\ell(C) = 0$. Dieser Wert ergibt sich auch mit einem passenden Längenbegriff, siehe unten.

Für $A \subset \mathbb{R}$ heißt $x \in A$ innerer Punkt von A , falls es ein Intervall I positiver Länge gibt mit $x \in I \subset A$. Also hat C keine inneren Punkte! Die Menge der Lücken von C hat ausschließlich innere Punkte!

$A \subset \mathbb{R}$ heißt offen, falls A nur aus inneren Punkten besteht. $A \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossen¹, falls ihr Komplement $\mathbb{R} \setminus A$ in \mathbb{R} offen ist.

Die Menge der Lücken von C ist offen. Also ist C abgeschlossen. (Beachte hierzu, dass die Intervalle $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$ offen sind.)

1.3. Elemente von C . Die Punkte $x \in C$ entsprechen den unendlichen 02-Folgen: x liegt in genau einem Intervall von C_{k-1} . Dieses Intervall wird im k -ten Schritt zweigeteilt. Dann liegt x entweder im linken Teilintervall ($x_k = 0$) oder im rechten Teilintervall ($x_k = 2$). Also wird x durch $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eindeutig dargestellt mit

$$x = x_1 \cdot \frac{1}{3} + x_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + x_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

Also hat C unendlich viele Elemente: Es gibt unendlich viele 02-Folgen, und jede solche Folge liefert eine unterschiedliche reelle Zahl in C . Betrachte nun ein beliebiges $x \in C$. Tatsächlich liegen in jedem Intervall positiver Länge um x sogar unendlich viele $y \in C$: Für beliebiges n betrachte das Intervall $I \subset C_n$ der Länge $(1/3)^n$ mit $x \in I$. Dann gilt $y \in I$, falls nur $y_k = x_k$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Nach obigem Argument gibt es unendlich viele solche y .

Für $A \subset \mathbb{R}$ heißt $x \in A$ isoliert, falls es ein Intervall I positiver Länge gibt mit $I \cap A = \{x\}$. Also hat C keine isolierten Punkte!

1.4. Projekt. Was ändert sich, wenn man abgeschlossene Lücken entfernt? Schneidet man anstelle eines Intervalls der Länge $1/3$ zB eines der Länge $1/4$ aus, ergeben sich "fette" Cantor-Mengen (Smith-Volterra-Cantormenge). Man kann auch aus einem 3×3 -Quadrat alle kleinen Quadrate bis auf die an den Ecken entfernen, analog verfährt man in drei Dimensionen (Cantor-Staub). Alternativ kann man aus einem 3×3 -Quadrat das mittlere kleine Quadrat entfernen (Sierpinski-Teppich) oder aus einer $3 \times 3 \times 3$ -Box die mittlere kleine Box entfernen (Menger-Schwamm). Man

¹Abgeschlossene Mengen A haben die folgende Eigenschaft: Falls $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen ist mit $x_n \in A$ für jedes n , so liegt auch ihr Grenzwert in A .

kann anstelle eines Quadrats auch ein gleichseitiges Dreieck betrachten. Dieses unterteilt man in vier gleichseitige Dreiecke und entfernt das mittlere Dreieck. Diese Konstruktion führt auf das Sierpinski-Dreieck und, in drei Dimensionen, auf den Sierpinski-Tetraeder. All dies kann man mit dem Computer leicht visualisieren.

Man kann die Punkte in diesen Mengen ähnlich wie bei der Cantor-Menge beschreiben!

Man kann nun in jedem Konstruktions-Schritt mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit zufällig Intervalle (Rechtecke, Boxen) entfernen. Man kann dann zum Beispiel fragen, ab welcher Wahrscheinlichkeit der Sierpinski-Teppich zerfällt [8]. Zufällige Sierpinski-Teppiche dienen als Modell für Krebszellen-Gewebe [15, 19].

2. MÄCHTIGKEIT VON C

Definition 2.1. *Zwei nichtleere Mengen A, B heißen gleich mächtig, $|A| = |B|$, falls es eine umkehrbare Abbildung zwischen A und B gibt.*

Wir wissen bereits $|C| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$, mit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller 01-Folgen. Wir zeigen, dass $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar ist. Darüber hinaus begründen wir $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$! Also gilt $|C| = |\mathbb{R}|$!

2.1. endliche Mengen. Zwei endliche nichtleere Mengen sind gleich mächtig genau dann wenn sie die gleiche Anzahl von Elementen besitzen. (Bild $|A| = 2, |B| = 1$)

2.2. abzählbare Mengen. Eine Menge heißt abzählbar, falls sie gleich mächtig zu \mathbb{N} ist. Beispiele sind $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$, $2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$. Auch $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ ist abzählbar wegen

$$\mathbb{Q} \cap (0, 1) = \{1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6, 5/6, \dots\}$$

Also ist \mathbb{Q} abzählbar, denn $f : (0, 1) \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x/(1-x^2)$ ist umkehrbar. Für C ist die Menge der Randpunkte der Intervalle aus allen C_n abzählbar.

2.3. Potenzmengen. Wir schreiben $|A| \leq |B|$, falls es eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ gibt, so dass $f : A \rightarrow f(A)$ umkehrbar ist. Wir schreiben $|A| < |B|$, falls $|A| \leq |B|$ aber nicht $|A| = |B|$ gilt.

Satz 2.2 (Cantor 1891). *Sei A eine nichtleere Menge, und sei $\mathcal{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen von A . Dann gilt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Beweis. Die Funktion $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ mit $f(x) = \{x\}$ ist umkehrbar auf $f(A)$. Also gilt $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Wir zeigen, dass für jedes $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ stets $f(A) \neq \mathcal{P}(A)$ gilt. Damit folgt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$. Für beliebiges f betrachte $B = \{x \in A : x \notin f(x)\}$. Wir zeigen $B \notin f(A)$. Annahme: Es gebe ein $y \in A$ mit $B = f(y)$. Dann gilt $y \in B$ genau dann wenn $y \in f(y)$. Nach Definition von B gilt aber $y \in B$ genau dann wenn $y \notin f(y)$. Also kann es kein $y \in A$ mit $B = f(y)$ geben. Also gilt $f(A) \neq \mathcal{P}(A)$. \square

Man sieht sehr leicht $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$; beispielsweise wird $A = \{2, 4, 7\} \subset \mathbb{N}$ durch die 01-Folge $\{0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$ codiert. Also ist $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nicht abzählbar.

2.4. **Das Kontinuum \mathbb{R} .** Wir wissen bereits

$$|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |C| \leq |[0, 1]| .$$

Also sind weder $[0, 1]$ noch \mathbb{R} abzählbar.

Es gilt aber auch $|[0, 1]| \geq |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$: Unterteile $[0, 1]$ in 2^n halboffene Intervalle der Länge 2^{-n} , für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann kann man wie oben jede Zahl $x \in [0, 1]$ durch eine unendliche 01-Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ darstellen, mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k}$. Also gilt

$$|[0, 1]| \leq |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| .$$

(Diese Darstellung ist nicht eindeutig, im Gegensatz zur Darstellung von C . Beispielsweise gilt $0.01111\dots = 0.10000\dots$)

Für A, B mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$ gilt aber sogar $|A| = |B|$ (Satz von Cantor-Bernstein [7, S. 88]). Also gilt $|[0, 1]| = |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$.

Nach obigem Argument gilt $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$. Es gilt auch $|(0, 1)| = |[0, 1]| = |[0, 1]|$: Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ gegeben durch $f(1/n) = 1/(n+1)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x$ sonst ist umkehrbar. Wir erhalten $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| = |C| = |\mathbb{R}|$.

2.5. **Kontinuums-Hypothese.** Gibt es eine Menge mit Mächtigkeit echt zwischen $|\mathbb{N}|$ und $|\mathbb{R}|$? Diese Frage kann in der "klassischen" Mathematik weder widerlegt werden (Gödel 1938) noch bewiesen werden (Cohen 1963)! Siehe [7, Kap. 11].

2.6. **Projekt.** Formuliere und beweise den Satz von Cantor mit 01-Folgen. Studiere das kartesische Produkt zweier Potenzmengen [7, S. 149] und zeige damit $|\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Also hat die Menger aller unendlichen Folgen mit Werten in \mathbb{R} dieselbe Mächtigkeit wie \mathbb{R} ! Versuche, den Beweis des Satzes von Cantor-Bernstein aus [7, S. 88] zu verstehen.

3. UNIVERSALITÄT VON C

Wir beschreiben eine Charakterisierung von Cantor-Mengen in \mathbb{R}^n . Man kann die Intervalle positiver Länge mit den nichtleeren offenen Intervallen identifizieren. Falls man aus einem offenen Intervall einen Punkt entfernt, ergeben sich wieder offene Intervalle. Im Gegensatz zu \mathbb{R} führt das Entfernen eines Punktes aus einem offenen Quader nicht wieder auf offene Quader. Hierzu

Definition 3.1. *$A \subset \mathbb{R}^n$ hat topologische Dimension 0, falls jede Überdeckung von A mit offenen Mengen eine Verfeinerung aus paarweise disjunkten offenen Mengen besitzt.*

Falls $A \subset \mathbb{R}$ keine inneren Punkte besitzt, hat A Dimension 0, denn jedes offene Intervall I_x um $x \in A$ besitzt einen Punkt $y \notin A$, und damit ist $I_x \setminus \{y\}$ eine Verfeinerung von I_x mit den gewünschten Eigenschaften.

Satz 3.2 (Aleksandrov). *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere abgeschlossene Menge ohne isolierte Punkte und ohne innere Punkte. Dann gibt es eine stetige umkehrbare Abbildung $f : A \rightarrow C$ genau dann wenn A topologische Dimension 0 hat. \square*

Ein Beweis für \mathbb{R} findet sich in [7, S. 420]. Obiger Satz bleibt wahr, wenn man \mathbb{R}^n durch bestimmte allgemeinere Räume ersetzt. Ein Beweis für diesen allgemeineren Fall findet sich in [18, Satz 30.3]. Hier benutzt man, dass ein lokal kompakter Hausdorff Raum genau dann null-dimensional ist, wenn er total unzusammenhängend ist [1, Prop. 3.1.7].

4. BOX-LÄNGE UND BOX-DIMENSION VON C

Sei $A \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Wir erklären zunächst, wie man die Länge $\ell(A)$ von A definieren kann. Sei $N_A(l)$ die Zahl offener Intervalle der Länge l , die mindestens erforderlich sind, um A zu überdecken. Für $A = \{x\}$ gilt $N_A(l) = 1$. Für A ein Intervall der Länge $c > 0$ gilt $c/l < N_A(l) \leq c/l + 1$. Wir definieren

$$\ell(A) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{N_A(l)}{1/l},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Es gelten $\ell(\{x\}) = 0$ und $\ell((a, b)) = b - a$. Für C sei $l > 0$ vorgegeben. Bestimme $n \in \mathbb{N}$ durch $3^{-n} \leq l < 3^{-n+1}$. Dann gilt $2^n < N_C(l) \leq 2^{n+1}$, weil C_n durch 2^n abgeschlossene Intervalle der Länge 3^{-n} überdeckt wird. Damit ergibt sich

$$\ell(C) = \lim_{l \rightarrow 0} l \cdot N_C(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{-n} \cdot 2^n = 0.$$

Eine einpunktige Menge sollte Dimension 0 haben, ein offenes beschränktes Intervall sollte Dimension 1 haben. Wir erklären, wie man die Dimension von A definieren kann. Oft gilt

$$N_A(l) \approx cl^{-d}$$

näherungsweise für kleine l , für ein $d \geq 0$ und eine Konstante c . Man definiert die Box-Dimension von A durch

$$d_B(A) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln(N_A(l))}{\ln(1/l)},$$

falls dieser Grenzwert existiert. Wir haben also $d_B(\{x\}) = 0$ und $d_B((a, b)) = 1$ für $a < b$. Falls $d_B(A)$ existiert, gilt stets $0 \leq d_B(A) \leq 1$. Für C ergibt sich

$$d_B(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^{n+1})}{\ln(3^n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \ln 2}{n \ln 3} = \ln_3 2 = 0.6309298\dots$$

Man kann dies auf Teilmengen der Ebene oder des Raumes verallgemeinern, indem man zur Messung Quadrate oder Würfel mit Kantenlänge l verwendet. Für die englische Küstenlinie $A \subset \mathbb{R}^2$ schätzt man $d_B(A) \approx 1.2$. Die Box-Dimension wird auch Minkowski-Dimension genannt.

4.1. Projekt. Berechne die Box-Dimension von $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, der fetten Cantor-Menge, des Cantor-Staubes und der Bayerischen Raute.

5. DIE CANTOR-FUNKTION T

5.1. Definition von T und Eigenschaften von T_n . Für C_n definiere die Funktion $T_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ durch

$$T_n(x) = \frac{\ell(C_n \cap [0, x])}{\ell(C_n)},$$

die relative Länge von C_n von 0 bis x . Es gelten $T_n(0) = 0$ und $T_n(1) = 1$. Nach Definition ist T_n stetig. Darüber hinaus ist T_n auf den Lücken von C_n (und ihren Randpunkten) konstant und auf den Teilintervallen von C_n linear wachsend (mit jeweils gleicher Steigung, da alle Teilintervalle dieselbe Länge haben).

Bezeichne die Intervalle von C_n in aufsteigender Reihenfolge mit $I_{n,k}$ für $k \in \{1, \dots, 2^n\}$. Wir haben also

$$[0, 1] = I_{n,1} \dot{\cup} L_{n,1} \dot{\cup} I_{n,2} \dot{\cup} L_{n,2} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_{n,2^{n-1}} \dot{\cup} L_{n,2^{n-1}} \dot{\cup} I_{n,2^n}.$$

Nenne die offene Menge $L_{n,k}$ die k -te Lücke von C_n . Für $x \in L_{n,k}$ gilt dann

$$T_n(x) = \frac{\ell(C_n \cap [0, x])}{\ell(C_n)} = \frac{k \cdot 3^{-n}}{2^n \cdot 3^{-n}} = \frac{k}{2^n}.$$

Wegen der Stetigkeit überträgt sich dies auf Randpunkte x der $L_{n,k}$. Auf jedem Intervall $I_{n,k} = [a_n, b_n]$ hat T_n also die Steigung

$$\frac{T_n(b_n) - T_n(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{2^{-n}}{3^{-n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

Für $x \in C$ betrachte die 02-Darstellung $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von x . Nach dem Obigen gilt

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{2^k}.$$

Die Folge $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergiert sie gegen eine Zahl $T(x)$. Also konvergiert die Funktionenfolge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf ganz $[0, 1]$ gegen eine Funktion T . Man nennt den Grenzwert T die Cantor-Funktion oder die Teufelstreppe. Die Funktion T ist monoton wachsend, weil alle T_n monoton wachsend sind. Wir zeigen, dass T auf den Lücken von C konstant ist, dass T eine stetige Funktion ist, und dass T in jedem $x \in C$ nicht differenzierbar ist!

5.2. Werte auf den Lücken von C . Wir zeigen $T_n = T_{n+1} = T_{n+2} = \dots$ auf jeder Lücke von C_n einschließlich ihrer Randpunkte. Also konvergiert $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf jeder Lücke von C einschließlich ihrer Randpunkte gegen eine konstante Funktion. Erinnerung: Die Lückenmenge von C hat Länge 1!

Offenbar ist jede Lücke von C_n auch eine Lücke von C_{n+1} mit $L_{n,k} = L_{n+1,2k}$. Für $x \in L_{n,k}$ gilt also

$$T_{n+1}(x) = \frac{\ell(C_{n+1} \cap [0, x])}{\ell(C_{n+1})} = \frac{2k \cdot 3^{-(n+1)}}{2^{n+1} \cdot 3^{-(n+1)}} = \frac{k}{2^n} = T_n(x).$$

Wegen der Stetigkeit überträgt sich dies auf Randpunkte x der Intervalle $L_{n,k}$.

5.3. Formel für T . Für beliebiges $x \in [0, 1]$ betrachte die Darstellung $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zur Basis 3. Sei $n_x = \inf\{k \in \mathbb{N} : x_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann gilt

$$T(x) = \frac{1}{2^{n_x}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_x-1} \frac{x_k}{2^k}.$$

5.4. Stetigkeit von T . Für $x \in C$ und $m \geq n$ gilt wegen der geometrischen Reihe

$$|T_m(x) - T_n(x)| = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \frac{x_k}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m 2^{-k} = \sum_{k=0}^m 2^{-k} - \sum_{k=0}^n 2^{-k} = 2^{-n} - 2^{-m}$$

Im Grenzfall $m \rightarrow \infty$ erhalten wir also

$$|T_n(x) - T(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |T_n(x) - T_m(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (2^{-n} - 2^{-m}) = 2^{-n}.$$

Da diese Abschätzung trivial auch auf den Lücken von C gilt, ist die Konvergenz also gleichmäßig auf $[0, 1]$. Aus diesem Grund ist die Funktion T sogar gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$.

Hier ist das Argument: Seien $\varepsilon > 0$ sowie $x, y \in [0, 1]$ beliebig. Wähle m, n mit $|T(y) - T_n(y)| \leq \varepsilon$, $|T(x) - T_m(x)| \leq \varepsilon$ und $|T_n(x) - T_m(x)| \leq \varepsilon$. Wegen gleichmäßiger Konvergenz hängen n, m nicht von x, y ab. Da T_n eine beschränkte Steigung besitzt, gibt es ein $\delta = \delta(n(\varepsilon))$ mit $|T_n(y) - T_n(x)| < \varepsilon$, falls nur $|x - y| < \delta$. Wir erhalten also für $|x - y| < \delta$ die Abschätzung

$$|T(y) - T(x)| \leq |T(y) - T_n(y)| + |T_n(y) - T_n(x)| + |T_n(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - T(x)| \leq 4\varepsilon.$$

Dies zeigt gleichmäßige Stetigkeit.

Diese Aussage kann wie folgt verschärft werden [10, Prop. 10.1]: Für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt die Abschätzung

$$|T(y) - T(x)| \leq |y - x|^{d_B(C)}.$$

Man sagt, dass T Hölder-stetig ist mit Exponent $d_B(C)$. Eine Abschätzung mit Vorfaktor 2 wurde bereits 1929 von Hille und Tamarkin bewiesen, ein elementares Argument findet sich in [14, Lemma 2]. Diese Abschätzung kann auch nicht verbessert werden: Eine Abschätzung $|T(y) - T(x)| \leq a|y - x|^b$ gilt nicht für alle $x \in [0, 1]$, falls $b > d_B(C)$ oder falls $b = d_B(C)$ und $a < 1$.

5.5. Nicht-Differenzierbarkeit von T . Die Teufelstreppe ist in allen Lücken von C differenzierbar mit Ableitung 0. Verwende hierzu, dass die Lückenmenge von C offen ist. Wir zeigen, dass für $x \in C$ stets

$$(D^+T)(x) = \limsup_{h \downarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} = \infty$$

erfüllt ist. Also ist T in keinem $x \in C$ differenzierbar.

Betrachte $x \in C$. Dann gibt es Intervalle $I_n = [a_n, b_n] \in C_n$ der Länge 3^{-n} mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Fixiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in [a_n, b_n]$. Dann liegt x entweder im linken Drittel $I_l = [a_n, l_n]$ oder im rechten Drittel $I_r = [r_n, b_n]$ von I_n , siehe Bild 2. Für $x \in I_r$ gilt $T_n(x) \geq T(x)$, also haben wir $T(b_n) - T(x) \geq T_n(b_n) - T_n(x) =$

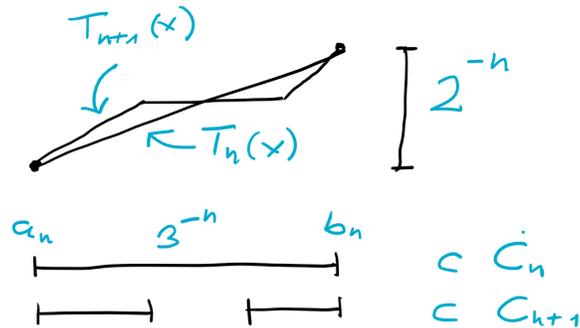


ABBILDUNG 2. zur Cantor-Funktion

$(b_n - x)(3/2)^n$. Für $x \in I_l$ gilt $T(x) \leq T_{n+1}(l_n)$, also haben wir $T(b_n) - T(x) \geq T_n(b_n) - T_{n+1}(l_n) = 2^{-(n+1)}$. Mit $b_n - x \leq b_n - a_n = 3^{-n}$ folgt also in beiden Fällen

$$\frac{T(b_n) - T(x)}{b_n - x} = \frac{T_n(b_n) - T(x)}{b_n - x} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

5.6. Sekantensteigungen in C . Es ist nicht wahr, dass T auf C stets eine unendliche Ableitung besitzt. Betrachte hierzu

$$(D_+T)(x) = \liminf_{h \downarrow 0} \frac{T(x+h) - T(x)}{h} \geq 0$$

Man kann zeigen, dass D_+T jeden vorgegebenen Wert $s \in [0, \infty]$ an überabzählbar vielen Stellen $x \in C$ annimmt [11]. Für ein vorgegebenes s kann man solche Stellen $x \in C$ an ihrer 02-Darstellung ablesen.

Dies kann man wie folgt untersuchen. Sei $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die von oben gegen x konvergiert. Wähle $(b_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $b_{n_k+1} < y_k \leq b_{n_k}$. Dann gilt

$$\frac{T(y_k) - T(x)}{y_k - x} \geq \frac{T(b_{n_k+1}) - T(x)}{b_{n_k} - x}.$$

Für $x \in I_r$ folgt

$$\frac{T(y_k) - T(x)}{y_k - x} \geq \frac{T(b_{n_k+1}) - T(x)}{b_{n_k} - x} = \frac{T(b_{n_k}) - T(x)}{b_{n_k} - x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n_k}.$$

Allerdings kann für $x \in I_l$ der Differenzenquotient beliebig klein werden. Dies kann man in Bild 2 erahnen.

5.7. Projekt. Untersuche, welche Häufungspunkte zwischen $(D_+T)(x)$ und $(D^+T)(x)$ auftreten können. Man kann diese Frage auch mit dem Computer numerisch untersuchen.

6. BEISPIELE FÜR CANTOR-MENGEN

6.1. Kettenbrüche. Kettenbrüche liefern in natürlicher Weise Cantor-Mengen. Die Bestimmung ihrer Box-Dimension ist ein schwieriges Problem [17].

6.2. Substitutionen. Man kann die Cantor-Menge über eine zugeordnete Substitution ϱ auf dem Alphabet $\{0, 1\}$ beschreiben, mit $\varrho(0) = 000$ und $\varrho(1) = 101$. Substitutionen auf einem endlichen Alphabet sind mathematisch intensiv studiert [4, 3]. Auch die kürzlich entdeckte Hut-Parkettierung, welche die Ebene mit nur einem Elementarbaustein aperiodisch pflastert, kann man mit Substitutionen beschreiben [2].

Man kann Substitutionen randomisieren [8]. Zum Beispiel kann man oben nach jedem Substitutions-Schritt per Münzwurf eine "1" auf "0" setzen. Es ist einfach, auf dem Computer Bilder der zugehörigen Mengen zu erzeugen. Für einen zufälligen Sierpinski-Teppich kann man sich fragen, ab welcher Wahrscheinlichkeit der Teppich zerfällt. Randomisierte Substitutionen sind ein aktives Forschungsfeld [13].

6.3. Hofstadter-Schmetterling. Dieses zweidimensionale Fraktal wurde 1976 von D. Hofstadter entdeckt. Es beschreibt das Energie-Spektrum eines eindimensionalen Hamilton-Operators mit bestimmtem aperiodischem Potential. Es ist durch eine Abfolge von Intervallen beschrieben, welche einer Cantor-Menge ähnliche Eigenschaften besitzen. Das Studium der zugehörigen Teufelstreppe (integrierte Zustandsdichte) ist ein aktives Forschungsfeld [5]. Tatsächlich kann das Problem elementar erklärt werden, man benötigt hierzu den Begriff des Eigenwerts einer Matrix.

6.4. Julia-Mengen. Betrachte für gegebenes c die Rekursion $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit $z_0 = 0$. Die Mandelbrot-Menge ist definiert über

$$M = \{c \in \mathbb{C} : (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\} .$$

Für festes c aber variables z_0 kann man die Menge

$$K_c = \{z_0 \in \mathbb{C} : (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}$$

betrachten. Beide Mengen lassen sich auf dem Computer leicht visualisieren.

Die Menge K_c ist abgeschlossen und beschränkt. Die Julia-Menge J_c ist erklärt durch $J_c = K_c \setminus K_c^\circ$, wobei K_c° die Menge der inneren Punkte von K_c ist. Nach Definition ist J_c abgeschlossen und besitzt keine inneren Punkte. Die Menge J_c besitzt keine isolierten Punkte genau für $c \in M$ [12]. In diesem Fall hat J_c also dieselben Eigenschaften wie C .

Man betrachtet Mandelbrot-Mengen und Julia-Mengen auch für allgemeinere polynomiale Rekursionen $z_{n+1} = p(z_n)$.

7. GEOMETRISCHE REIHE

$$1 + q + q^2 + \dots + q^N = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$

Beweis mit Induktion über N oder eleganter durch

$$(1 - q)(1 + q + \dots + q^N) = (1 + q + \dots + q^N) - (q + q^2 + \dots + q^{N+1}) = 1 - q^{N+1}$$

7.1. Projekt. Offenbar gilt

$$\lim_{q \uparrow 1} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = N + 1 .$$

Eine weitere Anwendung ist

$$\sum_{k=0}^N k = \lim_{q \uparrow 1} \sum_{k=0}^N k q^{k-1} = \lim_{q \uparrow 1} \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^N q^k = \lim_{q \uparrow 1} \frac{d}{dq} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \dots = \frac{N(N+1)}{2} .$$

Schreibe hierzu q^{N+1} als Polynom in $(1 - q)$ (Taylorentwicklung um $q = 1$).

Allgemeiner kann man so Polynome in k summieren (lassen).

LITERATUR

- [1] A. Arhangel'skii und M. Tkachenko, Topological groups and related structures, Atlantis Studies in Mathematics, 1. Atlantis Press, Paris; World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, (2008).
Klassiker zu topologischen Gruppen, lesbar für fortgeschrittene Studierende.
- [2] M. Baake, F. Gähler und L. Sadun, Dynamics and topology of the Hat family of tilings, *Isr. J. Math.* (2025).
Eine mathematische Analyse der 2023 entdeckten Hut-Pflasterung.
- [3] M. Baake, A. Gorodetski und J. Mazàç, A naturally appearing family of Cantorvals, *Lett. Math. Phys.* **114** (2024), 101.
Ein Beispiel für das Auftreten von Cantormengen bei eindimensionalen Substitutionen.
- [4] M. Baake and U. Grimm, *Aperiodic Order. Vol. 1. A Mathematical Invitation*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications *149*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
Eine Monographie über aperiodische Ordnung und Substitutionen.
- [5] R. Band, S. Beckus und R. Loewy, The dry ten Martini problem for sturmian dynamical systems, [arXiv:2309.04351](https://arxiv.org/abs/2309.04351) (2023).
Eine neuere Arbeit zum Hofstatter-Schmetterling.
- [6] N.L. Carothers, *Real Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
Eine elementare Darstellung der Cantormenge und der Cantorfunktion finden sich ab Seite 25. Insbesondere wird dort mit einem einfachen Argument $C + C = [0, 2]$ bewiesen!
- [7] O. Deiser, *Einführung in die Mengenlehre*, Springer (2004).
Online abrufbar. Elementare Einführung mit vielen historischen Anmerkungen. Es werden mehrere Beweise des Satzes von Cantor-Schröder-Bernstein gegeben. Besonders intuitiv ist das Argument von König auf Seite 88. Die Cantor-Menge wird in Kapitel 12 besprochen.
- [8] F.M. Dekking und R.W.J. Meester, On the structure of Mandelbrot's percolation process and other random Cantor sets, *J. Statist. Phys.* **58** (1990), 1109–1126.
Eine frühe Arbeit zu zufälligen Substitutionen.
- [9] T. Devos, L. Loosveldt und S. Nicolay, On the fractal properties of generalized Cantor sets and Devil's staircase functions, *Eur. J. Math.* **11** (2025), Paper No. 44.
Eine neue Arbeit zu Cantormengen.
- [10] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov und M. Vuorinen, The Cantor function, *Expositiones Mathematicae* **24** (2006), 1–37.
Überblick über Eigenschaften der Cantor-Funktion.
- [11] J.A. Eidswick, A characterization of the nondifferentiability set of the Cantor function, *Proc. Amer. Math. Soc.* **42** (1974), 214–217.
Eine frühe Arbeit zur Ableitung der Cantorfunktion.
- [12] K. Falconer, *Fractal geometry*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester (2014).
Klassiker zu Fraktalen.
- [13] P. Gohlke, A. Mitchell, D. Rust und T. Samuel, Rauzy fractals of random substitutions, preprint (2024), <https://arxiv.org/abs/2401.06732>.

- [14] E.A. Gorin und B.N. Kukushkin, Integrals associated with the Cantor staircase, *St. Petersburg Math. J.* **15** (2004), 449–468.
- [15] P. Hermann, T. Mrkvička, T. Mattfeldt, M. Minářová, K. Helisová, O. Nicolis, F. Wartnera und M. Stehlíka, Fractal and stochastic geometry inference for breast cancer: a case study with random fractal models and Quermass-interaction process, *Statist. Med.* **34** (2015), 2636–2661. Anwendung des Menger-Schwamms zur Krebsanalyse in der Medizin.
- [16] M.L. Lapidus and G. Radunović, An invitation to fractal geometry–fractal dimensions, self-similarity, and fractal curves, *Graduate Studies in Mathematics*, 247. American Mathematical Society, Providence, RI (2024).
Ein aktuelles Buch zu Fraktalen.
- [17] M. Pollicott, Cantor sets, Hausdorff dimension and their applications, online abrufbar.
Vortrag zum Thema Fraktale aus Kettenbrüchen.
- [18] S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley (1970).
Textbuch zur Topologie, geeignet für Studierende ab dem zweiten Studienjahr. Die Cantor-Menge wird in Abschnitt 30 behandelt.
- [19] P. Hermann, J. Kiselak und M. Stehlik, R-Paket `FractalParameterEstimation` (2025), abrufbar über <https://cran.r-project.org>.

DEPARTMENT FÜR MATHEMATIK, FRIEDRICH-ALEXANDER-UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG,
CAUERSTRASSE 11, 91058 ERLANGEN, GERMANY
Email address: christoph.richard@fau.de