Exkurs: Kettenbrüche

1. Definition

Unter einem Kettenbruch versteht man einen Ausdruck der Form

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

Aus schreibtechnischen Gründen ist dafür auch die Bezeichnung

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$$

gebräuchlich.

Beispiel:

$$[2,3,5,7] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{36}{7}}} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{7}{36}} = 2 + \cfrac{1}{\frac{115}{36}} = 2 + \frac{36}{115} = \frac{266}{115}$$

Kettenbruchalgorithmus zur Gewinnung der Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl: Ist $\alpha = \alpha_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so definiert man rekursiv

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor \quad \text{und} \quad \alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i}, \text{ solange } \alpha_i \notin \mathbb{Z}.$$

Dann gilt

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}}$$

und damit

$$\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}} = \dots = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{\ddots}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}$$

bzw. mit der einfacheren Notation

$$\alpha = [\alpha_0] = [a_0, \alpha_1] = [a_0, a_1 + \frac{1}{\alpha_2}] = [a_0, a_1, \alpha_2] = \dots = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

$[a_0, a_1, a_2, \dots]$ heißt die **Kettenbruchentwicklung** von α, a_n der n-te **Teilquotient** von α. Es ist klar, dass $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1$ gilt. Außerdem sieht man auch, dass für $m \leq n$ gilt

$$\alpha_m = [a_m, a_{m+1}, \dots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

Die Kettenbruchentwicklung bricht ab, wenn es ein n gibt mit $\alpha_n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n]$.

Datei: ki_kettenbrueche.tex. Version vom 4.6.2018

Beispiele: Mit dem Kettenbruchalgorithmus erhalten wir folgende Kettenbruchentwicklungen:

(1)
$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [1, 2, 2].$$

(2)
$$\frac{21}{13} = [\frac{21}{13}] = [1, \frac{13}{8}] = [1, 1, \frac{8}{5}] = [1, 1, 1, \frac{5}{3}] = [1, 1, 1, 1, \frac{3}{2}] = [1, 1, 1, 1, 1, 2].$$

(3) Zunächst ist
$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = [1, 1+\sqrt{2}] \quad \text{und} \quad 1+\sqrt{2} = 2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} = [2, 1+\sqrt{2}],$$
was durch Iteration
$$\sqrt{2} = [1, 1+\sqrt{2}] = [1, 2, 1+\sqrt{2}] = [1, 2, 2, 1+\sqrt{2}] = \cdots = [1, 2, 2, \ldots, 2, 2, 1+\sqrt{2}]$$
ergibt.

(4) Für $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ gilt $\lfloor\alpha\rfloor = 1$ und $\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha}$, was sofort zu
$$\alpha = [1, \alpha] = [1, 1, \alpha] = [1, 1, 1, \alpha] = \cdots = [1, 1, 1, \ldots, 1, \alpha]$$
führt.

(5) Für π und e findet man die Kettenbruchentwicklungen
$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, \ldots] \quad \text{und} \quad e = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots].$$

Bemerkung: Bricht die Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl α ab, so ist $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n] \in \mathbb{Q}$ wegen $a_i \in \mathbb{Z}$. Die Umkehrung wird noch bewiesen.

Lemma. *Sei $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung der reellen Zahl α. Existiert a_n für ein $n \geq 1$, so gilt $\alpha_n > 1$ und $a_n \geq 1$.*

Beweis: Da a_n existiert, ist nach Konstruktion $\alpha_{n-1} \notin \mathbb{Z}$ und damit $a_{n-1} < \alpha_{n-1} < a_{n-1} + 1$. Es folgt $0 < \alpha_{n-1} - a_{n-1} < 1$, also $\alpha_n = \frac{1}{\alpha_{n-1} - a_{n-1}} > 1$ und damit auch $a_n = \lfloor\alpha_n\rfloor \geq 1$. ■

2. Wie findet man die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl?

Wir wollen jetzt die Kettenbruchentwicklung rationaler Zahlen näher anschauen.

Satz. *Sei $\alpha = \frac{b_0}{b_1} \in \mathbb{Q}$ mit $b_0, b_1 \in \mathbb{Z}$ und $b_1 \geq 1$. Wir wenden den euklidischen Algorithmus auf b_0 und b_1 an und erhalten rekursiv $b_2, b_3, \ldots, b_{n+1}$, indem wir b_i durch b_{i+1} teilen (mit Quotient a_i und Rest b_{i+2}):*
$$\begin{array}{rcll} b_0 &=& a_0 b_1 + b_2 & \textit{mit} \quad 0 < b_2 < b_1 \\ b_1 &=& a_1 b_2 + b_3 & \textit{mit} \quad 0 < b_3 < b_2 \\ \vdots & & \vdots & \\ b_{n-1} &=& a_{n-1} b_n + b_{n+1} & \textit{mit} \quad 0 < b_{n+1} < b_n \\ b_n &=& a_n b_{n+1} + 0 & \textit{und} \quad b_{n+2} = 0 \end{array}$$
Dann ist
$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$$
die Kettenbruchentwicklung von α. Insbesondere bricht die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl nach endlich vielen Schritten ab. (Die Teilquotienten in der Kettenbruchentwicklung sind also genau die Quotienten, die beim euklidischen Algorithmus auftreten.)

Beweis: Wir zeigen durch Induktion: Die in der Kettenbruchentwicklung von α auftretenden Teilquotienten sind genau die a_i's und $\alpha_i = \frac{b_i}{b_{i+1}}$.
Zum Induktionsanfang: Es gilt

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 + b_2}{b_1} = a_0 + \frac{b_2}{b_1}.$$

Wegen $0 \leq b_2 < b_1$ ist $0 \leq \frac{b_2}{b_1} < 1$ und daher $a_0 = \lfloor \alpha_0 \rfloor$. Damit wird $\alpha_1 = \frac{b_1}{b_2}$.
Es gelte nun $\alpha_i = \frac{b_i}{b_{i+1}}$. Dann ist

$$\alpha_i = \frac{b_i}{b_{i+1}} = \frac{a_i b_{i+1} + b_{i+2}}{b_{i+1}} = a_i + \frac{b_{i+2}}{b_{i+1}}.$$

Wegen $0 \leq b_{i+2} < b_{i+1}$ folgt $a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor$, d.h. a_i ist der i-te Teilquotient. Damit wird

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{\alpha_i - a_i} = \frac{b_{i+1}}{b_{i+2}},$$

was die Induktionsbehauptung zeigt.
Nach Konstruktion ist

$$\alpha_n = \frac{b_n}{b_{n+1}} = a_n \in \mathbb{Z},$$

sodass der Kettenbruchalgorithmus hier abbricht. Dies beweist die Behauptung. ■

Beispiel: Wir wollen die Kettenbruchentwicklung von $\alpha = \frac{449}{211}$ bestimmen. Wir führen den euklidischen Algorithmus durch:

$$\begin{aligned} 449 &= 2 \cdot 211 + 27, \\ 211 &= 7 \cdot 27 + 22, \\ 27 &= 1 \cdot 22 + 5, \\ 22 &= 4 \cdot 5 + 2, \\ 5 &= 2 \cdot 2 + 1, \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0. \end{aligned}$$

Daher folgt mit dem letzten Satz für die Kettenbruchentwicklung

$$\frac{449}{211} = [2, 7, 1, 4, 2, 2].$$

Bemerkung: Ist $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ die Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl und $n \geq 1$, so gilt $a_n \geq 2$, denn wir hatten früher bereits gesehen, dass $\alpha_n > 1$ gilt, und hier ist $a_n = \alpha_n$.

Die Länge der Kettenbruchentwicklung einer rationalen Zahl läßt sich mit folgendem Satz abschätzen.

SATZ. *Ist $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ die Kettenbruchentwicklung der rationalen Zahl $\frac{b_0}{b_1}$, so gelten die Abschätzungen*

$$n \leq 4.785 \log_{10} b_1 \quad \text{und} \quad n \leq 1.45 \log_2 b_1.$$

Beispiele: Sei $(f_n)_{n \geq 0}$ die durch $f_0 = 1$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ (für $n \geq 2$) definierte Fibonacci-Folge, also

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad f_7 = 13, \quad \ldots$$

Dann zeigt man leicht durch Induktion, dass für $n \geq 0$ die Kettenbruchentwicklung von $\frac{f_{n+3}}{f_{n+2}}$ durch

$$\frac{f_{n+3}}{f_{n+2}} = [1, 1, \ldots, 1, 1, 2] \quad \text{mit } n \text{ Einsen}$$

gegeben wird, also

$$\frac{f_3}{f_2} = 2 = [2], \quad \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = [1, 2], \quad \frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = [1, 1, 2], \quad \frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = [1, 1, 1, 2], \quad \frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = [1, 1, 1, 1, 2], \quad \ldots$$

3. Eindeutigkeit

Das folgende Lemma zeigt, dass man eine rationale Zahl auf verschiedene Weise als Kettenbruch darstellen kann:

Lemma. *Seien $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und $a_1, \ldots, a_{n-1} \geq 1$ und $a_n \geq 1$. Dann ist*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_n - 1, 1].$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Identität $a_n = (a_n - 1) + \frac{1}{1}$. ■

Andererseits gilt folgende Aussage:

Lemma. *Ist*

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, \beta_n]$$

mit $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i \geq 1$ für $i \geq 1$, $\alpha_n, \beta_n > 1$, so gilt $a_i = b_i$ für alle i und $\alpha_n = \beta_n$.

Beweis: Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 1$ haben wir $\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = b_0 + \frac{1}{\beta_1}$. Wegen $\alpha_1, \beta_1 > 1$ folgt $a_0 = b_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ und damit auch $\alpha_1 = \beta_1$. Sei jetzt $n > 1$. Setzt man $\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$ und $\beta_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{b_n}$, so gilt

$$[a_0, \ldots, a_{n-2}, \alpha_{n-1}] = [a_0, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, \alpha_n] = [b_0, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, \beta_n] = [b_0, \ldots, b_{n-2}, \beta_{n-1}].$$

Wegen $\alpha_{n-1}, \beta_{n-1} > 1$ und der Induktionsvoraussetzung folgt $a_i = b_i$ für $0 \leq i \leq n-2$. Schließlich folgt aus $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ mit dem Fall $n = 1$ die Aussage $a_{n-1} = b_{n-1}$ und $\alpha_n = \beta_n$. ■

Die Kettenbruchdarstellung einer reellen Zahl ist also eindeutig bestimmt, wenn man bei rationalen Zahlen noch fordert, dass der letzte Teilquotient ≥ 2 ist.

4. Nährungsbrüche

Definition. *Ist $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$ die Kettenbruchentwicklung einer reellen Zahl α, so heißt*

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n]$$

der n-te Näherungsbruch von α. Die Näherungsbrüche sind also

$$[a_0], \quad [a_0, a_1], \quad [a_0, a_1, a_2], \quad [a_0, a_1, a_2, a_3], \quad \ldots$$

Beispiel: Die Zahl $\alpha = \frac{2963}{1281}$ hat die Kettenbruchentwicklung $\alpha = [2, 3, 5, 7, 11]$. Die Näherungsbrüche sind:

$$\begin{aligned}
[2] &= 2 = 2.000000000 \\
[2,3] &= \frac{7}{3} = 2.333333333 \\
[2,3,5] &= \frac{37}{16} = 2.312500000 \\
[2,3,5,7] &= \frac{266}{115} = 2.313043478 \\
[2,3,5,7,11] &= \frac{2963}{1281} = 2.313036690
\end{aligned}$$

Mit dem folgenden Satz kann man die Näherungsbrüche einer Zahl berechnen, wenn man die Kettenbruchentwicklung kennt:

Satz. *Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ gegeben. Dann gilt mit den Rekursionsformeln*

$$\begin{array}{llll}
p_{-2} = 0, & p_{-1} = 1, & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} & \text{für } n \geq 0, \\
q_{-2} = 1, & q_{-1} = 0, & q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} & \text{für } n \geq 0
\end{array}$$

die Gleichung

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

Beweis: Wir beweisen dies durch Induktion. Für $n = 0$ ist $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$ und damit $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = a_0 = [a_0]$, für $n = 1$ ist $p_1 = a_1a_0 + 1$, $q_1 = a_1$ und damit $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1a_0+1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0, a_1]$. Sei also jetzt $n \geq 2$. Wir wenden die Induktionsvoraussetzung auf $[a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$ mit den Näherungsbrüchen $\frac{p_0}{q_0}, \dots, \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}, \frac{\widetilde{p}_{n-1}}{\widetilde{q}_{n-1}}$ an und erhalten

$$[a_0, \dots, a_n] = [a_0, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}] = \frac{\widetilde{p}_{n-1}}{\widetilde{q}_{n-1}} = \frac{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})p_{n-2} + p_{n-3}}{(a_{n-1} + \frac{1}{a_n})q_{n-2} + q_{n-3}} =$$
$$= \frac{a_n(a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{a_n(a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}} = \frac{a_np_{n-1} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n},$$

was gezeigt werden sollte. ■

Lemma. *Gegeben sei ein Kettenbruch* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ *und dazu die durch obige Rekursionsformeln definierten Größen* p_n, q_n.

(1) *Für* $n \geq 1$ *gilt*

$$p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1} \quad \text{d.h.} \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}.$$

(2) *Für* $n \geq 2$ *gilt*

$$p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n = (-1)^n a_n \quad \text{d.h.} \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2}q_n}.$$

(3) *Ist* $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$, *so gilt für* $n \geq 0$

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Beweis:

(1) Für $n = 1$ gilt wegen $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ die Beziehung $p_1q_0 - p_0q_1 = 1$. Für $n \geq 2$ folgt dann die Behauptung induktiv aus

$$\begin{aligned} p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n &= a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} - p_{n-1}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) = \\ &= -(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}). \end{aligned}$$

(2) Mit der Gleichung aus 1. erhält man

$$\begin{aligned} p_nq_{n-2} - p_{n-2}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-2} - p_{n-2}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) = \\ &= a_n(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) = (-1)^n a_n, \end{aligned}$$

wie behauptet.

(3) Sind $\frac{\widetilde{p}_i}{\widetilde{q}_i}$ die Näherungsbrüche des Kettenbruchs $[a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$, so gilt

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{\widetilde{p}_0}{\widetilde{q}_0}, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{\widetilde{p}_1}{\widetilde{q}_1}, \quad \dots, \quad \frac{p_n}{q_n} = \frac{\widetilde{p}_n}{\widetilde{q}_n}, \quad \alpha = \frac{\widetilde{p}_{n+1}}{\widetilde{q}_{n+1}}.$$

Aus der Rekursionformel $\widetilde{q}_{n+1} = \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}$ folgt mit (1)

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\widetilde{p}_{n+1}}{\widetilde{q}_{n+1}} - \frac{\widetilde{p}_n}{\widetilde{q}_n} = \frac{(-1)^n}{\widetilde{q}_{n+1}q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})},$$

wie behauptet. ■

Der folgende Satz stellt einige der wichtigsten Approximationseigenschaften von Kettenbrüchen zusammen.

Satz. *Sei* $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ *die Kettenbruchentwicklung der reellen Zahl* α *mit den Näherungsbrüchen* $\frac{p_n}{q_n}$. *Dann gilt:*

(1)

$$1 = q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \dots \quad \text{und} \quad q_n \geq (\frac{1 + \sqrt{5}}{2})^{n-1} > 1.618^{n-1} \text{ für alle } n \geq 0.$$

(2) *Die Näherungsbrüche* $\frac{p_n}{q_n}$ *sind gekürzt, d.h.* $\mathrm{ggT}(p_n, q_n) = 1$.

(3)
$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \cdots \leq \alpha \leq \cdots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$$

(4) *Ist* $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$, *so gilt*
$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

(5) *Für* $n \geq 0$ *gilt*
$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2} < 0.4^{n-1}.$$

(6) *Ist* $\alpha \notin \mathbb{Q}$, *so gilt*
$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n},$$
was man oft abkürzend auch als
$$\alpha = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$$
schreibt.

(Wird eine Größe wie a_n, p_n *oder* q_n *benutzt, soll dies implizit voraussetzen, dass die Größen auch definiert sind.)*

Beweis:

(1) Wir haben bereits bemerkt, dass $a_i \geq 1$ für $i \geq 1$ gilt. Für $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \geq 1.618$ gilt $\lambda^2 = \lambda + 1$. Damit erhalten wir $q_0 = 1 > \lambda^{-1}$, $q_1 = a_1 \geq 1 = \lambda^0$ und durch Induktion für $n \geq 2$
$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + q_{n-2} \geq \lambda^{n-2} + \lambda^{n-3} = \lambda^{n-3}(\lambda+1) = \lambda^{n-3}\cdot\lambda^2 = \lambda^{n-1},$$
wie behauptet.

(2) Aus $p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$ folgt $\mathrm{ggT}(p_n, q_n) = 1$.

(3) Die Formel
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_{n-2}q_n}$$
liefert (mit $a_n \geq 1$ für $n \geq 1$) durch Einsetzen von $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$
$$\frac{p_{2m}}{q_{2m}} = \frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}} + \frac{a_{2m}}{q_{2m-2}q_{2m}} > \frac{p_{2m-2}}{q_{2m-2}} \quad \text{und} \quad \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} = \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} - \frac{a_{2m+1}}{q_{2m-1}q_{2m+1}} < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}.$$
Die Formel
$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_nq_{n-1}}$$
liefert durch Einsetzen von $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$
$$\begin{aligned}\frac{p_{2m}}{q_{2m}} &= \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}} - \frac{1}{q_{2m}q_{2m-1}} < \frac{p_{2m-1}}{q_{2m-1}}\\ \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} &= \frac{p_{2m}}{q_{2m}} + \frac{1}{q_{2m+1}q_{2m}} > \frac{p_{2m}}{q_{2m}}\end{aligned}$$
Aus den beiden letzten Überlegungen folgt sofort die Ungleichungskette
$$\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \frac{p_4}{q_4} < \cdots < \frac{p_5}{q_5} < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}.$$
Ist für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (das bei der Kettenbruchentwicklung auftretende) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, so ist $\alpha = \frac{p_n}{q_n}$ und die Behauptung folgt aus der aufgestellten Ungleichungskette. Andernfalls ergibt sich aus
$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

durch Einsetzen von $n = 2m$ bzw. $n = 2m+1$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{p_{2m}}{q_{2m}} + \frac{1}{q_{2m}(\alpha_{2m+1}q_{2m} + q_{2m-1})} > \frac{p_{2m}}{q_{2m}} \quad \text{und} \\ \alpha &= \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}} - \frac{1}{q_{2m+1}(\alpha_{2m+2}q_{2m+1} + q_{2m})} < \frac{p_{2m+1}}{q_{2m+1}}, \end{aligned}$$

was die behauptete Ungleichungskette liefert.

(4) Ist $\alpha \neq \frac{p_n}{q_n}$, so ist $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, also existiert $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$ mit $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$. Der letzte Satz liefert

$$|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}.$$

Zu zeigen ist also

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)} < \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}+q_{n-1})} \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}},$$

was äquivalent zu

$$q_{n+1} \leq \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} < q_{n+1} + q_n \leq 2q_{n+1}$$

ist. Nun haben wir $a_{n+1} \leq \alpha_{n+1} < a_{n+1} + 1$ und somit können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} &q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \leq \alpha_{n+1}q_n + q_{n-1} < \\ &< (a_{n+1}+1)q_n + q_{n-1} = (a_{n+1}q_n + q_{n-1}) + q_n = q_{n+1} + q_n \leq 2q_{n+1}, \end{aligned}$$

was die Behauptung beweist.

(5) Die erste Ungleichung ist trivial für $n = 0$ wegen $q_0 = 1$ und folgt für $n \geq 1$ aus 4. mit $q_n < q_{n+1}$. Nach 1. gilt außerdem $q_n < 1.618^{n-1}$, was zusammen mit

$$\frac{1}{q_n^2} < \frac{1}{1.618^{2(n-1)}} < 0.4^{n-1}$$

die Behauptung zeigt.

(6) Dies folgt sofort aus 4. ■

Mit dem Kettenbruchalgorithmus erhält man also gute Approximationen an Irrationalzahlen.

Beispiel: $\pi = [3, 7, 15, 1, 292, \ldots]$ hat die Näherungsbrüche

$$\begin{aligned} \frac{p_0}{q_0} &= 3 && = 3.0000000000\ldots \\ \frac{p_1}{q_1} &= \frac{22}{7} && = 3.1428571428\ldots \\ \frac{p_2}{q_2} &= \frac{333}{106} && = 3.1415094339\ldots \\ \frac{p_3}{q_3} &= \frac{355}{113} && = 3.1415929203\ldots \\ \frac{p_4}{q_4} &= \frac{103993}{33102} && = 3.1415926530\ldots \\ \pi &= && = 3.1415926535\ldots \end{aligned}$$

FOLGERUNG. *Ist α irrational reell, so gibt es unendlich viele Brüche $\frac{p}{q}$ mit*

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}.$$

Bemerkungen:

(1) Ist α reell und q eine natürliche Zahl, so gibt es eine ganze Zahl m mit
$$\frac{m}{q} \leq \alpha < \frac{m+1}{q}.$$
Setzt man dann $p = m$ bzw. $p = m+1$, so erhält man
$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q}.$$
Ist q eine 10-er Potenz, so hat man die Approximation durch Dezimalbrüche. Die Kettenbruchapproximation ist aber wesentlich besser.

(2) Ist $\alpha = \frac{a}{b}$ rational, so folgt aus
$$0 < |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2} \qquad \text{wegen} \qquad \alpha - \frac{p}{q} = \frac{aq-bp}{bq}$$
und $|aq - bp| \in \mathbb{N}$ sofort sofort $q < b$. Also können nur endlich viele $\frac{p}{q}$ die Ungleichung erfüllen.

Satz. *Von zwei aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen $\frac{p}{q} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ oder $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ an die reelle Zahl α genügt zumindest eine der Ungleichung*
$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}.$$

Beweis: Wir nehmen an,
$$|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| \geq \frac{1}{2q_{n-1}^2} \qquad \text{und} \qquad |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{2q_n^2}.$$
Da α zwischen $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ und $\frac{p_n}{q_n}$ liegt, ist
$$|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| = |\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| + |\alpha - \frac{p_n}{q_n}|$$
und damit
$$\frac{1}{q_{n-1}q_n} = \frac{|p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}|}{q_{n-1}q_n} = |\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n}| = |\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}| + |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| \geq \frac{1}{2q_{n-1}^2} + \frac{1}{2q_n^2} = \frac{q_{n-1}^2 + q_n^2}{2q_{n-1}^2q_n^2},$$
was sofort $2q_{n-1}q_n \geq q_{n-1}^2 + q_n^2$ und damit $0 \geq (q_{n-1} - q_n)^2$, also $q_n = q_{n-1}$ liefert. Dies kann nur im Fall $n = 1$ auftreten, außerdem werden dann aus den Ungleichungen Gleichungen, d.h.
$$\alpha - \frac{p_0}{q_0} = \alpha - a_0 = \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad \frac{p_1}{q_1} - \alpha = a_0 + 1 - \alpha = \frac{1}{2}.$$
Nun hat aber die Zahl $\alpha = a_0 + \frac{1}{2}$ die Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, 2]$ mit den Näherungsbrüchen $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ und $\frac{p_1}{q_1} = \frac{2a_0+1}{2}$, sodass auch dieser Fall nicht möglich ist. ■

Beispiel: Die Kettenbruchentwicklung von
$$\alpha = \frac{509473}{788342},$$
das zufällig gewählt wurde, illustriert den letzten Satz.

i	a_i	p_i	q_i	$\frac{p_i}{q_i}$	$q_i^2(\alpha - \frac{p_i}{q_i})$
0	0	0	1	0.0000000000	+0.646259
1	1	1	1	1.0000000000	-0.353741
2	1	1	2	0.5000000000	+0.585035
3	1	2	3	0.6666666667	-0.183670
4	4	9	14	0.6428571429	+0.666736
5	1	11	17	0.6470588235	-0.231190
6	3	42	65	0.6461538462	+0.443672
7	1	53	82	0.6463414634	-0.555444
8	1	95	147	0.6462585034	+0.007645
9	130	12403	19192	0.6462588579	-0.243448
10	4	49707	76915	0.6462588572	+0.097566
11	10	509473	788342	0.6462588572	+0.000000

Der folgende Satz gibt ein wichtiges (hinreichendes) Kriterium an, wann ein Bruch Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung einer Zahl ist.

SATZ. *Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit*
$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2},$$
so ist $\frac{p}{q}$ Näherungsbruch in der Kettenbruchentwicklung von α.

Beweis:

- Wir können schreiben
$$\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\theta}{2q^2} \text{ mit } \varepsilon = \pm 1 \text{ und } 0 < \theta < 1.$$
- Da wir zeigen wollen, dass $\frac{p}{q}$ Näherungsbruch für α ist, bilden wir die Kettenbruchentwicklung von $\frac{p}{q}$:
$$\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n].$$
Indem wir eventuell a_n durch $a_n - 1, 1$ ersetzen und dadurch die Länge der Kettenbruchdarstellung von $\frac{p}{q}$ um 1 erhöhen, können wir erreichen, dass gilt
$$\varepsilon = (-1)^n.$$
Seien $\frac{p_i}{q_i}$ die zugehörigen Näherungsbrüche.
- Da der Fall $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ trivial ist, können wir ihn ausschließen und somit definieren:
$$x = -\frac{\alpha q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha q_n - p_n}.$$
Dann gilt
$$\alpha = \frac{xp_n + p_{n-1}}{xq_n + q_{n-1}}$$
und mit den üblichen Formeln für Kettenbrüche
$$\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, x].$$
- Nun haben wir mit entsprechenden Kettenbruchformeln
$$\frac{\varepsilon\theta}{2q^2} = \frac{(-1)^n\theta}{2q_n^2} = \alpha - \frac{p}{q} = \alpha - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(xq_n + q_{n-1})}.$$
Es folgt
$$\frac{2\theta}{q_n^2} = \frac{1}{q_n(xq_n + q_{n-1})}$$
und damit $xq_n - q_{n-1} = \frac{2}{\theta}q_n$, also
$$x = \frac{2}{\theta} - \frac{q_{n-1}}{q_n}.$$
Mit der Voraussetzung folgt $x > 1$, sodass wegen der Eindeutigkeit der Kettenbruchentwicklung $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, x]$ tatsächlich der Anfang der Kettenbruchentwicklung von α ist. Also ist auch $\frac{p}{q}$ Näherungsbruch für α. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass man das Kriterium $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2q^2}$ nicht durch eine Bedingung $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{(2-\varepsilon)q^2}$ ersetzen kann mit einem festen $\varepsilon > 0$.

Beispiel: Wir betrachten für $m \geq 1$ die rationale Zahl
$$\alpha = \frac{2m^2 + m + 2}{2m^3}.$$
Man rechnet leicht nach, dass gilt
$$[0, m-1, 2] < \alpha < [0, m-1, 3].$$

Für $x > 0$ ist die Funktion $x \mapsto [0, m-1, x]$ streng monoton steigend, also hat die Kettenbruchentwicklung von α die Gestalt

$$\alpha = [0, m-1, 2, \dots].$$

Nun gilt

$$|\alpha - \frac{1}{m}| = \alpha - \frac{1}{m} = \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{m^3} = \frac{1}{(2 - \frac{4}{m+2})m^2} < \frac{1}{m^2} \quad \text{für} \quad m \geq 3,$$

aber $\frac{1}{m} = [0, m] = [0, m-1, 1]$ ist kein Näherungsbruch von α.