Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 10 (19.6.2024-26.6.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P46: (Staatsexamensaufgabe)

(a) Zeigen Sie, dass jeder irreduzible Faktor von $f := X^4 - 25 \in \mathbb{Q}[X]$ separabel über $\mathbb{Q}$ ist.
(b) Bestimmen Sie ein primitives Element eines Zerfällungskörpers L von f über $\mathbb{Q}$ und die Dimension von L über $\mathbb{Q}$.
(c) Berechnen Sie die Automorphismengruppe von L über $\mathbb{Q}$.
(d) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L$ und ihre Inklusionen.

Aufgabe P47: Gegeben seien die Zahlen $\alpha = \sqrt{10 + \sqrt{10}} \in \mathbb{R}$ und $\beta = \sqrt{10 - \sqrt{10}} \in \mathbb{R}$.

(1) Bestimme das Minimalpolynom f von α (und β) und zerlege es in Linearfaktoren über $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$.
(2) Betrachte $\alpha\beta$ und zeige damit, dass $\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)$ gilt.
(3) Warum ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ galoissch über $\mathbb{Q}$?
(4) Zeige, dass ein $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$ existiert mit $\sigma(\alpha) = \beta$.
(5) Zeige: $\mathrm{ord}\,(\sigma) = 4$ und $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = \langle\sigma\rangle$.
(6) Bestimme alle Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ und skizziere das zugehörige Diagramm der Unterkörper von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe P48: (Staatsexamensaufgabe) Es seien $\alpha := \sqrt{\sqrt{12} + 3} \in \mathbb{R}$, $\beta := i\sqrt{\sqrt{12} - 3} \in \mathbb{C}$ und $L := \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom $f = m_{\alpha,\mathbb{Q}}$ von α über $\mathbb{Q}$ und zeigen Sie, dass auch β eine Nullstelle von f ist.
(b) Begründen Sie, warum $L/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.
(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha, i)$ gilt, und bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$.
(d) Zeigen Sie, dass die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ einen Normalteiler der Ordnung 2 hat.

Aufgabe P49: (Inspiriert von einer Staatsexamensaufgabe) Ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[x]$ besitze (mindestens) eine Nullstelle $\alpha \in \mathbb{R}$ und (mindestens) eine Nullstelle $\beta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeige, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ nicht abelsch ist.

Aufgabe P50: (Staatsexamensaufgabe) Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und sei p eine Primzahl. Angenommen, p teilt den Grad jeder endlichen Körpererweiterung L/K mit $K \subsetneq L$. Zeigen Sie, dass dann der Grad jeder endlichen Körpererweiterung von K eine Potenz von p ist. (Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine endliche Galoiserweiterung E/K mit $K \subseteq L \subseteq E$ gibt, und verwenden Sie die Sylowsätze.)

Datei: kt_u10.tex. Version vom 17.6.2024

Hausaufgaben[1]

Aufgabe H28: Die Zahlen $\alpha = \sqrt{5+2\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$ und $\beta = \sqrt{5-2\sqrt{6}} \in \mathbb{R}$ haben beide das Minimalpolynom $f = x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, das sich über $\overline{\mathbb{Q}}$ wie folgt faktorisieren lässt:

$$f = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta).$$

Daher gibt es 4 Körperhomomorphismen $\sigma_i : \mathbb{Q}(\alpha) \to \overline{\mathbb{Q}}$, die durch

$$\sigma_1(\alpha) = \alpha, \quad \sigma_2(\alpha) = -\alpha, \quad \sigma_3(\alpha) = \beta, \quad \sigma_4(\alpha) = -\beta$$

bestimmt sind.

(1) Betrachte $\alpha\beta$ und folgere, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ galoissch über $\mathbb{Q}$ ist. Damit gilt auch $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$.
(2) Bestimme die Ordnungen von σ_i und den Isomorphietyp von $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q})$.
(3) Zeige:
$$\alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle\sigma_2\rangle}, \quad \alpha+\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle\sigma_3\rangle}, \quad \alpha-\beta \in \mathbb{Q}(\alpha)^{\langle\sigma_4\rangle},$$
berechne α^2, $(\alpha+\beta)^2$ und $(\alpha-\beta)^2$, und beschreibe damit die angegebenen Zwischenkörper.
(4) Erstelle ein Diagramm der Unterkörper von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Aufgabe H29: Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, sodass $K|\mathbb{Q}$ galoissch vom Grad 4 mit $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Z}_4$ ist. Zeige:

(1) Es gibt genau einen Körper E mit $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq K$ und $[E : \mathbb{Q}] = 2$.
(2) Ist $K \not\subseteq \mathbb{R}$, so gilt
$$E = K \cap \mathbb{R}.$$
(3) Für alle $d \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sqrt{-d} \notin K.$$

Aufgabe H30: (Staatsexamensaufgabe) Sei E/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $\alpha \in E$, so dass $\sigma(\alpha) \neq \alpha$ für alle $1 \neq \sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$.
Zeigen Sie: α ist ein primitives Element von E/K.

[1] Abgabe der Hausaufgaben bis 26.6.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen