

# Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2026)

## Übungsblatt 1 (17.4.2026)

**Aufgabe 1:** Zeige:

- (1) Für  $a, b, d \in \mathbb{N}$  gilt die Implikation

$$\text{ggT}(d, a) = 1 \text{ und } d \mid ab \implies d \mid b.$$

- (2) Ist  $d \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $a, b \in \mathbb{N}$  die Implikation

$$d \nmid a \text{ und } d \mid ab \implies d \mid b$$

gilt, so ist  $d$  eine Primzahl oder 1.

**Aufgabe 2:** Die Menge  $M = \{1\} \cup \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\} \subseteq \mathbb{N}$  ist abgeschlossen unter Multiplikation und enthält 1 als neutrales Element, bildet also ein sogenanntes kommutatives Monoid. Ein  $q \in M \setminus \{1\}$  heißt  $M$ -irreduzibel, wenn aus  $q = m_1 m_2$  mit  $m_1, m_2 \in M$  die Aussage  $\{m_1, m_2\} = \{1, q\}$  folgt.

- (1) Bestimme alle  $M$ -irreduziblen Elemente von  $M$ .
- (2) Zeige, dass jedes Element  $m \in M \setminus \{1\}$  ein Produkt von  $M$ -irreduziblen Elementen ist.
- (3) Bestimme vier verschiedene  $M$ -irreduzible Elemente  $q_1, q_2, q_3, q_4$  mit  $q_1 q_2 = q_3 q_4$ . (In  $M$  hat man also keine eindeutige Zerlegung in  $M$ -irreduzible Elemente.)

**Aufgabe 3:** Für  $n \geq 3$  sei  $a_n$  der kleinste Primteiler der Zahl  $n! - 1$ . Zeige, dass für jede Primzahl  $p \geq 5$  gilt

$$a_{p-2} = p.$$

(Hinweis: Der Satz von Wilson besagt  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .)

**Aufgabe 4:** Rekursiv wird eine Primzahlfolge  $(q_r)_{r \geq 1}$  definiert durch

$$q_1 = 2 \quad \text{und} \quad q_{r+1} = \text{größter Primteiler von } q_1 \dots q_r + 1 \text{ für } r \geq 1,$$

also  $q_1 = 2, q_2 = 3, q_3 = 7, \dots$

- (1) Berechne möglichst viele Glieder der Folge  $(q_r)_{r \geq 1}$ .
- (2) Zeige, dass 5 nicht in der Primzahlfolge  $(q_r)_{r \geq 1}$  vorkommt, eventuell mit Hilfe folgender Überlegungen:
  - (a) Gäbe es einen Index  $r$  mit  $q_{r+1} = 5$ , so gäbe es eine Zahl  $m \in \mathbb{N}$  mit

$$2 \cdot 3 \cdot q_3 \dots q_r + 1 = 5^m.$$

- (b) Was würde für die Primfaktorzerlegung von  $5^m - 1$  folgen? Warum geht das nicht?
- (3) Zeige, dass 11 nicht in der Primzahlfolge  $(q_r)_{r \geq 1}$  vorkommt, eventuell mit Hilfe folgender Überlegungen:
  - (a) Gäbe es einen Index  $r$  mit  $q_{r+1} = 11$ , so gäbe es Zahlen  $a \in \mathbb{N}_0, b \in \mathbb{N}$  mit

$$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r + 1 = 5^a \cdot 11^b, \quad \text{also} \quad 5^a \cdot 11^b - 1 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r.$$

(b) Zeige (beispielsweise durch Kongruenzbetrachtungen modulo 4, 3, 7):

$$\begin{aligned} 4 \nmid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff b \equiv 1 \pmod{2} \\ 3 \mid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff a + b \equiv 0 \pmod{2} \\ 7 \mid 5^a \cdot 11^b - 1 &\iff a + 2b \equiv 0 \pmod{6} \end{aligned}$$

Wie erhält man einen Widerspruch?

(c) Alternativ zur 3. Äquivalenz in (b) kann man auch folgende Aussage über das Legendre-Symbol herleiten:

$$\left( \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot q_4 \dots q_r + 1}{7} \right) = \left( \frac{5^a \cdot 11^b}{7} \right) \iff a \equiv 0 \pmod{2}.$$

Wie erhält man zusammen mit den ersten beiden Äquivalenzen in (b) einen Widerspruch?

**Aufgabe 5:** Sei  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$  die Folge der Primzahlen.

- (1) Zeige, dass für  $n \geq 3$  gilt  $p_n \leq p_1 \dots p_{n-1} - 1$ .
- (2) Folgere aus (1) mit Induktion, dass

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}} \text{ für alle } n \geq 1$$

gilt.

- (3) Folgere aus (2), dass

$$\pi(x) > \frac{\log \log x}{\log 2} \text{ für alle } x > 1$$

gilt.