



TECHNISCHE HOCHSCHULE NÜRNBERG
GEORG SIMON OHM

Quaternionen

Ausarbeitung zu einem Vortrag
im Rahmen der Ringvorlesung
B-AMP6, Sommersemester 2015

Vortragsdatum: 13. Mai 2015

© Edgar M. E. Wermuth
Fakultät AMP, TH Nürnberg
V/2015

Inhalt

1. Vor- und Entstehungsgeschichte	1
2. Wer war Hamilton?	5
3. Elementare Quaternionen-Algebra	6
4. Ebene Drehungen	10
5. Raumdrehungen	13
6. Zwei Drehungen nacheinander	20
7. Rodriguesparameter und Einssphäre	25
8. Matrixdarstellung; Oktonionen	28
9. De Moivre, Wurzeln, Konjugation	32
10. Drehungen und Quaternionen	38
11. Die Physiker	43
12. Existenz- und Einzigkeitsaussagen	45
13. Zum Schluss	48
14. Literatur	50

1. Die Vor und Entstehungsgeschichte

Die Entstehungsgeschichte der Quaternionen knüpft unmittelbar an die der komplexen Zahlen an. Darum beginnen wir – in aller Kürze – mit letzterer.

Ausgangspunkt war die Formel zur Lösung einer *kubischen Gleichung* $x^3 + px + q = 0$, die *Cardanische Formel* (hier in moderner Schreibweise)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

so genannt, weil Girolamo Cardano sie in seinem Buch *Ars Magna* (Nürnberg 1545) erstmals publizierte. Die eigentlichen Entdecker waren, unabhängig voneinander, Nicolo Tartaglia und Scipio del Ferro (ca. 1515). Bei dieser Gleichung ist der Fall $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$, der sogenannte *casus irreducibilis*, dadurch charakterisiert, dass die Funktion $f(x) = x^3 + px + q$ drei reelle Nullstellen hat; dies zeigt eine einfache Kurvendiskussion. Was aber will man in diesem Fall mit der Lösungsvorschrift anfangen? Man experimentierte mit dem Ansatz „imaginärer“ (= bloß eingebildeter) Zahlen, deren Quadrate negativ sind. So gelang es Rafael Bombelli (1526-1572), z.B. die Gleichung $x^3 = 15x + 4$ mittels der Formel zu lösen, da $(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 2 \pm 11\sqrt{-1}$, wenn man nur $(\sqrt{-1})^2 = -1$ und die üblichen Rechenregeln beachtet. Über *imaginäre* Zwischenwerte folgte so die *reelle* Lösung $x = 4$ der Gleichung.

François Viète (1540-1603) fand den trigonometrischen Ansatz, mit dessen Hilfe die Lösung im *casus irreducibilis* allgemein formulierbar wurde (modern formuliert: Bestimmung von Kubikwurzeln mittels Polarform).

Während noch Isaac Newton (1643-1727) skeptisch blieb gegenüber dem Rechnen mit imaginären Zahlen, ging Leonhard Euler (1707-1783) virtuos um mit den „ohnmöglichen“ Zahlen und entdeckte viele wichtige Beziehungen wie z.B. die berühmte Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

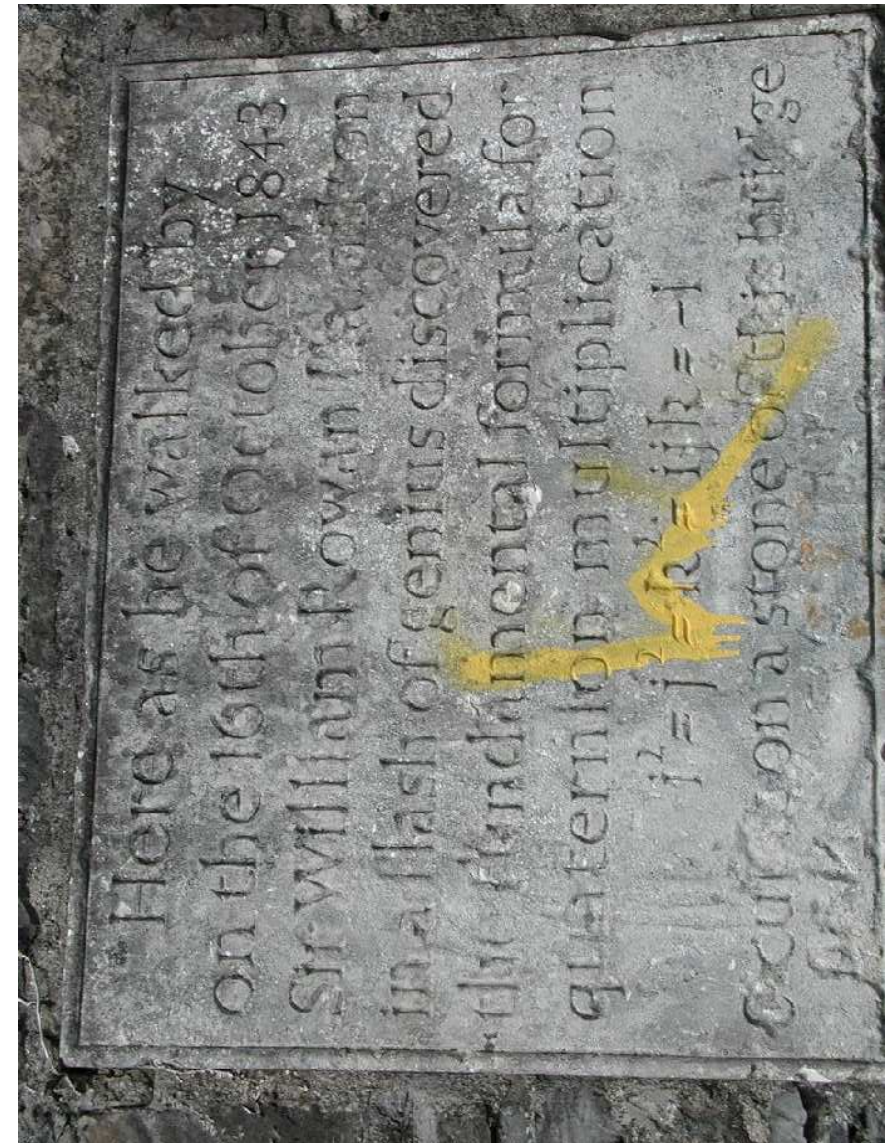
(Kurz nach Nikolaus Mercators Publikation der Logarithmusreihe (1668) war es dem jungen Newton durch raffinierte sukzessive Approximation gelungen, diese Reihe *umzukehren* und damit die Exponentialreihe aufzustellen; *danach* erst begann man, die Eigenschaften dieser neuen Funktion zu studieren.)

Gauß bewies – auf relativ komplizierte Weise – als erster den *Fundamentalsatz der Algebra* (1799), der besagt, dass nichtkonstante reelle (und komplexe) Polynome zumindest eine Nullstelle in \mathbb{C} besitzen; einer der bis heute einfachsten Beweise findet sich dann schon kurze Zeit später bei A. L. Cauchy (1789-1857; *Analyse algébrique*, 1821).

Um diese Zeit, also zu Anfang des 19. Jahrhunderts, begann man endgültig, einen logisch klaren, von allem Mystizismus befreiten Begriff der „komplexen“ Zahl (diese Bezeichnung benutzte erstmals Gauß 1831) zu formulieren, verknüpft mit der geometrischen Vorstellung von Punkten einer Ebene.

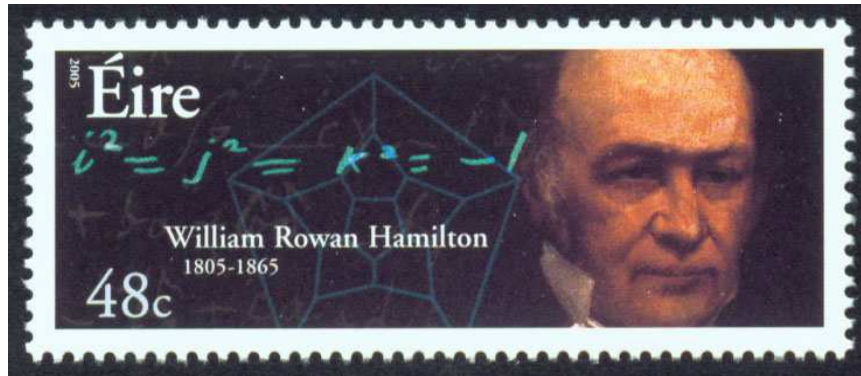
Hamilton war es, der als erster 1835 ganz algebraisch abstrakt – ohne Bezugnahme auf die Anschauung – das komplexe Zahlenrechnen als formales Operieren mit *geordneten Paaren reeller Zahlen* definierte.

Dieser abstrakte Standpunkt führte ihn konsequenterweise dazu, viele Jahre lang nach einer zur üblichen komponentenweisen Addition passenden Multiplikation und Division von *Tripeln* reeller Zahlen ($\hat{=}$ Punkten des Raumes \mathbb{R}^3) zu suchen. Alle Bemühungen blieben erfolglos, bis ihm am 16.10.1843 bei einem Spaziergang auf der “Brougham Bridge” (eigentlich Broom(e) Bridge) in Dublin blitzartig die richtige Definition der Multiplikation für *Quadrupel* (!) einfiel – die Geburtsstunde der *Quaternionen*. Den Rest seines Lebens widmete Hamilton ihrer Erforschung.



Here as he walked by on the 16th of October 1843 Sir William Rowan Hamilton in a flash of genius discovered the fundamental formula for quaternion multiplication $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ & cut it on a stone of this bridge.

2. Wer war Hamilton?



Ein berühmtes irisches Wunderkind, wuchs er hauptsächlich auf bei seinem Onkel, einem Priester und Linguisten. Schon im Alter von fünf Jahren las er griechische, lateinische und hebräische Texte und lernte noch eine ganze Reihe weiterer Fremdsprachen. Mit nur 22 Jahren wurde er Royal Astronomer of Ireland, Leiter der Sternwarte und Professor für Astronomie in Dublin und mit 30 Jahren in den Adelsstand erhoben.

Nach ihm benannt: das Hamilton-Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung), die Hamilton-Funktion, die Hamiltonschen („kanonischen“) Gleichungen der klassischen Mechanik, der Hamilton-Operator (Quantenmechanik), die Hamiltonschen charakteristischen Funktionen (Optik), der Hamilton-Kreis (Graphentheorie). Kurz: Hamilton war ein *Gigant* der Wissenschaft! Sicherlich der größte irische Wissenschaftler aller Zeiten.

3. Elementare Quaternionen-Algebra

Quaternionen sind Punkte des \mathbb{R}^4 , Schreibweise

$$q = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}.$$

Hamilton nannte q_0 „Skalar“ und $q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ „Vektor“ (was erst später allgemein auf „Vektorräume“ übertragen wurde).

Die übliche komponentenweise *Addition* wird durch folgende *Multiplikationsregeln* (Hamilton, 1843) ergänzt:

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$$

Ferner gelten das *Assoziativgesetz*, die *Distributivgesetze*, und es *kommutieren Skalare mit den Vektoren*; damit

$$\begin{aligned} \mathbf{ij} &= -\mathbf{ijk} = \mathbf{k}, & \mathbf{jk} &= -\mathbf{ijk} = \mathbf{i}, \\ \mathbf{ji} &= \mathbf{jjk} = -\mathbf{k}, & \mathbf{kj} &= \mathbf{ijj} = -\mathbf{i}, \\ \mathbf{ki} &= -\mathbf{jii} = \mathbf{j}, & \mathbf{ik} &= \mathbf{ijj} = -\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Andere Schreibweisen:

$$\begin{aligned} q &= (q_0, q_1, q_2, q_3) = (q_0, (q_1, q_2, q_3)) \\ &= q_0 + \vec{q} = q_0 + \mathbf{q}. \end{aligned}$$

So ergibt sich (Vergleich der Notationen):

$$\begin{aligned} (s + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k})(t + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) &= st - ux - vy - wz \\ &+ (sx + tu + vz - wy)\mathbf{i} + (sy + tv + wx - uz)\mathbf{j} + (sz + tw + uy - vx)\mathbf{k}, \\ (s, u, v, w)(t, x, y, z) &= (st - ux - vy - wz, sx + tu + vz - wy, \\ &sy + tv + wx - uz, sz + tw + uy - vx) \end{aligned}$$

und in kompakter **Skalar(produkt)-Vektor(produkt)-Notation**

$$(p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}.$$

„Skalarprodukt“ und „Vektorprodukt“ führte Hamilton ein zur übersichtlicheren Darstellung der *Quaternionen*-Multiplikation. Erst später wurden sie, insbesondere von Gibbs, auch unabhängig von den Quaternionen als Grundbegriffe einer *allgemeinen* „Vektorrechnung“ benutzt.

Der Quaternionen-*Schiefkörper* (die Multiplikation ist ja nicht kommutativ) umfasst \mathbb{C} als Unterkörper und wird zu Ehren Hamiltons mit \mathbb{H} bezeichnet.

Analog zu den komplexen Zahlen definiert man für Quaternionen $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ den *Betrag* und die *konjugierte Quaternion*:

$$|q| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2},$$

$$\bar{q} := a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}.$$

Aufbauend auf der (heutigen) Vertrautheit mit dem Skalar- und Vektorprodukt im \mathbb{R}^3 , ist die Skalar-Vektor-Notation bei Rechnungen vorteilhaft.

Beispiele dazu:

a) *Konjugation, Betrag, Inverse.*

$$\begin{aligned} q\bar{q} &= (q_0 + \mathbf{q})(q_0 - \mathbf{q}) \\ &= q_0^2 - \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{q}) + q_0(-\mathbf{q}) + q_0\mathbf{q} + \mathbf{q} \times (-\mathbf{q}) \\ &= q_0^2 + |\mathbf{q}|^2 + \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Wie bei den komplexen Zahlen identifiziert man *reelle* Zahlen r mit den *reellen* Quaternionen $(r, 0, 0, 0) = r + \mathbf{0}$, so dass also $q\bar{q} = |q|^2$; $(0, q_1, q_2, q_3) = 0 + \mathbf{q}$ heißt *rein imaginäre* Quaternion. Ersetzt man q durch \bar{q} , erhält man *dieselbe* Identität, so dass gilt:

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2 = |\bar{q}|^2 \quad \text{sowie} \\ q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \bar{q} \quad (q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}) \quad (\text{Inverse}).$$

b) Die *Distributivgesetze*

$(p + q)r = pr + qr$ und $p(q + r) = pq + pr$ (mit den üblichen Klammer-Konventionen) folgen *unmittelbar* aus der Skalarprodukt-Vektorprodukt-Darstellung des Produkts.

Ebenso die *Kommutativität* der Multiplikation mit *reellen* Faktoren, und etwas allgemeiner:

$$(rp)q = p(rq) = r(pq) = (pq)r$$

für $p, q \in \mathbb{H}$ und $r \in \mathbb{R}$.

c) Das *Assoziativgesetz* $(pq)r = p(qr)$

für $p, q, r \in \mathbb{H}$ ist wegen b) nur für $p, q, r \in \{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ nachzuweisen.

Denn $((\sum \alpha_i p_i) (\sum \beta_k q_k)) (\sum \gamma_l r_l) = \sum \alpha_i \beta_k \gamma_l (p_i q_k) r_l$ und $(\sum \alpha_i p_i) ((\sum \beta_k q_k) (\sum \gamma_l r_l)) = \sum \alpha_i \beta_k \gamma_l p_i (q_k r_l)$.

Das Assoziativgesetz ist trivial bei einem Faktor 1. Die Dreifachprodukte aus $\mathbf{i} = \mathbf{e}_1$, $\mathbf{j} = \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{k} = \mathbf{e}_3$ diskutiert man leicht mittels $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = -\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k$.

d) *Produktkonjugation und Betrags-Multiplikatvität.*

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p} \quad (p, q \in \mathbb{H}) \quad \text{wegen}$$

$$(p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = p_0q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0\mathbf{q} + q_0\mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q},$$

$$(q_0 - \mathbf{q})(p_0 - \mathbf{p}) = q_0p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - q_0\mathbf{p} - p_0\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}.$$

Damit auch $|pq|^2 = \overline{pq}pq = \bar{q}\bar{p}pq = \bar{q}|p|^2q = |p|^2\bar{q}q = |p|^2|q|^2$, die *Betrags-Multiplikatvität* $|pq| = |p||q|$.

Mit $r = pq = r_0 + \mathbf{r} = (r_0, r_1, r_2, r_3)$ also:

$$(p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$$

Dies ist Eulers **Vier-Quadrate-Satz** (1748); sind die p_i und q_i ganze Zahlen, so auch die r_i wegen $r_0 = p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3$, etc. Euler und Lagrange nutzten dies zahlentheoretisch: Darstellbarkeit als Summe von vier Quadraten ist eine „multiplikative“ Eigenschaft. (Bei den komplexen Zahlen entspricht dem ein Zwei-Quadrate-Satz.)

Quaternionen-Rechnung mit MAXIMA

Listen-Format für Quaternionen: $q : [q_0, [q_1, q_2, q_3]]$

Die normale *Additionsoperation* + ist verwendbar.

Wir definieren das *Vektor-Produkt* als Infix-Operation $a \times b$

für Dreier-Listen (Skalarprodukt ist einfach $[a, b, c] \cdot [u, v, w]$)

sowie das Quaternionen-Produkt $p \cdot q$:

`infix(">>");`

`">>"(a,b):=[a[2]*b[3]-a[3]*b[2],`

`a[3]*b[1]-a[1]*b[3],a[1]*b[2]-a[2]*b[1]];`

`infix("..");`

`".."(p,q):=`

`[p[1]*q[1]-p[2] . q[2],p[1]*q[2]+q[1]*p[2]+p[2]>>q[2]];`

Konjugation, Absolutbetrag, Konvertieren reeller Zahlen:

`postfix("'",500);` `"'"(p):=[p[1],-p[2]];`

`qabs(p):=sqrt((p'..p)[1]);` `qu(r):=[r,[0,0,0]];`

Die Postfix-Operation ' erhält mit 500 eine hohe Bindungspriorität. Als *Beispiel* Test des Assoziativgesetzes:

`p:[a,[b,c,d]];` `q:[s,[u,v,w]];` `r:[t,[x,y,z]];`

`expand((p..q)..r)-expand(p..(q..r));`

Ergebnis: `[0,[0,0,0]]` MAXIMA akzeptiert $p \cdot (q \cdot r)$ (!)

4. Ebene Drehungen

Eine endliche *ebene* Drehung mit Winkel φ um den Nullpunkt, die den Punkt $z \in \mathbb{C}$ in den Punkt $D_\varphi z$ überführt, stellen wir uns vor als aus vielen kleinen Drehungen zusammengesetzt. Bei sehr kleinem Drehwinkel ε bewirkt die Drehung bis auf einen Fehler zweiter Ordnung eine zum Radiusvektor *senkrechte* Positionsänderung:

$$D_\varepsilon z = z + \varepsilon i z + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

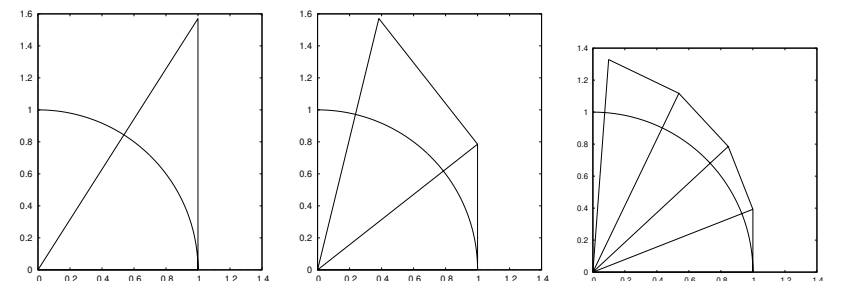
(Man kann zeigen: $|\mathcal{O}(\varepsilon^2)| < |z|\varepsilon^2$.) Folglich gilt

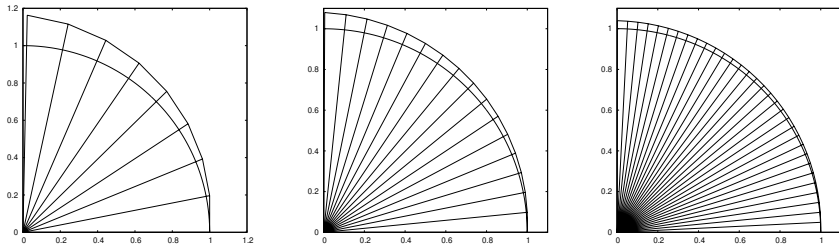
$$D_\varphi z = D_{\varphi/n}^n z = \left(1 + \frac{i\varphi + \mathcal{O}(1/n)}{n}\right)^n z,$$

und für $n \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$D_\varphi z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i\varphi}{n}\right)^n z = e^{i\varphi} z$$

Die Annäherung von $(1 + \frac{i\varphi}{n})^n$ an $e^{i\varphi}$, hier demonstriert am Beispiel $\varphi = \pi/2$ mit $n = 1, 2, 4, 8, 16$ und 32 :

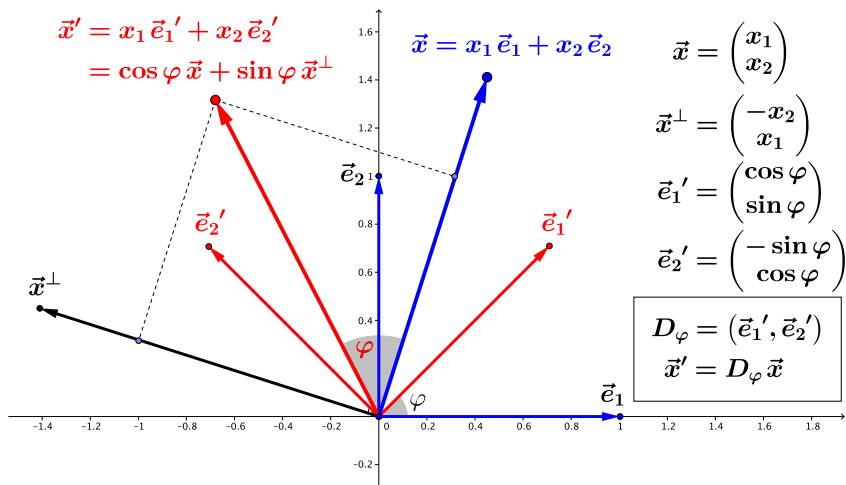




Aus dem Grenzwert $e^{i\varphi} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + i\varphi/n)^n$ folgt mittels binomischer Formel und einiger Abschätzungen auch die – weit schneller konvergierende – Reihendarstellung

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^k}{k!} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Statt komplex können wir die ebene Drehung auch reell zweidimensional beschreiben:



$$D_\varphi \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \vec{x} = \cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{x}^\perp$$

Die *Additionstheoreme* für Sinus und Cosinus sind nichts als „Drehformeln“:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) = e^{i\varphi} e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)} = \cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi).$$

Indem man $z = x_1 + i x_2$ setzt und beide Darstellungen der Drehung vergleicht, sieht man:

Multiplikation mit $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ entspricht genau der Multiplikation mit der *Drehmatrix*

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Man kann nicht nur die komplexen Drehfaktoren mit den ebenen Drehmatrizen identifizieren, sondern – das macht die Polarform sofort klar – ganz \mathbb{C} mit einer Teilmenge aller reellen 2×2 -Matrizen:

$$a + i b \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

Dies ist die klassische Matrix-Darstellung des Körpers der komplexen Zahlen. Insbesondere: $i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Wie beschreibt man die Drehung um einen anderen Punkt $z_0 \neq 0$?

Ganz einfach: $z \mapsto z_0 + D_\varphi(z - z_0)$.

Da der Nullpunkt auf $(E - D_\varphi)z_0$ abgebildet wird und damit im allgemeinen kein Fixpunkt ist, kann man dies nicht allein durch eine Matrix-Multiplikation ausdrücken, weshalb man in der Computergrafik sogenannte *homogene Koordinaten* verwendet.

5. Raumdrehungen

Drehungen um den Nullpunkt im \mathbb{R}^3 werden durch Angabe einer Drehachse \vec{a} mit $|\vec{a}| = 1$ sowie eines Drehwinkels festgelegt. Das sind im wesentlichen insgesamt *drei* skalare Freiheitsgrade, da man ja die Drehachse durch Angabe von Längen- und Breitengrad auf der Einheitskugel definieren kann. Wir notieren die noch zu bestimmende Drehmatrix in der Form $D_{\vec{a},\varphi}$.

Zunächst betrachten wir wieder so kleine Drehwinkel ε , dass bis auf einen Fehler zweiter Ordnung eine zum Ortsvektor *und zur Drehachse* senkrechte Positionsänderung resultiert:

$$D_{\vec{a},\varepsilon} \vec{x} = \vec{x} + \varepsilon \vec{a} \times \vec{x} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Nun gilt

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =: A \vec{x}$$

und damit (Matrizen-Exponentialfunktion!)

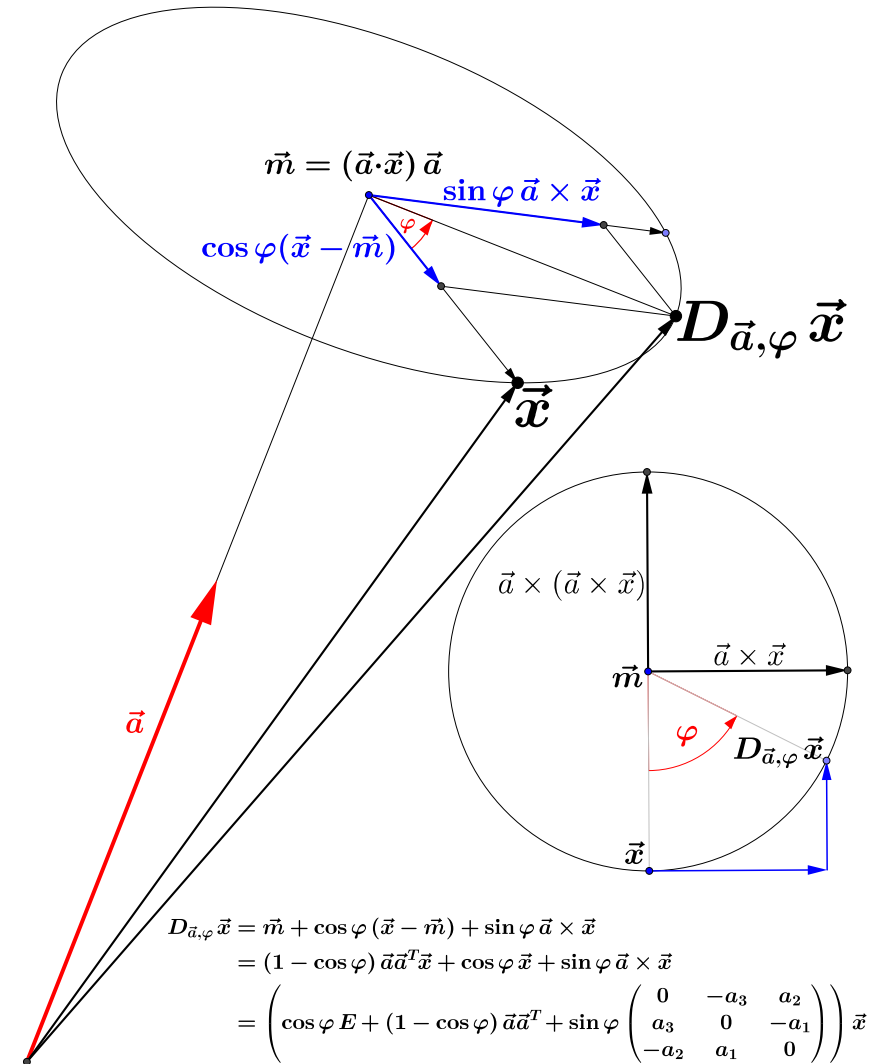
$$D_{\vec{a},\varphi} \vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{\varphi A}{n} \right)^n \vec{x} = e^{\varphi A} \vec{x}$$

$$D_{\vec{a},\varphi} = e^{\varphi A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi A)^k}{k!} \quad \text{und} \quad A = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{D_{\vec{a},\varphi} - E}{\varphi}.$$

Es gilt $A^3 = -A$, da nach Graßmann $\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x})) = -\vec{a} \times \vec{x}$. (Man beachte die Analogie zu $i^3 = -i$.) Daher $E + \varphi A + \frac{\varphi^2}{2!} A^2 + \frac{\varphi^3}{3!} A^3 + \dots = E + \sin \varphi A + (1 - \cos \varphi) A^2$,

$$D_{\vec{a},\varphi} \vec{x} = \vec{x} + \sin \varphi \vec{a} \times \vec{x} + (1 - \cos \varphi) \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{x})$$

Anschauliche Herleitung der Formel für $D_{\vec{a},\varphi}$:



$$\begin{aligned} D_{\vec{a},\varphi} \vec{x} &= \vec{m} + \cos \varphi (\vec{x} - \vec{m}) + \sin \varphi \vec{a} \times \vec{x} \\ &= (1 - \cos \varphi) \vec{a} \vec{a}^T \vec{x} + \cos \varphi \vec{x} + \sin \varphi \vec{a} \times \vec{x} \\ &= \left(\cos \varphi E + (1 - \cos \varphi) \vec{a} \vec{a}^T + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \right) \vec{x} \end{aligned}$$

Man beachte dabei $|\vec{a}| = 1$, $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{a} \times (\vec{x} - \vec{m})$.

Die Spalten der Drehmatrix sind auch im \mathbb{R}^3 -Fall die – um die Achse \vec{a} mit Winkel φ – verdrehten Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T$, d.h.

$$D_{\vec{a},\varphi} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'),$$

da ja $D_{\vec{a},\varphi} \vec{e}_i = \vec{e}_i' = (d_{1i}, d_{2i}, d_{3i})^T$ ($i = 1, 2, 3$).

Es gilt (folgt unmittelbar aus der Formel für $D_{\vec{a},\varphi}$):

$$\begin{aligned} d_{11} + d_{22} + d_{33} &= 1 + 2 \cos \varphi \\ d_{32} - d_{23} &= 2a_1 \sin \varphi \\ d_{13} - d_{31} &= 2a_2 \sin \varphi \\ d_{21} - d_{12} &= 2a_3 \sin \varphi \end{aligned}$$

Man kann also φ und \vec{a} (Drehwinkel und Drehachse) aus den Komponenten d_{ik} der verdrehten Einheitsvektoren erschließen.

Drehungen um die *Koordinatenachsen*:

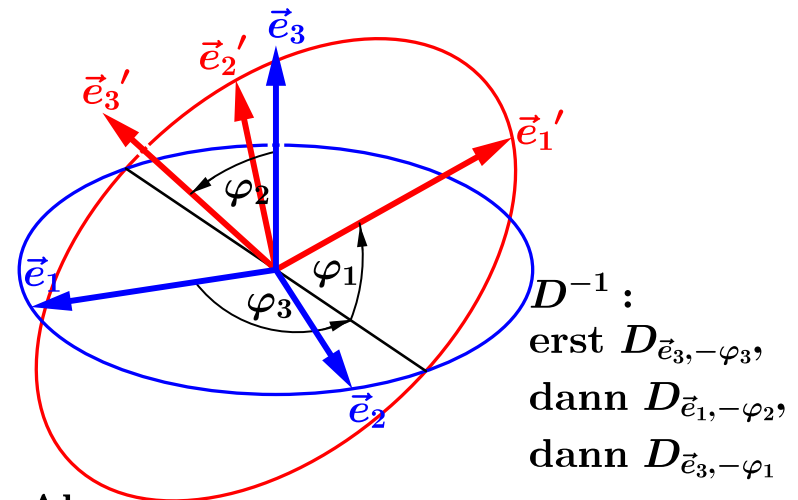
$$D_{\vec{e}_1,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad D_{\vec{e}_2,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$D_{\vec{e}_3,\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese drei Matrizen gehen durch *zyklische Vertauschung* der Matrixelemente auseinander hervor; auf Index-Ebene: $(i, k) \mapsto (i + 1 \bmod 3, k + 1 \bmod 3)$.

Durch Hintereinanderschalten *dreier* solcher Achsendrehungen (z.B. erst um die z -Achse, dann um die x -Achse, dann wieder um die z -Achse) kann *jede beliebige* Drehung um eine Achse durch $\vec{0}$ erzeugt werden; Stichwort: *Eulersche Winkel*. Dabei kommt es genau auf die Reihenfolge an:

Die Verknüpfung räumlicher Drehungen ist *nicht kommutativ*.



Also :

$$D = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3') = D_{\vec{e}_3,\varphi_3} D_{\vec{e}_1,\varphi_2} D_{\vec{e}_3,\varphi_1}$$

Die **Eulerschen Winkel** $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ kann man durch die Spalten oder Elemente der Drehmatrix ausdrücken:
 $\varphi_2 = \arccos(\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3') = \arccos d_{33}$;

$$\varphi_3 = \pm \arccos\left(\vec{e}_1 \cdot \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3'}{|\vec{e}_3 \times \vec{e}_3'|}\right) = \pm \arccos\left(\frac{-d_{23}}{\sqrt{1-d_{33}^2}}\right);$$

$$\varphi_1 = \pm \arccos\left(\vec{e}_1' \cdot \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_3'}{|\vec{e}_3 \times \vec{e}_3'|}\right) = \pm \arccos\left(\frac{d_{21}d_{13} - d_{11}d_{23}}{\sqrt{1-d_{33}^2}}\right).$$

Dabei wählen wir $\varphi_3 < 0$ genau dann, wenn $d_{13} < 0$, und $\varphi_1 < 0$ genau dann, wenn $d_{31} < 0$.

Bleiben noch die *Sonderfälle* $d_{33} = \pm 1$, d.h. $\vec{e}_3' = \pm \vec{e}_3$.

Dann setzen wir

$$\varphi_3 = 0, \quad \varphi_1 = \pm \arccos(\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1') = \pm \arccos d_{11},$$

wobei $\varphi_1 < 0$ genau dann, wenn $d_{21} < 0$, ferner

$$\varphi_2 = 0, \text{ falls } \vec{e}_3' = \vec{e}_3, \quad \varphi_2 = \pi, \text{ falls } \vec{e}_3' = -\vec{e}_3.$$

Es ist überhaupt nicht von vornherein klar, dass jede denkbare Verdrehung des Koordinatensystems, repräsentiert durch eine Drehmatrix $D = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, wobei $|\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = |\vec{e}_3'| = 1$, $\vec{e}_1' \perp \vec{e}_2'$, $\vec{e}_1' \times \vec{e}_2' = \vec{e}_3'$, eine Drehung *um eine Achse* ist. Euler hat dies als erster bewiesen. Anschaulich formuliert:

Nimmt man einen Ball von seinem Platz, wirft ihn an die Wand und legt ihn dann zurück auf denselben Fleck, so befinden sich mindestens *zwei* seiner Punkte wieder am alten Ort.

Eulers Theorem Jede Drehung im \mathbb{R}^3 ist eine Drehung um eine Achse. D.h.:

Ist D eine Drehmatrix, so gibt es einen Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ mit $D\vec{a} = \vec{a}$.

Beweis:

$$\det(D - E) = \det((E - D^T)D) = \det(E - D^T) \det D = \det(E - D^T) = \det(E - D) = 0. \quad \blacksquare$$

Es gibt andere Varianten der Zusammenstellung von Euler-Winkeln neben der exemplarisch angegebenen, indem man z.B. *Neigungs-, Gierungs- und Rollbewegungen* betrachtet, also Drehungen um alle *drei* Koordinatenachsen (bei Fahrzeugen: Quer-, Hoch- und Längsachse) zu einer Gesamtdrehung zusammensetzt.

Drehmatrizen u. Eulerwinkel mit MAXIMA

Der erste der beiden MAXIMA-Befehle erzeugt die Drehmatrix zu vorgegebener Drehachse a1,a2,a3 und vorgegebenem Drehwinkel phi. Der zweite hat als Input eine Drehmatrix Dreh und liefert als Ergebnis eine Liste [phi1,phi2,phi3] der drei Euler-Winkel.

```
Dreh(a1,a2,a3,phi):=
(1-cos(phi))*matrix([a1^2,a1*a2,a1*a3],
[a2*a1,a2^2,a2*a3],[a3*a1,a3*a2,a3^2])
+cos(phi)*matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1])
+sin(phi)*matrix([0,-a3,a2],[a3,0,-a1],[-a2,a1,0]);
```

```
Euler(Dreh):=
block([v1,v3,v11,phi],
if Dreh[1,3]>=0 then v3:1 else v3:-1,
if Dreh[3,1]>=0 then v1:1 else v1:-1,
if Dreh[2,1]>=0 then v11:1 else v11:-1,
if Dreh[3,3]=1 then phi:[v11*acos(Dreh[1,1]),0,0],
if Dreh[3,3]=-1 then phi:[v11*acos(Dreh[1,1]),%pi,0],
if -1<Dreh[3,3] and Dreh[3,3]<1 then
phi:[v1*acos((Dreh[2,1]*Dreh[1,3]-Dreh[1,1]*
Dreh[2,3])/sqrt(1-Dreh[3,3]^2)),
acos(Dreh[3,3]),
v3*acos(-Dreh[2,3]/sqrt(1-Dreh[3,3]^2))],
phi);
```

Leonhard Euler (1707-1783), der größte Mathematiker und Naturwissenschaftler seines Zeitalters, hat ein ungeheures Werk hinterlassen, unzählige mathematische Begriffe und Zusammenhänge entdeckt und formuliert. Es wurde gesagt, er habe – etwa vom zwanzigsten Lebensjahr bis zu seinem Tode - alle zwei Wochen eine bedeutende Entdeckung gemacht. Zu diesen Entdeckungen gehören Formeln wie $\mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{K} + \mathbf{2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Aufgewachsen in Basel und schon als Kind von dem berühmten Basler Professor Johann Bernoulli unterrichtet und gefördert, wirkte er später in Sankt Petersburg und Berlin.

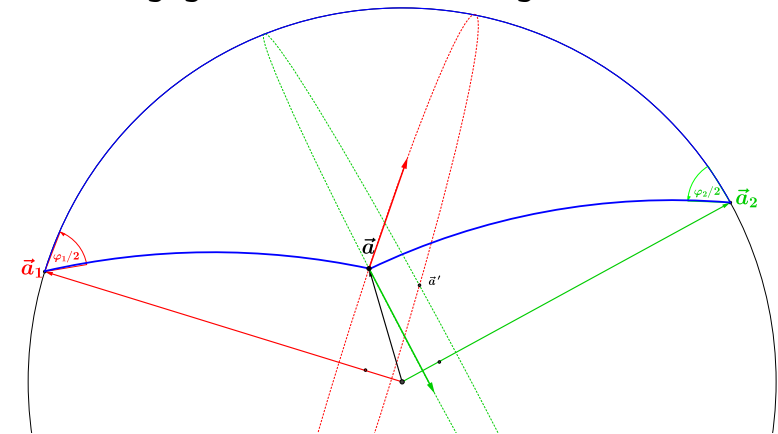
Die Petersburger Akademie hat noch Jahrzehnte nach seinem Tode jedes Jahr mehrere bislang unpublizierte Eulersche Arbeiten herausgebracht.

Er war schon völlig erblindet, als er noch mehrere bedeutende Werke verfasste (d.h. einem Mitarbeiter diktierte), so ungeheuer war seine mathematische Vorstellungskraft und Fähigkeit, auch komplizierteste Rechnungen im Kopfe auszuführen. Zu diesen späten Werken zählen seine berühmte *Vollständige Anleitung zur Algebra*, ein von der französischen Marine verwendetes Werk über Schiffbau und Schiffahrtkunst sowie seine Dioptrik.



6. Zwei Drehungen nacheinander

Wir bestimmen geometrisch-konstruktiv, welche Drehung $D_{\vec{a},\varphi}$ sich aus der *Hintereinanderschaltung* zweier Drehungen $D_{\vec{a}_1,\varphi_1}$ und $D_{\vec{a}_2,\varphi_2}$ ergibt. Dabei können wir $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi]$ voraussetzen (ggf. Richtungswechsel der Drehachse). Es ist klar, dass \vec{a} ein Punkt der Einheitskugel ist, der nach Hintereinanderausführung der Drehungen wieder am selben Platz landet. Daher gibt es ein *Großkreisdreieck* auf der Kugel mit den Eckpunkten $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}$ und den Winkeln $\varphi_1/2$ sowie $\varphi_2/2$ in den vorgegebenen Drehrichtungsecken:



Wird Punkt \vec{a} mit Winkel φ_1 um Achse \vec{a}_1 gedreht, landet er bei Punkt \vec{a}' ; eine anschließende Drehung mit Winkel φ_2 um Achse \vec{a}_2 führt zum Ausgangspunkt zurück. Also ist die Achse \vec{a} invariant nach Hintereinanderausführung beider Drehungen und somit die resultierende Drehachse. Der Drehwinkel φ ist dann derjenige Winkel, um den \vec{a}_1 beim Übergang zu $D_{\vec{a}_2,\varphi_2}\vec{a}_1$ in Bezug auf die Achse \vec{a} verdreht wird.

Herleitung von Drehwinkel φ und Drehachse \vec{a} mittels sphärischer Trigonometrie:

Der *Winkel-Kosinussatz* liefert für den Innenwinkel γ in der Ecke \vec{a} die Darstellung

$$\cos \gamma = \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2}.$$

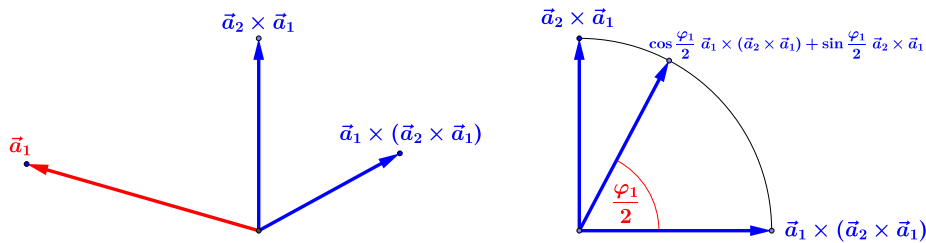
Da $\cos(\pi - \gamma) = -\cos \gamma$, ergibt sich für den Drehwinkel $\varphi = 2(\pi - \gamma)$:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2$$

Hat der Bogen von \vec{a}_1 bis \vec{a} die Länge A , gilt wiederum mit dem Winkel-Kosinussatz:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2} + \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos(\pi - \frac{\varphi}{2})}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin(\pi - \frac{\varphi}{2})} = \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi}{2}} \\ &= \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} + \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\sin \frac{\varphi}{2}}. \end{aligned}$$

Dabei wurde der vorher erhaltene Ausdruck für $\cos \frac{\varphi}{2}$ eingesetzt. Mit dem *Sinussatz* gilt $\sin A = \sin \frac{\varphi_2}{2} \frac{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{\sin \frac{\varphi}{2}}$.



Die beiden zueinander senkrechten Einheitsvektoren

$$\vec{a}_1 \quad \text{und} \quad \vec{b} := \frac{\cos \frac{\varphi_1}{2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \vec{a}_1 \times (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1) + \frac{\sin \frac{\varphi_1}{2}}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \vec{a}_2 \times \vec{a}_1$$

spannen die \vec{a}_1 - \vec{a} -Ebene auf, und es gilt:

$$\vec{a} = \cos A \vec{a}_1 + \sin A \vec{b}.$$

Setzen wir die Ausdrücke für $\cos A$ und $\sin A$ in diese Darstellung von \vec{a} ein und berücksichtigen noch, dass

nach Graßmann $\vec{a}_1 \times (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1) = \vec{a}_2 - (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) \vec{a}_1$, folgt schließlich:

$$\vec{a} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_1 + \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_2 + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_2 \times \vec{a}_1 \right)$$

Die erhaltenen, auch im Grenzfall $\vec{a}_2 = \pm \vec{a}_1$ gültigen Formeln für φ und \vec{a} legen nahe, die beiden ursprünglichen Drehungen durch die jeweils vier Parameter $(p_0, p_1, p_2, p_3) := (\cos \frac{\varphi_1}{2}, \sin \frac{\varphi_1}{2} a_{11}, \sin \frac{\varphi_1}{2} a_{12}, \sin \frac{\varphi_1}{2} a_{13})$ u. $(q_0, q_1, q_2, q_3) := (\cos \frac{\varphi_2}{2}, \sin \frac{\varphi_2}{2} a_{21}, \sin \frac{\varphi_2}{2} a_{22}, \sin \frac{\varphi_2}{2} a_{23})$ zu repräsentieren; ferner $\mathbf{p} := (p_1, p_2, p_3)$, $\mathbf{q} := (q_1, q_2, q_3)$. Mit $r_0 := \cos \frac{\varphi}{2}$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) := \sin \frac{\varphi}{2} \vec{a}^T$ gilt dann:

$$r_0 = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} = q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}$$

Bei der Herleitung dieser **Produktformel**, die *genau dem Quaternionen-Produkt* $(r_0, \mathbf{r}) = (q_0, \mathbf{q})(p_0, \mathbf{p})$ entspricht (!!), wurde $\varphi_1, \varphi_2 \in (0, \pi]$ vorausgesetzt; man kann bei echten Drehungen die Drehachsen so wählen, dass dies erfüllt ist.

Die Parameter $r_0 = \cos \frac{\varphi}{2}$ und $(r_1, r_2, r_3) = \sin \frac{\varphi}{2} \vec{a}^T$ bleiben bei gleichzeitigem Übergang von φ zu $-\varphi$ und von \vec{a} zu $-\vec{a}$ *dieselben*, genau wie die Drehung. Da die Produktformel für Winkel zwischen 0 und π und *beliebige Drehachsen* gilt, bleibt sie somit auch gültig für $-\pi \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ und damit für *alle* Drehungen.

Repräsentiert man die Drehung um die Achse \vec{a} mit Winkel φ durch die Parameter

$$(r_0, r_1, r_2, r_3) = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, a_1 \sin \frac{\varphi}{2}, a_2 \sin \frac{\varphi}{2}, a_3 \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

ergibt sich für die Drehmatrix die Darstellung:

$$D_{\vec{a}, \varphi} = 2 \begin{pmatrix} r_0^2 + r_1^2 - \frac{1}{2} & r_1 r_2 - r_0 r_3 & r_1 r_3 + r_0 r_2 \\ r_2 r_1 + r_0 r_3 & r_0^2 + r_2^2 - \frac{1}{2} & r_2 r_3 - r_0 r_1 \\ r_3 r_1 - r_0 r_2 & r_3 r_2 + r_0 r_1 & r_0^2 + r_3^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Herleitung dazu:

$$\begin{aligned} D_{\vec{a}, \varphi} &= \cos \varphi E + (1 - \cos \varphi) \begin{pmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & a_2 a_3 \\ a_3 a_1 & a_3 a_2 & a_3 a_3 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + 2 \begin{pmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 & r_1 r_3 \\ r_2 r_1 & r_2^2 & r_2 r_3 \\ r_3 r_1 & r_3 r_2 & r_3^2 \end{pmatrix} + 2 r_0 \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei wurde $\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = r_0^2 - r_1^2 - r_2^2 - r_3^2$, $1 - \cos \varphi = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ und $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ benutzt sowie $\cos \frac{\varphi}{2} = r_0$ und schließlich $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$, $\sin \frac{\varphi}{2} a_i = r_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Zusammenfassung zu *einer* Matrix ergibt die oben angegebene Darstellung für $D_{\vec{a}, \varphi}$, wenn noch $r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1$ beachtet wird.

Schon Leonhard Euler gab 1770 die obige *rationale Parametrisierung* einer Drehmatrix an: Mit $R^2 := r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$

$$\frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} r_0^2 + r_1^2 - r_2^2 - r_3^2 & 2(r_1 r_2 - r_0 r_3) & 2(r_1 r_3 + r_0 r_2) \\ 2(r_2 r_1 + r_0 r_3) & r_0^2 + r_2^2 - r_1^2 - r_3^2 & 2(r_2 r_3 - r_0 r_1) \\ 2(r_3 r_1 - r_0 r_2) & 2(r_3 r_2 + r_0 r_1) & r_0^2 + r_3^2 - r_1^2 - r_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}.$$



Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) stellte 1840, also

vor Hamilton, die Produktformel zur Berechnung der Komposition zweier Drehungen auf (natürlich *ohne* die Begriffe Skalar- und Vektorprodukt).

In der Literatur heute ist meist von *Euler-Rodrigues-Parametern* und der *Euler-Rodrigues-Formel* die Rede, weil schon

Euler (auf anderem Wege) die rationale Drehmatrixdarstellung mit praktisch denselben Drehungsparametern angab.

Rodrigues' wichtige Publikationen blieben längere Zeit unbeachtet. Schon in seiner Dissertation stellte er die jedem Mathematiker als *Rodrigues-Formel* bekannte elegante Darstellung $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ der *Legendre-Polynome* auf. Als französischer Jude spanischer Abstammung konnte er nicht die akademische Laufbahn einschlagen und wurde Bankier, war maßgeblich am Aufbau des französischen Eisenbahnwesens beteiligt. Trotz seines Reichtums vertrat er sozialreformerisch-sozialistische Ansichten, war mit Saint-Simon eng befreundet und formulierte auch sehr moderne Ansichten hinsichtlich der Frauenemanzipation. Seine beachtenswerten mathematischen Schriften verfasste er nebenher.

Wir werden bei der Zuordnung

$$(\vec{a}, \varphi) \mapsto (r_0, r_1, r_2, r_3) = \left(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2} a_1, \sin \frac{\varphi}{2} a_2, \sin \frac{\varphi}{2} a_3 \right)$$

von *Rodrigues-Parametern* sprechen.

7. Rodrigues-Parameter und Einheitskugel

Eine der Drehmatrix $D_{\vec{a},\varphi}$ zugeordnete Quaternion $p = \cos \frac{\varphi}{2} + a_1 \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{i} + a_2 \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{j} + a_3 \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{k} = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a}$ hat den Betrag 1, ist also Punkt der *Einheitssphäre*

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}.$$

Und ist eine zweite Einheits-Quaternion q auf gleiche Weise der Drehmatrix $D_{\vec{b},\psi}$ zugeordnet, so entspricht die Quaternion pq der Drehmatrix $D = D_{\vec{a},\varphi} D_{\vec{b},\psi}$.

Soweit die Analogie zur Zuordnung der Einheitskugel $S^1 = \{e^{i\varphi} \mid 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ zu den ebenen Drehmatrizen. Es gibt aber einen *grundsätzlichen Unterschied*, den wir nun ausführlich diskutieren.

Da die Rodrigues-Parameter den *halben* Drehwinkel benutzen, ergeben sich bei Drehwinkelangabe im Format $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ nur Einheitsquaternionen mit *positiver* reeller (erster) Komponente, hingegen bei Drehwinkelangabe im Format $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ (z.B.) nur Quaternionen mit *negativer* reeller Komponente. Und Verschiebung des Drehwinkels um 2π entspricht einer Multiplikation der Quaternion mit -1; zwei entgegengesetzt gleiche Einheitsquaternionen werden also *derselben* Drehung zugeordnet:

$$D_{\vec{a},\varphi} = D_{\vec{a},\varphi \pm 2\pi}, \text{ aber } \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a} = -\cos \frac{\varphi \pm 2\pi}{2} - \sin \frac{\varphi \pm 2\pi}{2} \mathbf{a}$$

Ebenso (das Winkelformat $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ betreffend):

$$D_{\vec{a},\varphi} = D_{-\vec{a},2\pi-\varphi}, \text{ aber } \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a} = -\cos \frac{2\pi-\varphi}{2} - \sin \frac{2\pi-\varphi}{2} \mathbf{a}$$

Während beim Winkelformat $-\pi < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ stets $p_0, q_0 \geq 0$ gilt, liefert die Produktformel aus Abschnitt 6 durchaus manchmal $r_0 < 0$: Für $0 < \varphi_1, \varphi_2 \leq \pi$ gilt $\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} (1 + \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) = 1 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \wedge \vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, $\cos \frac{\varphi}{2} = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2}{2} (1 - \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) = -1 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = \pi \wedge \vec{a}_1 = \vec{a}_2$. Mit $\varphi = 2 \arccos r_0$ ergibt sich $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und *nicht* $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Die *Drehmatrizen* hingegen repräsentieren die Drehung in umkehrbar eindeutiger Weise: *eine* Drehung, *eine* Drehmatrix.

Aber schon die Parameter \vec{a} und φ einer Drehung sind *nicht* eindeutig festgelegt. Bei der Nulldrehung, einem trivialen Sonderfall, ist der Winkel modulo 2π auf den Wert 0 festgelegt, die Achse ist beliebig. Bei jeder *echten* Drehung (d.h. einer Drehung, bei der nicht alle Punkte fest bleiben) sind die Drehachse \vec{a} und der Drehwinkel, letzterer natürlich wieder modulo 2π , nur bis auf's Vorzeichen festgelegt. Genauso ist die einer Drehung zugeordnete Quaternion *nur bis auf's Vorzeichen* festgelegt!

Welche Parameter \vec{a} und φ passen zu einer *beliebig vorgegebenen* Quaternion $q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}$ mit $|q| = 1$?

Klar ist: Es gibt *genau einen* Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ mit $q_0 = \cos \frac{\varphi}{2}$, nämlich $\varphi = 2 \arccos q_0$, und im Falle $0 < \varphi < 2\pi$ (d.h. im Falle $q_0 \neq \pm 1$) gibt's *genau einen*

Einheitsvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $q_i = \sin \frac{\varphi}{2} a_i$ ($1 \leq i \leq 3$). Die Quaternion q ist also der Drehmatrix $D_{\vec{a}, \varphi}$ zugeordnet. Andererseits kann diese Drehmatrix direkt aus den q -Komponenten berechnet werden, weshalb *keine andere* Drehmatrix zu q passt.

Die Gesamtheit *aller zur selben Drehmatrix gehörenden* Achse-Winkel-Paare ist $(\pm \vec{a}, \pm \varphi \text{ modulo } 2\pi)$ mit den soeben bestimmten \vec{a} und φ . Zuordnungen per Rodrigues-Parametrisierung:

$$\boxed{(\pm \vec{a}, \pm \varphi + 2k \cdot 2\pi) \mapsto q \text{ und } (\pm \vec{a}, \pm \varphi + (2k + 1) \cdot 2\pi) \mapsto -q}$$

für bel. $k \in \mathbb{Z}$. *Stets* sind also q und $-q$ derselben Drehmatrix zugeordnet.

Doppeldeutigkeit der Quaternionen-Repräsentation und der Drehachsenwahl gehen Hand in Hand:

$$\boxed{(\vec{a}, \varphi) \mapsto q, (-\vec{a}, 2\pi - \varphi) \mapsto -q}$$

(Im Grenzfall $q = \pm 1$, der Drehung um den Winkel 0 modulo 2π , gibt's natürlich keine bestimmte Achszuordnung.)

Die Zuordnung *je zweier* antipodaler Punkte der Einssphäre in \mathbb{H} zu *einer* Drehung im \mathbb{R}^3 kann man *nicht* etwa durch die Alternative $(\vec{a}, \varphi) \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi \vec{a})$ vermeiden:

- 1) *Allen* Halbkreisdrehungen würde *dieselbe* Quaternion -1 zugeordnet;
- 2) Zweifachdrehung und Quaternionenprodukt passten nicht mehr zusammen.

8. Matrix-Darstellung von \mathbb{H} ; Oktonionen

Annalog zu den komplexen Zahlen kann man die Quaternionen als *Matrizen* und ihr Produkt als Matrizenmultiplikation darstellen. Dazu betrachten wir die Formulierungen des Quaternionenproduktes zu Beginn von Abschnitt 3.

Fasst man die Quaternionen als (Spalten-)Vektoren im \mathbb{R}^4 auf, kann man das Produkt $(s, u, v, w)(t, x, y, z)$ auch als Multiplikation mit einer Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} s & -u & -v & -w \\ u & s & -w & v \\ v & w & s & -u \\ w & -v & u & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Und aufgrund des Assoziativgesetzes der Quaternionen-Multiplikation ist klar, dass dann auch der vektorielle Faktor durch eine entsprechende Matrix ersetzt werden kann, um als Ergebnis die *Matrix* zu erhalten, die der Multiplikation von links mit $(s, u, v, w)(t, x, y, z)$ entspricht:

$$\begin{pmatrix} s & -u & -v & -w \\ u & s & -w & v \\ v & w & s & -u \\ w & -v & u & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & -x & -y & -z \\ x & t & -z & y \\ y & z & t & -x \\ z & -y & x & t \end{pmatrix}$$

Um an die Matrixdarstellung der komplexen Zahlen aus Abschnitt 4 anknüpfen zu können, *vertauschen* wir hier die zweite und dritte Zeile, die zweite und dritte Spalte. Dann ersetzen wir $\begin{pmatrix} s & -v \\ v & s \end{pmatrix}$ durch $a = s + iv$ sowie $\begin{pmatrix} u & -w \\ w & u \end{pmatrix}$ durch $b = u + iw$.

Damit erhalten wir folgende **Darstellung von Quaternionen durch komplexe 2 × 2-Matrizen**:

$$q = s + u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$$

mit $a = s + i v$ und $b = u + i w$.

Die Determinante der Matrix ist $|a|^2 + |b|^2 = |q|^2$, der Einssphäre in \mathbb{H} entsprechen also die Matrizen mit Determinante 1, ferner („adjungierte Matrix“)

$$\bar{q} = s - u\mathbf{i} - v\mathbf{j} - w\mathbf{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}}^T$$

Aufgrund der Herleitung aus dem Quaternionenprodukt ist klar, dass die Produkte je zweier solcher Matrizen wieder vom selben Typ sind. Wir überprüfen es durch explizite Ausrechnung:

$$\begin{pmatrix} a_1 & -\bar{b}_1 \\ b_1 & \bar{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & -\bar{b}_2 \\ b_2 & \bar{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - \bar{b}_1 b_2 & -a_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_1 \bar{a}_2 \\ b_1 a_2 + \bar{a}_1 b_2 & -b_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 \end{pmatrix}$$

$$\overline{a_1 a_2 - \bar{b}_1 b_2} = -b_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_1 \bar{a}_2 \text{ und}$$

$$\overline{-b_1 a_2 + \bar{a}_1 b_2} = -a_1 \bar{b}_2 - \bar{b}_1 \bar{a}_2.$$

Zu erwähnen ist noch, dass im Falle $q = s + u\mathbf{i}$ sich die zugeordnete Matrix $\begin{pmatrix} s & -u \\ u & s \end{pmatrix}$ ergibt, also genau der Spezialfall der *reellen* Matrix-Darstellung *komplexer Zahlen*.

Eine etwas andere einfache Herleitung einer ähnlichen Matrix-Darstellung der Quaternionen:

Wir schreiben $q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} = z + w\mathbf{j}$ mit $z = a + b\mathbf{i}$ und $w = c + d\mathbf{i}$. Dann gilt $\bar{q} = \bar{z} - w\mathbf{j}$ und

$w\mathbf{j} = \mathbf{j}\bar{w}$, und für $q_1 = z_1 + w_1\mathbf{j}$ sowie $q_2 = z_2 + w_2\mathbf{j}$ und $z_3 + w_3\mathbf{j} = q_1 q_2$ folgt:

$$z_3 = z_1 z_2 - w_1 \bar{w}_2, \quad w_3 = z_1 w_2 + w_1 \bar{z}_2.$$

In Matrizenrechnungs-Form:

$$\begin{pmatrix} z_3 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}$$

und damit auch

$$\begin{pmatrix} -\bar{w}_3 & \bar{z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{w}_1 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\bar{w}_2 & \bar{z}_2 \end{pmatrix}.$$

Das führt zur Matrix-Darstellung

$$q = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$$

mit $z = a + b\mathbf{i}$ und $w = c + d\mathbf{i}$.

Falls $|q| = 1$, sind beide Matrixdarstellungen *unitäre* (=komplex-orthogonale) Matrizen.

Es liegt nun nahe, die Matrix-Konstruktion, die sowohl die komplexen Zahlen als 2 × 2-Matrizen *reeller* Zahlen ($\bar{r} = r$ für reelle Zahlen) als auch die Quaternionen als 2 × 2-Matrizen *komplexer* Zahlen darstellt, noch einen Schritt weiter zu führen und analoge 2 × 2-Matrizen von *Quaternionen* zu betrachten, was dann *acht*-dimensionale „Zahlen“ ergäbe.

Der Haken bei der Sache: Für Quaternionen gilt $\overline{pq} = \bar{q}\bar{p} \neq \bar{p}\bar{q}$, weshalb das Produkt zweier solcher Quaternionen-Matrizen im allgemeinen *nicht* wieder vom selben Typ ist. Dennoch hat Hamiltons Freund John Graves noch im selben Jahr 1843 eine Multiplikation für „Oktaven“ (so nannte er sie) entdeckt; unabhängig von ihm fand 1845 Arthur Cayley dieselbe Operation für 8-Tupel. Allerdings ist diese Multiplikation nicht nur nicht-kommutativ, sondern genügt auch nicht mehr dem Assoziativgesetz. Die *Oktonionen* (so nennt man sie heute, Mengensymbol

①) sind also noch weit weniger *echte Zahlen* als die Quaternionen. Jedoch gilt ein *Acht-Quadrate-Satz*.

Eine einheitliche Darstellung *aller drei* Paar-Multiplikationen (in \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathbb{O}) formulierte 1914 L.E. Dickson:

$$(a, b) \cdot (x, y) := (ax - \bar{y}b, ya + b\bar{x})$$

So kann man komplexe als Paare reeller Zahlen, Quaternionen als Paare komplexer Zahlen und Oktonionen als Paare von Quaternionen multiplizieren; es kommt wegen Nichtkommutativität im Oktonionen-Fall dabei *genau* auf die (uneinheitliche!) Reihenfolge der Faktoren rechts an. Eine *Matrixdarstellung* der Oktonionen gibt es *nicht*, da ihre Multiplikation ja *nicht assoziativ* ist.

Gibt's *weitere* Zahlssysteme? Der Präzisierung von Mindestanforderungen dienen die Begriffe der reellen *Algebra* (1) und *Divisionsalgebra* (2):

- (1) ein Vektorraum über \mathbb{R} mit einer bilinearen Multiplikation (z.B. \mathbb{R}^3 mit dem Vektorprodukt);
- (2) eine Algebra, in der $ax = b$ und $xa = b$ für $a \neq 0$ stets eindeutig lösbar sind (im endlichdimensionalen Fall \Leftrightarrow nullteilerfrei).

Satz von Hopf (1940): Endlichdimensionale *kommutative* Divisionsalgebren sind höchstens *zweidimensional*; \mathbb{R} und \mathbb{C} sind die einzigen mit Einselement. (Mit $z \circ w := \bar{z}\bar{w}$ gibt's keine Eins.)

Satz von Kervaire und Milnor (1958): Endlichdimensionale Divisionsalgebren haben die Dimension 1, 2, 4 oder 8.

(Kommutativität und Assoziativität der Multiplikation sind dabei *nicht* vorausgesetzt.)

Siehe [4], Kap. 7-11; [10], Kap. 20. Siehe auch Abschnitt 12.

9. De Moivre, Wurzeln, Konjugation

Eine Quaternion $q = a + \mathbf{b} = a + b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k} \neq 0$ mit Betrag $|q| = \sqrt{a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ können wir, analog zu den komplexen Zahlen, darstellen in *Polarform*

$$q = |q| (\cos \varphi + \sin \varphi (c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k}))$$

mit $\varphi = \arccos \frac{a}{|q|}$ und $c_i \sin \varphi = \frac{b_i}{|q|}$ ($1 \leq i \leq 3$); insbesondere $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \frac{a^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}{|q|^2} = 1$ und daher auch $|c|^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, falls $\sin \varphi \neq 0$. Da $\cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{c} = \cos \varphi + \sin \varphi (c_1 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + c_3 \mathbf{k})$ der Drehung $D_{\vec{c}, 2\varphi}$ entspricht und daher die n -te Potenz dieser Einheits-Quaternion der Drehung $D_{\vec{c}, 2n\varphi}$ ergibt sich die *de Moivresche Formel für Quaternionen*:

$$q^n = |q|^n (\cos n\varphi + \sin n\varphi \mathbf{c})$$

Man kann diese Formel auch – ohne Bezugnahme auf Drehmatrizen – einfach per Induktion beweisen:

$$\begin{aligned} (\cos n\varphi + \sin n\varphi \mathbf{c})(\cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{c}) &= \cos n\varphi \cos \varphi - \sin n\varphi \sin \varphi \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} \\ &\quad + (\cos n\varphi \sin \varphi + \sin n\varphi \cos \varphi) \mathbf{c} + \sin n\varphi \sin \varphi \mathbf{c} \times \mathbf{c} \\ &= \cos(n+1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Im Unterschied zur *komplexen* Polarform kommt die der Quaternionen mit Winkeln $\varphi = \arccos \frac{a}{|q|} \in [0, \pi]$ aus. Wird φ durch $2\pi - \varphi$ ersetzt, ändert der Sinus sein Vorzeichen und man muss entgegengesetzt gleiche c_i wählen. Wegen $D_{\vec{c}, 2\varphi} = D_{-\vec{c}, 4\pi - 2\varphi}$ ist die gemäß $(\vec{c}, \varphi) \mapsto D_{\vec{c}, 2\varphi}$ zugeordnete Drehmatrix aber eindeutig bestimmt. Für die speziellen Einheitsquaternionen $q = \pm 1$ ist der Winkel $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$ *eindeutig* bestimmt (modulo 2π), der Achsen-Vektor \vec{c} bleibt wegen $\sin \varphi = 0$ unbestimmt.

Wir diskutieren nun die *Wurzeln aus Quaternionen*, zunächst die aus Quaternionen *vom Betrage 1*.

Sei also $q = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{c}$ gegeben mit $|\mathbf{c}| = 1$ sowie $0 < \varphi < \pi$. Da der Betrag multiplikativ ist, sind die n -ten Wurzeln wiederum vom Typ $p = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{d}$ mit $|\mathbf{d}| = 1$ und $0 < \psi < \pi$ (*reelle* Quaternionen haben *reelle* Potenzen), so dass nach der de Moivreschen Formel folgt: $p^n = \cos n\psi + \sin n\psi \mathbf{d}$. Also:

$$\cos n\psi = \cos \varphi, \quad \sin n\psi = \pm \sin \varphi, \quad \mathbf{d} = \pm \mathbf{c}.$$

D.h.: $\psi = \pm \varphi/n + k 2\pi/n$ ($0 \leq k < n$) und daher

$$p = \cos \frac{\pm \varphi + 2\pi k}{n} + \sin \frac{\pm \varphi + 2\pi k}{n} (\pm \mathbf{c}) \quad (0 \leq k < n),$$

und indem man im Falle „-“ auch k durch $-k$ ersetzt, sieht man:

$$q = \cos \varphi + \sin \varphi \mathbf{c} \text{ mit } |\mathbf{c}| = 1 \text{ und } 0 < \varphi < \pi$$

hat die n verschiedenen n -ten Wurzeln

$$p_k = \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \mathbf{c} \quad (0 \leq k < n).$$

Das Resultat ist auch geometrisch klar: Da die Quaternion q einer echten Drehung um die Achse \vec{c} entspricht und nur als Potenz einer Drehung um *dieselbe* Achse darstellbar ist, folgt alles aus den Eigenschaften *ebener* Drehungen und damit aus entsprechenden Aussagen über Wurzeln komplexer Zahlen vom Betrag 1.

Bleibt noch der Fall $q = \pm 1$. Da die reellen n -ten Wurzeln trivial sind, interessieren uns vor allem *nichtreelle* Wurzeln p . Mit den bisherigen Bezeichnungen gilt $\cos n\psi = \pm 1$, $\sin n\psi = 0$. Und dies gilt genau dann, wenn $e^{i\psi}$ eine *komplexe* n -te Wurzel aus ± 1 ist. D.h.:

Die Quaternion $p = \cos \psi + \sin \psi \mathbf{c}$ mit beliebigem (!) Vektor \mathbf{c} des Betrags 1 ist n -te Wurzel aus ± 1 genau dann, wenn $e^{i\psi}$ eine komplexe n -te Wurzel aus ± 1 ist.

Das bedeutet: *Jede* rein imaginäre Einheitsquaternion ist Quadratwurzel aus -1 , aber $+1$ hat nur *zwei* Quadratwurzeln, die beiden reellen; für $n \geq 3$ gibt es immer *unendlich viele* n -te Wurzeln sowohl aus $+1$ als auch aus -1 .

Bei den n -ten Wurzeln aus beliebigen Quaternionen $q \neq 0$ tritt nur ein Faktor $\sqrt[n]{|q|}$ hinzu, da ja Skalare mit allen Quaternionen kommutieren.

Lineare Gleichungen $ax = b$ und $xa = b$ mit $a \neq 0$ kann man im Quaternionen-Fall praktisch genauso lösen wie im Bereich der reellen oder komplexen Zahlen; man muss nur die Nichtkommutativität beachten und im ersten Fall *von links*, im zweiten Fall *von rechts* mit a^{-1} durchmultiplizieren und erhält so die Lösungen $x = a^{-1}b$ bzw. $x = ba^{-1}$.

Schon die Gleichung $ax = xa$, im Falle $a \in \mathbb{R}$ trivial, erfüllen für $a \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$ genau all diejenigen x , deren imaginärer Anteil parallel zu dem von a ist (dazu zählen auch alle *reellen* x); siehe nächste Seite. Setzen wir dabei insbesondere $|a| = |x| = 1$ voraus, erhalten wir eine Aussage über räumliche Drehungen:

Zwei Drehungen um Null sind genau dann in ihrer Reihenfolge vertauschbar, wenn sie dieselbe Drehachse haben oder eine die Identität (Nullrotation) ist.

Die Existenz *unendlich vieler* Wurzeln aus reellen Skalaren – mit Ausnahme der Quadratwurzeln aus positiven Zahlen – ist ein Hinweis darauf, wie sehr die Nicht-Kommutativität das Lösungsverhalten von Polynom-Gleichungen ändert.

Schon der Polynom-Begriff muss anders gefasst werden, da Koeffizienten rechts und links und bei höheren Potenzen *zwischen* den x -Faktoren stehen können. Z.B. $i x^n k + j + k x^n i \neq 0$ und $i x^n j + k + j x^n i \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{H}$. Aber immerhin sind Polynome mit *genau einem* Summanden höchster x -Potenz surjektive Abbildungen, besitzen also in \mathbb{H} eine Nullstelle; der Beweis ist anspruchsvoll, benutzt die Abbildungsgrad-Theorie.

Siehe [4], Kap. 7.

Nun einige weitere einfache *Beispiele zur Quaternionenalgebra*. Aus

$$pq = (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) = p_0 q_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}$$

und

$$qp = (q_0 + \mathbf{q})(p_0 + \mathbf{p}) = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}$$

folgt wegen $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$ und $\mathbf{q} \times \mathbf{p} = -\mathbf{p} \times \mathbf{q}$:

$$\boxed{\frac{1}{2}(pq - qp) = \mathbf{p} \times \mathbf{q}}$$

Natürlich auch (Fall $p_0 = q_0 = 0$):

$$\boxed{pq = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q}},$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(pq + qp) = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}$$

und

$$\boxed{\frac{1}{2}(pq - qp) = \mathbf{p} \times \mathbf{q}}.$$

Mit diesen Identitäten folgt insbesondere:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) &= \mathbf{p} \times (\mathbf{qr} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{p}(\mathbf{qr} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{qr} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{r})\mathbf{p}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{pqr} - \mathbf{qrp}) = \frac{1}{2}((\mathbf{pq} + \mathbf{qp})\mathbf{r} - \mathbf{q}(\mathbf{pr} + \mathbf{rp})) \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{q} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})\mathbf{r}; \end{aligned}$$

eine sehr kurze direkte, wenn auch etwas raffinierte Herleitung des *Graßmannschen Entwicklungssatzes*.

Mit etwas Übung wird die Quaternionen-Algebra so zu einem aus heutiger Sicht nützlichen Hilfsmittel der Vektorrechnung.

Ein zweites wichtiges Beispiel betrifft *Drehungen* (siehe Abschnitt 5). Mit den Identitäten $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp})$ und $\mathbf{p} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{pqr} - \mathbf{qrp})$ sowie $\mathbf{aa} = -1$ folgt:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a},\varphi} \mathbf{x} &= \mathbf{x} + \sin \varphi \mathbf{a} \times \mathbf{x} + (1 - \cos \varphi)\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{x} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}(\mathbf{ax} - \mathbf{xa}) + \sin^2 \frac{\varphi}{2}(\mathbf{aax} - \mathbf{axa}) \\ &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} \mathbf{x} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}(\mathbf{ax} - \mathbf{xa}) - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \mathbf{axa} \\ &= (\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a})\mathbf{x}(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a}) = q \mathbf{x} \bar{q}. \end{aligned}$$

D.h.: Repräsentiert man die Vektoren des \mathbb{R}^3 als rein imaginäre Quaternionen \mathbf{x} , wird die Drehungsabbildung $\vec{x} \mapsto D_{\vec{a},\varphi} \vec{x}$ innerhalb der Quaternionen dargestellt durch die sogenannte **Konjugation**

$$\boxed{\mathbf{x} \mapsto q \mathbf{x} \bar{q} \quad \text{mit } q = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a}}$$

Mit Rodrigues-Parametern erfasst man also auch die *Einzeldrehungen* per Quaternionen-Multiplikation.

Von der Konjugation *ausgehend*, zeigen wir noch auf umgekehrtem Weg, dass es eine Drehung ist:

Erstens ist $q \mathbf{x} \bar{q}$ *imaginär*,

$$\text{da } \overline{q \mathbf{x} \bar{q}} = q \bar{\mathbf{x}} \bar{q} = q(-\mathbf{x})\bar{q} = -q \mathbf{x} \bar{q}.$$

Zweitens ist $x \mapsto qx\bar{q}$ offenbar *linear* und *längentreu* (Multiplikativität des Betrags). Es ist also eine Drehung oder Spiegelung.

Drittens ist a ein *Fixpunkt* (Drehachse!):

$$(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} a)(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} a) = a \underbrace{(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} a)(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} a)}_{=1}$$

Bleibt viertens der Nachweis des *Drehwinkels* φ . Dazu betrachten wir $b = x - (x \cdot a)a$. Klar: $b \perp a$. Es folgt: $ba = b \times a$, $a(b \times a) = a \times (b \times a) = b$ (Graßmann); damit:

$$\begin{aligned} & (\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} a)b(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} a) \\ &= (\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} a)(\cos \frac{\varphi}{2} b - \sin \frac{\varphi}{2} b \times a) \\ &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} b + 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} a \times b - \sin^2 \frac{\varphi}{2} b \\ &= \cos \varphi b + \sin \varphi a \times b. \end{aligned}$$

Zusammengefasst:

Mit $q = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} a$ und $|a| = 1$ gilt

$$qx\bar{q} = (x \cdot a)a + \cos \varphi (x - (x \cdot a)a) + \sin \varphi a \times (x - (x \cdot a)a)$$

für beliebige rein imaginäre Quaternionen (also *Vektoren*) x .

Konjugation mit MAXIMA

Durch `konq(a,phi)` wird der Achse (Dreierliste) a und dem Winkel ϕ die unbenannte *Funktion* zugeordnet, welche einen Vektor (Dreierliste) via Konjugation entsprechend a und ϕ verdreht.

```
konq(a,phi):=buildq([A:a,Phi:phi],lambda([x],
([cos(Phi/2),sin(Phi/2)*A]..[0,x]..[cos(Phi/2),
-sin(Phi/2)*A])[2]));
```

Beispiel: `konq([1,0,0],%pi/3)([0,1,0]);` Antwort: `[0,1/2,sqrt(3)/2]`

10. Drehbewegungen und Quaternionen

Es wurden verschiedene Methoden zum rechnerischen Umgang mit Rotationen vorgestellt:

a) Man kann die *Euler-Winkel* der Rotation zugrundelegen und dann nacheinander die zugehörigen einfachen *Achsendrehungen* berechnen;

b) man kann Achse und Winkel zugrundelegen und die dadurch definierten *Drehmatrizen* anwenden oder aber die Vektoren als rein imaginäre *Quaternionen* darstellen und anhand der *Rodrigues-Parameter* die *Konjugation* mit einer passenden Einheitsquaternion berechnen;

c) man kann die Zusammensetzung zweier Drehungen zu einer resultierenden Gesamtdrehung einerseits durch Multiplikation der Drehmatrizen, andererseits durch Quaternionenmultiplikation berechnen.

Im Falle c) ist die Quaternionenmultiplikation (nur 16M + 12A vs. 27M + 18A) der effizientere Weg, im Falle b) ist die Matrix-Vektor-Multiplikation günstiger als die Konjugation mittels Quaternionen.

Bei der Zusammensetzung von Drehungen durch Achsendrehungen im Sinne von a) tritt bei manchen Winkel-Konstellationen der *Verlust eines Freiheitsgrades* auf (*gimbal lock*):

$$Z.B. D_{\vec{e}_3, \psi} D_{\vec{e}_2, \pi/2} D_{\vec{e}_1, \varphi} = D_{\vec{e}_1, \varphi - \psi}.$$

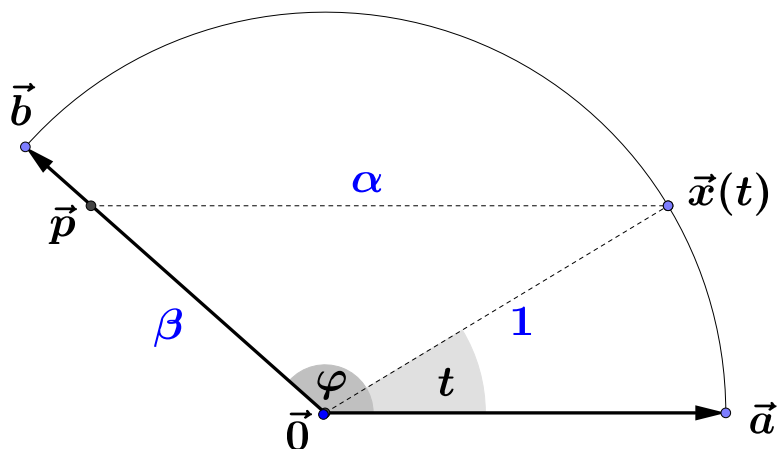
Je nach Aufgabenstellung haben also die verschiedenen Methoden Vorzüge oder Nachteile.

Bei der Beschreibung von Flugobjekten oder in der Computer-Animation geht es um die Repräsentation verschiedener aufeinanderfolgender Orientierungen bzw. Dreh-Positionen eines oder mehrerer Objekte.

Dabei stellt sich u.a. die Frage, wie man zwischen verschiedenen Positionen sinnvoll *interpoliert*.

Zwischen den Punkten der Einheitskugel im \mathbb{R}^3 kann man längs *Großkreisen* interpolieren:

\vec{a} und \vec{b} seien zwei beliebige Punkte auf der Einheitskugel und man sucht eine Parameterdarstellung $\vec{x}(t) = \alpha(t)\vec{a} + \beta(t)\vec{b}$, die den Weg längs des Großkreisbogens zwischen \vec{a} und \vec{b} beschreibt.



$$\vec{x}(t) = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \frac{\sin(\varphi - t)}{\sin \varphi} \vec{a} + \frac{\sin t}{\sin \varphi} \vec{b} \quad (0 \leq t \leq \varphi)$$

Auf das Dreieck mit den Ecken $\vec{0}$, $\vec{x}(t)$ und \vec{p} , das durch die Parallele zu $\vec{0}, \vec{a}$ durch $\vec{x}(t)$ entsteht, wenden wir den ebenen Sinussatz an und erhalten

$$\alpha : 1 = \sin(\varphi - t) : \sin(\pi - \varphi), \quad \beta : 1 = \sin t : \sin(\pi - \varphi).$$

Mit $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ folgt $\alpha = \frac{\sin(\varphi - t)}{\sin \varphi}$, $\beta = \frac{\sin t}{\sin \varphi}$ für $0 \leq t \leq \varphi$ und damit

$$\vec{x}(t) = \frac{\sin(\varphi - t)}{\sin \varphi} \vec{a} + \frac{\sin t}{\sin \varphi} \vec{b} \quad (0 \leq t \leq \varphi)$$

Analog sieht man, dass *dieselbe Parametrisierung* auch für $t > \varphi$, also für den *gesamten* Großkreis gilt.

Zwischen verschiedenen Orientierungen oder Drehmatrizen kann man *in analoger Weise* interpolieren, da sie ja durch die Rodrigues-Parameter als Einheitsquaternionen repräsentiert werden, also auch als Punkte einer *Sphäre*, wenn auch einer *dreidimensionalen*.

Seien also $p = \cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \mathbf{a}$ und $q = \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \mathbf{b}$ zwei Einheitsquaternionen. Den Winkel zwischen ihnen können wir bestimmen als $\omega = \arccos(p \cdot q)$ (gewöhnliches vierdimensional-reelles Skalarprodukt). Repräsentieren sie dreidimensionale Drehungen oder Orientierungen, können wir ausnutzen, dass Antipoden dieselbe Drehung darstellen, also durch Vorzeichenwahl $0 < \omega \leq \pi/2$ erzwingen. Dann ist

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sin(\omega - t)}{\sin \omega} p + \frac{\sin t}{\sin \omega} q \quad (0 \leq t \leq \omega)$$

die sozusagen *sphärisch-lineare Interpolation* zwischen den beiden Drehungen/Orientierungen. (Es gilt $|\mathbf{r}(t)|^2 = \frac{\sin^2(\omega - t)}{\sin^2 \omega} + \frac{\sin^2 t}{\sin^2 \omega} + \frac{2 \sin(\omega - t) \sin t \cos \omega}{\sin^2 \omega} = 1$, weil *dieselbe* Identität ja qua Konstruktion im dreidimensionalen Fall gilt.)

Diese Interpolationsformel ist der Grund-Baustein für eine höhere Interpolation mit mehreren Stütz- und Steuerpunkten analog zum *de Casteljauschen Algorithmus* aus dem CAGD-Bereich.

Drehungsinterpolation mit MAXIMA

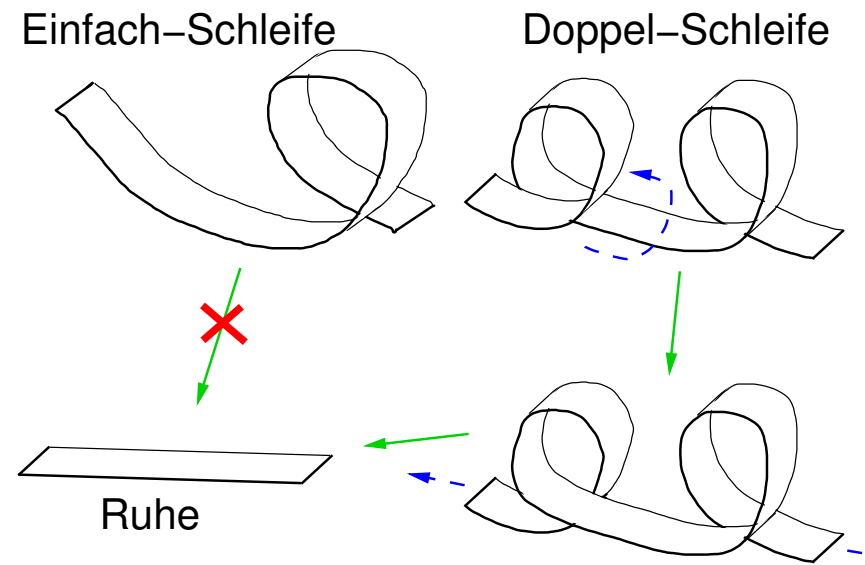
Es wird ein einfaches 3D-Objekt erzeugt, um die Wirkung einer Orientierungs- bzw. Drehungsinterpolation auf der Quaternionen-Einheitssphäre zu demonstrieren. Die Drehungsinterpolation wird mit einer Translation verknüpft, um einen *Bewegungseindruck* zu erzeugen. Die Funktionen von Seite 9 setzen wir voraus.

```
load(draw); rod(a,phi):=[cos(phi/2),sin(phi/2)*a];
konq(a,phi):=buildq([A:a,Phi:phi],lambda([x],[rod(A,Phi)..[0,x]..rod(A,Phi)'] [2])); sprod(a1,phi1,a2,phi2):=rod(a1,phi1)[1]*rod(a2,phi2)[1]+rod(a1,phi1)[2].rod(a2,phi2)[2];
r(a1,phi1,a2,phi2):=block([s,om,pa,pb],s:sprod(a1,phi1,a2,phi2),om:if s>=0 then acos(s) else acos(-s),pa:if s>=0 then rod(a1,phi1) else -rod(a1,phi1),pb:rod(a2,phi2), [buildq([0m:om,Pa:pa,Pb:pb],lambda([t],[sin(0m-t)/sin(0m)]*Pa+(sin(t)/sin(0m)]*Pb)),om]);
draw3d(triangle([3,0,0],[0,7,0],[0,0,1]), (Das Flugobjekt)
triangle([0,0,1],[0,7,0],[-3,0,0]),surface_hide=true,view=[50,135],proportional_axes=xyz,xrange=[-7,7],yrange=[-7,7],zrange=[-7,7]);
drehliste(a,phi,b,psi,tran,n):=block([R,om,d,dt,args],[R,om]:r(a,phi,b,psi),d:om/n,dt:tran/n,args:makelist(gr3d(triangle((R(k*d)..[0,[3,0,0]]..R(k*d)'] [2]+k*dt,(R(k*d)..[0,[0,7,0]]..R(k*d)'] [2]+k*dt,(R(k*d)..[0,[0,0,1]]..R(k*d)'] [2]+k*dt),triangle((R(k*d)..[0,[0,0,1]]..R(k*d)'] [2]+k*dt,(R(k*d)..[0,[0,7,0]]..R(k*d)'] [2]+k*dt,(R(k*d)..[0,[-3,0,0]]..R(k*d)'] [2]+k*dt),surface_hide=true,view=[50,135],proportional_axes=xyz,xrange=[-7+(tran[1]-abs(tran[1]))/2,7+(tran[1]+abs(tran[1]))/2],yrange=[-7+(tran[2]-abs(tran[2]))/2,7+(tran[2]+abs(tran[2]))/2],zrange=[-7+(tran[3]-abs(tran[3]))/2,7+(tran[3]+abs(tran[3]))/2]),k,0,n),args); Bsp.: p:drehliste([1,0,0],0,[-1/3,2/3,2/3],%pi,[0,50,0],80)$
args1:[delay=10,dimensions=[800,800],file_name="/home/us1/documents/Maxima/flugobjekt",terminal='animated_gif]; args:append(args1,p)$
funmake(draw,args)$ ''%$ (Abspeichern als Animated Gif)
```

Trotz aller „Analogie“ ist die Sphäre S^3 topologisch *nicht* mit einer Kugeloberfläche zu vergleichen; z.B. ist sie in eine Schar disjunkter (!) Großkreise zerlegbar, die alle miteinander verflochten sind (Hopf-Faserung).

Wir schildern noch eine topologische Eigenschaft von Verdrehungen, die zeigt, dass die *Doppel*repräsentation der Drehungen durch die Sphäre S^3 kein Makel, sondern eine *Notwendigkeit* ist:

Durch einen Papierstreifen im Raum mit gleichgerichteten schmalen Kanten machen wir den *zeitlichen* Verlauf der Verdrehung eines Objektes sichtbar, bei der zum Endzeitpunkt wieder die Anfangsposition eingenommen wird. An der langen Kante des Streifens ist sozusagen die Zeitskala aufgetragen. Indem wir nun den Papierstreifen verbiegen, *ohne die Orientierungen der Endpunkte zu ändern*, können wir *stetige Abänderungen* des Bewegungsablaufs sichtbar machen. Es ist dabei anschaulich evident, dass eine Einfachschleife *nicht* zum Verschwinden gebracht werden kann, wohl aber eine Zweifachschleife:



Die einer Doppelschleife entsprechende Orientierungsvariation ist *nullhomotop*, die der Einfachschleife entsprechende *nicht*.

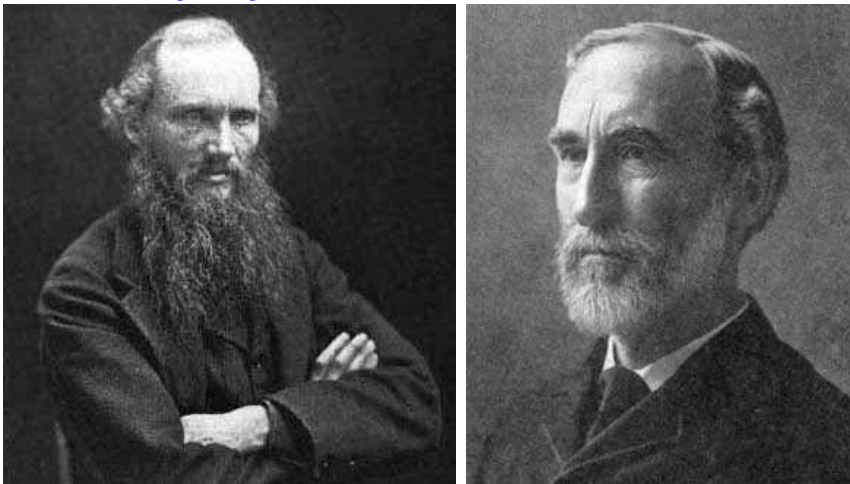
Ordnen wir den Orientierungsverläufen die zugehörigen Bahnen auf der Einheitssphäre in \mathbb{H} zu, wird der Unterschied klar:

Die Einfachschleife verbindet zwei *Antipoden* (!), die Doppelschleife führt zum selben Punkt zurück.

11. Die Physiker

Große Physiker seiner Zeit gingen ganz unterschiedlich mit Hamiltons Quaternionen um: Während James Clerk Maxwell sehr viel davon hielt, lehnte Lord Kelvin (1824-1907) sie beinahe feindselig ab:

„Quaternions came from Hamilton after his really good work had been done, and though beautifully ingenious, have been an unmixed evil to those who have touched them in any way.“



Der große US-amerikanische Physiker [Josiah Willard Gibbs \(1839-1903\)](#) erkannte im Gegensatz zu Lord Kelvin die eigenständige Bedeutung der Hamiltonschen *Vektorrechnung*, die über diejenige der Quaternionen weit hinausgeht und in Verbindung mit dem Matrizenbegriff (J. J. Sylvester, A. Cayley) zum wichtigen Werkzeug für Physik, Mathematik und Technik wurde und den passenden Symbolismus zur Umsetzung der Ideen von Graßmanns *Ausdehnungslehre* lieferte.

Nur weil die Elektronen „spinnen“, liefert das Paulische Ausschließungs-Prinzip ausreichend viele Elektronen pro Schale der Atomhülle... Der quantenmechanische Spin-Operator hat kein klassisches Analogon. Pauli gelang eine mathematische Formulierung dieses Operators, bei der die Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine wesentliche Rolle spielen, die „Paulischen Spin-Matrizen“; $-\sigma_y$, $i\sigma_z$ und $i\sigma_x$ entsprechen genau den Matrix-Darstellungen der Hamiltonschen Einheiten i , j bzw. k .



[Wolfgang Pauli \(1900-1958\)](#) formulierte das fundamentale Ausschließungsprinzip und sagte die Existenz des Neutrinos vorher. Er publizierte schon als Einundzwanzigjähriger einen umfassenden Enzyklopädie-Artikel über die noch recht neue Relativitätstheorie, der auch Einstein zu tiefst beeindruckte. Nobelpreis 1945.

Einen *relativ* einfachen Zugang zu Konzepten der theoretischen Physik, insbesondere zum Hamilton-Prinzip und den kanonischen Gleichungen sowie zu den Spin-Matrizen liefern die beiden Bücher von Leonard Susskind ([12], [13]). Siehe auch Hänsel und Neumann [7].

12. Einzigkeitsaussagen

12.1 Will man *irgendwie* das reelle Zahlenrechnen in die Ebene \mathbb{R}^2 ausdehnen, so dass neben der üblichen Vektoraddition

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y)$$

eine Multiplikation erklärt wird, derart, dass alle Körper-Rechenregeln gelten, ist die Linearkombinations-Schreibweise

$$a + b\mathbf{i} := (a, b)$$

nützlich; denn dadurch läuft alles auf die bloße Festlegung von \mathbf{i}^2 hinaus. Mit

$$\mathbf{i}^2 := \alpha\mathbf{i} + \beta,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, folgt

$$(a + b\mathbf{i})(x + \mathbf{i}y) = (\alpha x + \beta by) + \mathbf{i}(bx + ay + \alpha by)$$

zwangsläufig aus den Körper-Rechenregeln. Wie dürfen α und β gewählt werden?

Wegen $\mathbf{i} \neq 0$ und Nullteilerfreiheit eines Körpers darf nicht $\alpha = \beta = 0$ gewählt werden. Hätte $x^2 - \alpha x - \beta$ eine reelle Nullstelle $x_0 \neq 0$, so dass also

$$x^2 - \alpha x - \beta = (x - x_0)(x + \beta/x_0),$$

folgte

$$0 = \mathbf{i}^2 - \alpha\mathbf{i} - \beta = (\mathbf{i} - x_0)(\mathbf{i} - \beta/x_0),$$

was wegen $\mathbf{i} \notin \mathbb{R}$ wiederum der Nullteilerfreiheit widerspräche. Also muss gelten:

$$\frac{\alpha^2}{4} + \beta < 0.$$

Dies vorausgesetzt, definieren wir

$$\mathbf{j} := (\alpha - 2\mathbf{i})/|\alpha^2 + 4\beta|^{1/2}.$$

Dann folgt $\mathbf{j}^2 = -1$, und natürlich lässt sich jede Zahl $a + b\mathbf{i}$ auch in der Form $c + d\mathbf{j}$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ darstellen.

D.h.: Es gibt im wesentlichen *nur eine* komplexe Multiplikation.

12.2 Lässt sich auch im \mathbb{R}^3 mit der üblichen Vektoraddition eine Körper-Multiplikation verknüpfen?

Zur Klärung dieser Frage führen wir zweckmäßigerweise wieder die Linearkombinations-Schreibweise

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} := (a, b, c)$$

ein, mit einer Basis $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ des \mathbb{R}^3 . Analog zum zweidimensionalen Fall geht es dann nur noch um die Festlegung von $\mathbf{i}^2, \mathbf{j}^2, \mathbf{ij}$. Bestünde eine Beziehung

$$\mathbf{i}^2 = \alpha + \beta\mathbf{i}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, könnte man aufgrund der Überlegungen zum \mathbb{R}^2 o.B.d.A. $\mathbf{i}^2 = -1$ annehmen. Die „komplexe Ebene“ aller Zahlen vom Typ $a + b\mathbf{i}$ wäre ein Unterkörper des \mathbb{R}^3 . Für ein außerhalb dieser Ebene liegendes \mathbf{j} würde gelten

$$\mathbf{ij} = a_0 + b_0\mathbf{i} + c_0\mathbf{j}$$

mit gewissen $a_0, b_0, c_0 \in \mathbb{R}, c_0 \neq 0$. Also folgte

$$(\mathbf{i} - c_0)\mathbf{j} = a_0 + b_0\mathbf{i}, \quad \mathbf{j} = (\mathbf{i} - c_0)^{-1}(a_0 + b_0\mathbf{i}),$$

ein *Widerspruch*. Also ist $\mathbf{i}^2 = -1$ ausgeschlossen. Daher bilden $1, \mathbf{i}, \mathbf{i}^2$ eine Basis des \mathbb{R}^3 . Insbesondere gilt

$$\mathbf{i}^3 = \alpha + \beta\mathbf{i} + \gamma\mathbf{i}^2$$

mit gewissen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Da aber das Polynom $x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha$ eine *reelle* Nullstelle x_0 besitzt, so dass also

$$x^3 - \gamma x^2 - \beta x - \alpha = (x - x_0)(x^2 + \tilde{\beta}x + \alpha/x_0)$$

mit $\tilde{\beta} = x_0 - \gamma = \beta/x_0 + \alpha/x_0^2$, ergibt $x = \mathbf{i}$ wieder einen Verstoß gegen die Nullteilerfreiheit, da $\mathbf{i}^2 + \tilde{\beta}\mathbf{i} + \frac{\alpha}{x_0} \neq 0$ (Basis!).

D.h.: Im \mathbb{R}^3 *gibt es keine* zur üblichen Vektoraddition passende Körper-Multiplikation! (Nur Kommutativität der Multiplikation mit *reellen* Zahlen wurde implizit vorausgesetzt.)

12.3 Die Argumentation in 12.2 zeigt, dass es im \mathbb{R}^3 nicht nur keine Körper-Multiplikation gibt, sondern auch keine *Schiefkörper*-Multiplikation, bei der alle Elemente – wie im Quaternionen-Fall – mit *reellen* Zahlen kommutieren.

- Gibt's im \mathbb{R}^4 keine *kommutative* Multiplikation?

Wir betrachten allgemeiner sogar *irgendeinen* \mathbb{R} -Vektorraum

$$V = \{r_0 + r_1 \mathbf{i}_1 + \dots + r_{n-1} \mathbf{i}_{n-1} \mid r_0, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

mit $n > 1$. Durch die Schreibweise haben wir die reellen Zahlen mit einer Dimension des Vektorraumes identifiziert. Wir gehen aus von einem nullteilerfreien, distributiven, assoziativen und *kommutativen* Produkt, durch welches die Multiplikation in \mathbb{R} auf V ausgedehnt wird.

Sei nun $u \in V \setminus \mathbb{R}$. Dann sind die Potenzen $1, u, u^2, \dots, u^n$ linear abhängig. Es gibt also $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha_0 + \alpha_1 u + \dots + \alpha_n u^n = 0.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt das Polynom $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n$ in lineare und quadratische Faktoren mit reellen Koeffizienten. Da das nichtreelle Element u das Polynom annulliert, muss wegen Nullteilerfreiheit einer der *quadratischen* Faktoren $= 0$ sein; also gilt $u^2 = \alpha u + \beta$ mit gewissen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Für $\mathbf{i} := (\alpha - 2u)/|\alpha^2 + 4\beta|^{1/2}$ gilt dann $\mathbf{i}^2 = -1$, und die Menge aller $x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ stellt den Körper \mathbb{C} dar.

Zu jedem $v \in V$ gibt es analog ein annullierendes Polynom höchstens n -ten Grades, das über \mathbb{C} in Linearfaktoren zerfällt, so dass wegen Nullteilerfreiheit $v = a + b\mathbf{i}$ mit gewissen $a, b \in \mathbb{R}$.

D.h.: $V = \mathbb{C}$ ist der *einzige* endlichdimensionale \mathbb{R} -Vektorraum, der \mathbb{R} echt umfasst und zugleich ein Körper ist.

13. Zum Schluss

Die allgemeine Empfehlung für eine klug klingende Diskussions-Frage nach einem mathematischen Vortrag, von dessen Thema man nicht viel versteht, lautet:

„Hat nicht vielleicht auch Gauß schon...?“

Und ... ja, in der Tat!

Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hielt im Jahre 1819 in einer zu Lebzeiten *unveröffentlichten* Notiz – publiziert erst 1900 in Band 8 seiner *Werke* – Überlegungen zur „Mutation des Raumes“ (= Drehungen der Kugeloberfläche) fest und erkannte, dass sie – „Riemannsche Zahlenkugel“ – durch komplexe Abbildungen der Form $z \mapsto \frac{az+b}{-bz+a}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ beschrieben werden können. Das Hintereinanderschalten zweier solcher Drehungen ergab eine Art Multiplikation *reeller* Zahlenquadrupel:

$$(a, b, c, d)(t, u, v, w) = (at - bu - cv - dw, au + bt - cw + dv, av + bw + ct - du, aw - bv + cu + dt)$$

Dies stimmt, abgesehen von einer Vertauschung der zweiten und dritten Koordinate, mit Hamiltons Quaternionen-Multiplikation überein.

Gauß wörtlich (zitiert nach T.Y. Lam, *Hamilton's Quaternions*, Berkeley University, 2002):

„Wir bezeichnen allgemein die Combination a, b, c, d durch (a, b, c, d) und schreiben

$$(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D).$$

Es ist also $(a, b, c, d)(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nicht mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)(a, b, c, d)$ zu verwechseln. ...

Ferner bezeichne man die Combination (a, b, c, d) durch einen Buchstaben, z.B. g , und dann die Combination $(a, -b, -c, -d)$ durch g' . Es ist also

$$gg' = g'g = (aa + bb + cc + dd, 0, 0, 0).“$$

Gauß kannte also das Quaternionenprodukt *und* die hier mittels Matrizenmultiplikation entwickelten Zusammenhänge (Abschnitt 8) – lange vor Erfindung der Matrizenrechnung durch Sylvester und Cayley.



14. Literaturhinweise

1. Simon L. Altman, *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Dover 2005 (Oxford UP 1986)
2. Michael Bender, Manfred Brill, *Computergrafik, 2.Auflage*, Hanser 2006
3. Marcel Berger, *Geometry I*, Springer 1987
4. H.D. Ebbinghaus, Friedrich Hirzebruch, Max Koecher, Reinhold Remmert et al., *Zahlen, 3. Auflage*, Springer 1992
5. Jean Gallier, *Geometric Methods and Applications*, Springer 2001
6. Klaus Gürlebeck, Klaus Habetha, Wolfgang Sprößig, *Funktionentheorie in der Ebene und im Raum*, Birkhäuser 2006
7. Horst Hänsel, Werner Neumann, *Physik - Atome, Atomkerne, Elementarteilchen*, Spektrum 1995
8. Jack B. Kuiper, *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Press 1999
9. Duncan Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD, 2nd Edition*, Springer 2005
10. John Stillwell, *Mathematics and Its History, 3rd Edition*, Springer 2010
11. John Stillwell, *Naive Lie Theory*, Springer 2008
12. Leonard Susskind, G. Hrabovsky, *The Theoretical Minimum - What You Need to Know to Start Doing Physics*, Basic Books 2013
13. Leonard Susskind, A. Friedman, *Quantum Mechanics - The Theoretical Minimum*, Basic Books 2014

Quelle der Portraits von Wissenschaftlern und einiger Fotos: *MacTutor History of Mathematics Archive* der University of St. Andrews (<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk>) bzw. *Wikipedia*; alle anderen Grafiken selbst erstellt.