KAPITEL 7

Algebraische Kurven

Unter einer Kurve verstehen wir im Folgenden eine absolut irreduzible projektive Kurve C, die über einem vollkommenen Körper K definiert ist. Wir denken uns $C \subseteq \mathbb{P}^n$.

Sei also C eine Kurve. Wir haben dann den Funktionenkörper $\overline{K}(C)$ definiert. Für $P \in C$ haben wir den lokalen Ring von C in P definiert:

$$\mathcal{O}_{C,P} = \{f \in \overline{K}(C) : f \text{ ist definiert in } P\}.$$

Das maximale Ideal ist

$$\mathfrak{m}_{C,P} = \{f \in \mathcal{O}_{C,P} : f(P) = 0\}.$$

(Es gibt auch andere Bezeichnungen. [**Silverman**, S.17] schreibt $\overline{K}[C]_P$ für den lokalen Ring und M_P für das maximale Ideal.) Die Einheiten im lokalen Ring sind

$$\mathcal{O}^*_{C,P} = \{f \in \mathcal{O}_{C,P} : f(P) \neq 0\}.$$

Wir betrachten zunächst ein Beispiel:

Beispiel: Wir betrachten $\mathbb{P}^1$ und den Punkt $(1:2) \simeq 2$. Der Funktionenkörper ist $K(\mathbb{P}^1) = K(x)$. Jedes $f \in K(x) \setminus \{0\}$ hat eine eindeutige Darstellung $f = u(x) \cdot (x-2)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$, wo $u(x)$ in 2 definiert ist und $u(2) \neq 0$ gilt. n ist dann die Null- bzw. Polstellenordnung von f im Punkt 2.

Dieses Beispiel ist typisch für nichtsinguläre Punkte auf Kurven, wie folgender wichtige Satz besagt:

Satz. *Sei C eine Kurve und P ein nichtsingulärer Punkt auf C. Dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{C,P}$ von C in P ein* **diskreter Bewertungsring**, *d.h. es gibt eine Funktion $t \in \mathcal{O}_{C,P}$ mit $t(P) = 0$, so dass sich jedes Element $f \neq 0$ des lokalen Rings eindeutig schreiben lässt als $f = ut^n$ mit einer Einheit $u \in \mathcal{O}^*_{C,P}$ und $n \geq 0$. t heißt eine* **Uniformisierende** *oder* **Ortsuniformisierende** *in P. Jedes Element $f \neq 0$ aus $\overline{K}(C)$ hat eine eindeutige Darstellung*

$$f = ut^n \text{ mit } u(P) \neq 0 \text{ und } n \in \mathbb{Z}.$$

Der Exponent n ist die **Ordnung von C in P** *wird mit $\operatorname{ord}_P(f)$ (oder auch $v_P(f)$) bezeichnet. Ist $\operatorname{ord}_P(f) > 0$, so sagt man, f hat in P eine* **Nullstelle**, *ist $\operatorname{ord}_P(f) < 0$, so sagt man, f hat in P eine* **Polstelle**.

Beweisidee:

- Der Einfachkeit halber beschränken wir uns auf den Fall $C \subseteq \mathbb{P}^2$. Nach Koordinatenwechsel können wir $P = (0,0) \in \mathbb{A}^2 \subseteq \mathbb{P}^2$ und $C \cap \mathbb{A}^2 = \{F(x,y) = 0\}$ annehmen. Wir betrachten die Taylorreihenentwicklung von F in $P = (0,0)$:

  $$F = ax + by + \text{ Terme mit Monomen vom Grad } \geq 2.$$

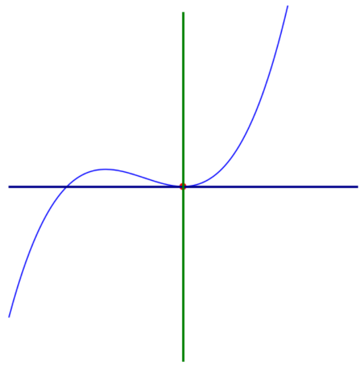
  Da C in P nichtsingulär sein soll, ist a oder $b \neq 0$. Nach einem weiteren Koordinatenwechsel können wir o.E. $b \neq 0$, auch $b = 1$ annehmen und dann

  $$F = y + ax + \text{ Terme mit Monomen vom Grad } \geq 2$$

  annehmen.

Datei: algku7.tex. Version vom 18.7.2021

- Nochmals: $C \cap \mathbb{A}^2 = \{F(x,y) = 0\}$ mit $F = y + ax +$ Terme vom Grad ≥ 2.



- Wir klammern jetzt y überall aus und erhalten eine Darstellung
$$F = y(1 + A(x,y)) - B(x)x$$
mit Polynomen $A(x,y)$ und $B(x)$ und $A(0,0) = 0$. Im Funktionenkörper gilt also
$$y = \frac{B(x)x}{1 + A(x,y)} \quad \text{und} \quad \frac{B(x)}{1 + A(x,y)} \in \mathcal{O}_{C,P}.$$
- Nun ist $\overline{K}[C] = \overline{K}[x,y]/(F)$, das maximale Ideal des lokalen Rings wird also von x und y erzeugt: $\mathfrak{m}_{C,P} = (x,y)$. Mit unserer Relation folgt:
$$\mathfrak{m}_{C,P} = (x),$$
d.h. $\mathfrak{m}_{C,P}$ ist in $\mathcal{O}_{C,P}$ ein Hauptideal.
- Sei nun ein beliebiges Element $f \in \mathcal{O}_{C,P} \setminus \{0\}$ gegeben. Wir wollen zeigen, dass eine Funktion $u \in \mathcal{O}^*_{C,P}$ und ein $n \in \mathbb{N}_0$ existieren mit
$$f = u \cdot x^n.$$
Ist $f(P) \neq 0$, so ist f Einheit in P, wir wählen $u = f$ und $n = 0$ und sind fertig. Ist $f(P) = 0$, so ist $f \in \mathfrak{m}_{C,P} = (x)$, also gibt es $f_1 \in \mathcal{O}_{C,P}$ mit $f = f_1 \cdot x$. Nun kann man das gleiche Spiel mit f_1 machen, u.s.w. Man erhält $f_i = f_{i+1} \cdot x$, solange $f_i(P) = 0$ ist. Damit gilt
$$f = f_1 x = f_2 x^2 = \cdots = f_i x^i \quad \text{mit} \quad f_i \in \mathcal{O}_{C,P}.$$
- Warum muss dieser Prozess aufhören? Es ist $f_i = f_{i+1}x$, also $(f_i) \subsetneq (f_{i+1})$ und somit
$$(f) \subsetneq (f_1) \subsetneq (f_2) \subsetneq \ldots.$$
Der Hilbertsche Basissatz besagt nun, dass es keine unendlich echt aufsteigende Idealkette geben kann. Also bricht der Prozess ab und wir erhalten eine gewünschte Darstellung.
- Jedes Element hat also die Form $f = ux^n$ mit $u(P) \neq 0$, d.h. $u \in \mathcal{O}^*_{C,P}$, und $n \geq 0$.
- Zur Eindeutigkeit: Sei $ux^m = vx^n$ mit Einheiten u, v und $m \geq n \geq 0$. Dann ist $ux^{m-n} = v$ Einheit, also $m = n$ und $u = v$.
- Jedes Element $f \neq 0$ im Funktionenkörper lässt sich als Quotient von Polynomen, insbesondere als Quotient von Elementen aus $\mathcal{O}_{C,P}$ darstellen. Daraus folgt die letzte Behauptung. ■

Der Beweis zeigt, wie man in einem nichtsingulären Punkt an eine Ortsuniformisierende kommt. Wir formulieren dies nochmals als Satz:

Satz. *Sei C eine absolut irreduzible Kurve und $C \cap \mathbb{A}^2 = \{F(x,y) = 0\}$ mit einem absolut irreduziblen Polynom $F(x,y)$. Sei $P = (a,b) \in C(\overline{K})$ ein nichtsingulärer Punkt von C.*

(1) *Sind $A, B \in \overline{K}$ mit $(A,B) \neq (0,0)$, sodass*
$$t = A(x-a) + B(y-b)$$
nicht die Tangente an C in P beschreibt, d.h. $(A : B) \neq (\frac{\partial F}{\partial x}(P) : \frac{\partial F}{\partial y}(P))$, so ist t eine Uniformisierende des lokalen Rings von C in P.

(2) *Ist* $\frac{\partial F}{\partial x}(P) \neq 0$, *so ist* $y - b$ *eine Uniformisierende in* $P = (a, b)$.
(3) *Ist* $\frac{\partial F}{\partial y}(P) \neq 0$, *so ist* $x - a$ *eine Uniformisierende in* $P = (a, b)$.

Bemerkung: Ist $C \subseteq \mathbb{P}^n$ und $P \in C \cap \mathbb{A}^n$, so kann man als Uniformisierende jede Linearform t wählen, wenn die Hyperebene $t = 0$ den Punkt P enthält, nicht aber die Tangente von C in P.

Bemerkung: Sei P ein nichtsingulärer Punkt auf der Kurve C. Die Funktion ord_P kann man dann als Funktion

$$\operatorname{ord}_P : \overline{K}(C) \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

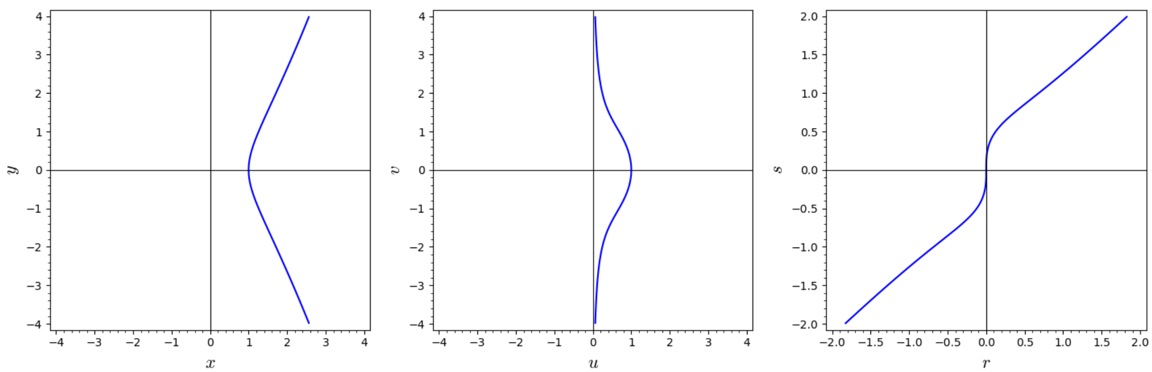
betrachten, wenn man noch $\operatorname{ord}_P(0) = \infty$ setzt. Man hat die folgenden Eigenschaften:

- $\operatorname{ord}_P(fg) = \operatorname{ord}_P(f) + \operatorname{ord}_P(g)$,
- $\operatorname{ord}_P(f + g) \geq \min(\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g))$,
- ist $\operatorname{ord}_P(f) \neq \operatorname{ord}_P(g)$, so gilt $\operatorname{ord}_P(f + g) = \min(\operatorname{ord}_P(f), \operatorname{ord}_P(g))$,
- ord_P ist surjektiv.

Es gilt:

$$\mathcal{O}_{C,P} = \{f \in \overline{K}(C)^* : \operatorname{ord}_P(f) \geq 0\}.$$

Beispiel: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ definiert durch $y^2 = x^3 - 1$, d.h. $C = \{x_0 x_2^2 = x_1^3 - x_0^3\}$.



Wir wollen für jeden Kurvenpunkt eine Uniformisierende bestimmen.

- *Im Endlichen:* Sei $(a, b) \in C$. Die Tangente ist $-3a^2(x - a) + 2b(y - b) = 0$. Ist $b \neq 0$, so ist $x - a$ uniformisierend, ist $b = 0$, so ist y uniformisierend:
$$t_P = \begin{cases} x - a & \text{für } P = (a, b) \text{ mit } b \neq 0, \\ y & \text{für } P = (a, 0). \end{cases}$$
- *Im Unendlichen:* Es gibt nur den Punkt $(0 : 0 : 1)$. Wir betrachten die Kurve in $U_2 = \{(r : s : 1) : r, s \in \overline{K}\}$ mit den affinen Koordinaten r, s. Der Punkt $(0 : 0 : 1)$ hat hier die Koordinaten $(r, s) = (0, 0)$. Die Kurve wird beschrieben durch die Gleichung
$$r = s^3 - r^3.$$
Die Tangente in $(r, s) = (0, 0)$ ist offensichtlich $r = 0$, also können wir also Uniformisierende s wählen. Mit
$$(1 : x : y) = (r : s : 1) = (1 : \frac{s}{r} : \frac{1}{r})$$
erhält man $x = \frac{s}{r}$ und $y = \frac{1}{r}$ bzw. $r = \frac{1}{y}$ und $s = \frac{x}{y}$.

Wir wollen jetzt die Null- und Polstellen der Funktion $f = y$ bestimmen.

- *Im Endlichen:* Hier hat y keine Polstelle. Es gibt 3 Nullstellen: $P_1 = (1, 0), P_2 = (\zeta, 0), P_3 = (\zeta^2, 0)$, wo $\zeta = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ eine primitive dritte Einheitswurzel ist. In allen 3 Punkten ist y uniformisierend, also $\operatorname{ord}_{P_i}(y) = 1$, d.h. in allen 3 Punkten hat y eine einfache Nullstelle.

- *Im Unendlichen:* Hier gibt es nur den Punkt $(0:0:1)$. Es ist $y = \frac{1}{r}$. Wir haben $r = s^3 - r^3$, s ist uniformisierend. Auch r hat eine Nullstelle. Wegen $r(1+r^2) = s^3$ gilt $r = \frac{1}{1+r^2}s^3$, also folgt sofort $\operatorname{ord}_{(0:0:1)}(r) = 3$ und daher $\operatorname{ord}_{(0:0:1)}(y) = -3$.

Beispiel: Die Kurve $\mathbb{P}^1$ hatten wir bereits früher behandelt. Wir hatten zerlegt

$$\mathbb{P}^1 = \{(1:a) : a \in \overline{K}\} \cup \{(0:1)\} \simeq \overline{K} \cup \{\infty\}.$$

Der Funktionenkörper von $\mathbb{P}^1$ ist $\overline{K}(x)$ mit $x = \frac{x_1}{x_0}$. In $a \in \overline{K}$ ist $x - a$ uniformisierend, in ∞ ist $u = \frac{1}{x}$ uniformisierend.
Jedes $f \in \overline{K}(x), f \neq 0$ hat eine eindeutige Zerlegung

$$f = c\prod_{i=1}^{r}(x - \alpha_i)^{e_i},$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_r, c \in \overline{K}$, $e_i \in \mathbb{Z}$ und die Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ paarweise verschieden sind. Dann gilt

$$\operatorname{ord}_{\alpha_i}(f) = e_i \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}_{\alpha}(f) = 0 \text{ für } \alpha \in \overline{K} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}.$$

Was ist $\operatorname{ord}_{\infty}(f)$? Wir schreiben

$$f = \frac{a_m x^m + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} \text{ mit } a_m, b_n \neq 0.$$

Dann gilt

$$f = u^{n-m} \cdot \frac{a_m + a_{m-1}u + \cdots + a_0 u^m}{b_n + b_{n-1}u + \cdots + b_0 u^n}.$$

Der Bruch ist in ∞ definiert und hat den Wert $\frac{a_m}{b_n} \neq 0$. Also gilt $\operatorname{ord}_{\infty}(f) = n - m$.

Die Tatsache, dass der lokale Ring in einem nichtsingulären Punkt einer Kurve ein diskreter Bewertungsring ist, hat erstaunliche Konsequenzen:

Satz. *Sei C eine Kurve, Y eine projektive Varietät $\phi : C \to Y$ eine rationale Abbildung. Ist $P \in C$ ein nichtsingulärer Punkt von C, so ist ϕ in P definiert.*

Beweis: Sei $\phi = (f_0 : \cdots : f_n)$ mit $f_i \in \overline{K}(C)$. Sei t uniformisierend in P. Wir können o.E. $f_i \neq 0$ annehmen, sonst lassen wir die entsprechende Koordinate weg. Dann ist $f_i = u_i \cdot t^{e_i}$, wo u_i Einheit in P ist, also $u_i(P) \neq 0$, und damit

$$\phi = (u_0 t^{e_0} : u_1 t^{e_1} : \cdots : u_n t^{e_n}).$$

Sei o.E. $e_0 = \min(e_0, \dots, e_n)$. Dann gilt

$$\phi = (u_0 : u_1 t^{e_1 - e_0} : \cdots : u_n t^{e_n - e_0})$$

und man sieht an dieser Darstellung, dass ϕ in P definiert ist. ■

Damit folgt unmittelbar:

Satz. *Ist C eine nichtsinguläre Kurve, Y eine projektive Varietät und $\phi : C \to Y$ eine rationale Abbildung, so ist ϕ schon ein Morphismus.*

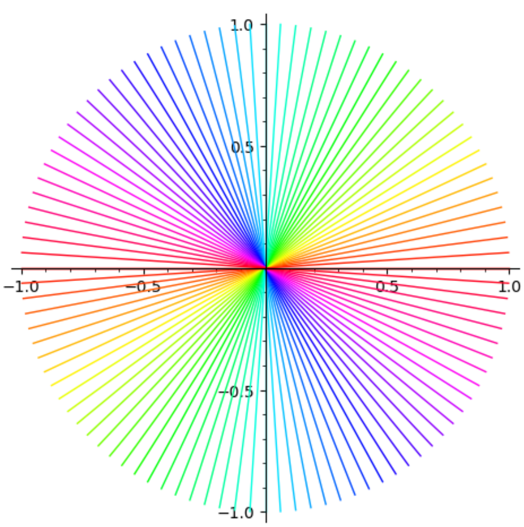
Satz. *Zwei birational äquivalente, nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive Kurven sind schon isomorph.*

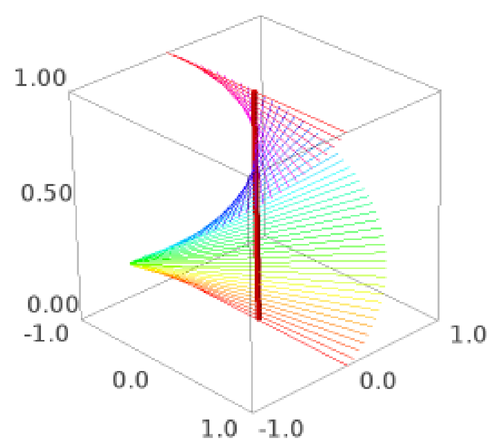
Was bedeutet das? In einer Äquivalenzklasse birational äquivalenter Kurven gibt es bis auf Isomorphie höchstens eine nichtsinguläre Kurve. Es stellt sich dann sofort die Frage: Ist jede Kurve birational äquivalent zu einer nichtsingulären Kurve? Wie findet man eine solche? Wir wissen bereits, dass jede Kurve zu einer ebenen Kurve birational äquivalent ist. Wir werden jetzt Singularitäten ebener Kurven durch „Aufblasen“ auflösen.

Vorbemerkung: Da Singularitäten ein lokales Phänomen sind, werden wir uns im folgenden auf die 2-dimensionale affine Darstellung beschränken.

Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$:

- Sei
$$X = \{((x,y),(z_0 : z_1)) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : xz_1 = yz_0\}$$
und $\pi : X \to \mathbb{A}^2$ die Projektion auf die erste Komponente. Man nennt π bzw. X die Aufblasung von $\mathbb{A}^2$ in $P = (0,0)$.
- Wir betrachten einen Punkt $((x,y),(z_0 : z_1)) \in X$:
  - **Fall $x \neq 0$:** Dann ist $z_1 = \frac{y}{x} z_0$ und
$$((x,y),(z_0 : z_1)) = ((x,y),(z_0 : \frac{y}{x} z_0)) = ((x,y),(x : y)).$$
  - **Fall $y \neq 0$:** Dann ist $z_0 = \frac{x}{y} z_1$ und
$$((x,y),(z_0 : z_1)) = ((x,y),(\frac{x}{y} z_1 : z_1)) = ((x,y),(x : y)).$$
  - **Fall $x = y = 0$:** Dann hat man keine Bedingung:
$$((0,0),(z_0 : z_1)).$$
- Wir haben also
$$X = \{((x,y),(x : y)) : (x,y) \in \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}\} \cup \{((0,0),(z_0 : z_1)) : (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$
Also gilt
$$\pi^{-1}((x,y)) = \{((x,y),(x : y))\} \text{ falls } (x,y) \neq (0,0),$$
$$\pi^{-1}((0,0)) = \{((0,0),(z_0 : z_1)) : (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}^1\}.$$
Definiert man jetzt $E = \{((0,0),(z_0 : z_1)) \in X : (z_0 : z_1) \in \mathbb{P}^1\}$, so ist offensichtlich
$$E = \pi^{-1}((0,0)) \simeq \mathbb{P}^1.$$
Man nennt E den **exzeptionellen Divisor** oder die **exzeptionelle Faser**.
- Definiert man weiter $\phi : \mathbb{A}^2 \to X$ durch $(x,y) \mapsto ((x,y),(x : y))$, so ist ϕ definiert auf $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und induziert einen Isomorphismus
$$X \setminus E \simeq \mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$
- Überlegung: Die Punkte der Gerade $y = \lambda x$ werden durch ϕ abgebildet auf $((x,y),(1 : \lambda))$. Die Gerade trifft also den exzeptionellen Divisor im Punkt $((0,0),(1 : \lambda))$. Verschiedene Geraden treffen den exzeptionellen Divisor in verschiedenen Punkten.





$\boxed{\text{Aufblasung zum Anklicken}}$ Was ist also passiert? Man ersetzt in $\mathbb{A}^2$ den Punkt $(0,0)$ durch eine projektive Gerade, man *bläst auf*. Vorstellung: Man zieht den Nullpunkt nach oben und nimmt dabei die Geraden $y = \lambda x$ mit.

- **Wie rechnet man mit der Aufblasung** $X = \{((x, y), (z_0 : z_1)) \in \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 : xz_1 = yz_0\}$**?** Wir betrachten die offene Überdeckung $X = \{z_0 \neq 0\} \cup \{z_1 \neq 0\}$:
  - **Fall** $z_0 \neq 0$**:** Sei $z = \frac{z_1}{z_0}$. Es ist
$$\begin{aligned} X \cap \{z_0 \neq 0\} &= \{((x, y), (z_0 : z_1)) : xz_1 = yz_0\} = \{((x, y), (1 : z)) : xz = y\} = \\ &= \{((x, xz), (1 : z))\} \simeq \{(x, z) \in \mathbb{A}^2\} \simeq \mathbb{A}^2. \end{aligned}$$
    In diesem affinen Teil bilden also x und $z = \frac{z_1}{z_0}$ affine Koordinaten, der exzeptionelle Divisor E ist hier gegeben durch die einzige Gleichung $x = 0$.
  - **Fall** $z_1 \neq 0$**:** Sei $t = \frac{z_0}{z_1} = \frac{1}{z}$. Es ist
$$\begin{aligned} X \cap \{z_1 \neq 0\} &= \{((x, y), (z_0 : z_1)) : xz_1 = yz_0\} = \{((x, y), (t : 1)) : x = yt\} = \\ &= \{((yt, y), (t : 1))\} \simeq \{(y, t) \in \mathbb{A}^2\} \simeq \mathbb{A}^2. \end{aligned}$$
    In diesem affinen Teil bilden also y und $t = \frac{z_0}{z_1}$ affine Koordinaten, des exzeptionelle Divisor E ist hier gegeben durch die einzige Gleichung $y = 0$.

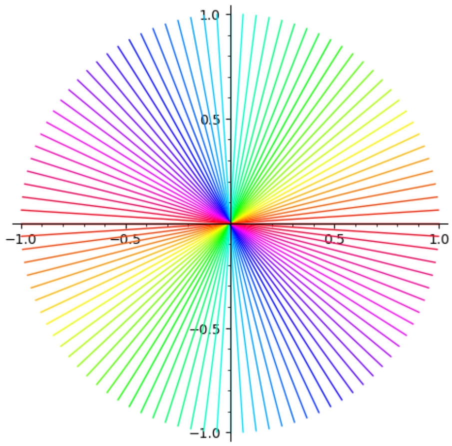
  Wir können also Phänomene in den affinen Teilen $\{z_0 \neq 0\}$ und $\{z_1 \neq 0\}$ studieren. Oft kommt man mit einem Teil aus, denn
$$\{z_0 = 0\} = \{((0, y), (0 : 1))\} \quad \text{und} \quad \{z_1 = 0\} = \{((x, 0), (1 : 0))\}.$$
- Sei $C \subseteq \mathbb{A}^2$ eine Kurve, die den Punkt $(0, 0)$ enthält. Natürlich gilt dann $E \subseteq \pi^{-1}(C)$, d.h. in $\pi^{-1}(C)$ ist der exzeptionelle Divisor immer enthalten. Daher definiert man das **eigentliche Urbild** $\widetilde{C}$ von C als
$$\widetilde{C} = \overline{\pi^{-1}(C \setminus \{(0, 0)\})},$$
  wo Überstreichen den Zariski-Abschluss bedeutet. Klar ist:
$$\widetilde{C} \setminus E \simeq C \setminus \{(0, 0\},$$
  d.h. C und $\widetilde{C}$ sind birational äquivalent. C und $\widetilde{C}$ unterscheiden sich also nur in den Punkten von $\widetilde{C} \cap E$. D.h. wenn man wissen will, wie Aufblasen C verändert, muss man nur die endlich vielen Punkte auf $\widetilde{C} \cap E$ betrachten.

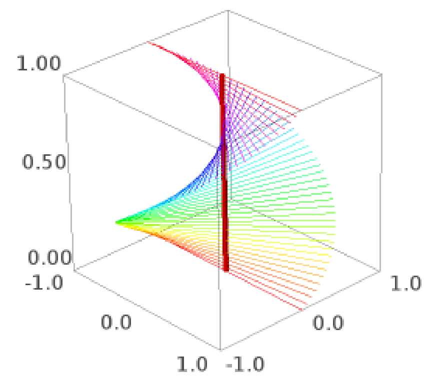
Beispiel: Was passiert mit Geraden durch $(0, 0)$? Wir betrachten als Beispiel eine Gerade G_λ, die durch die Gleichung $y = \lambda x$ gegeben wird (mit $\lambda \in \overline{K}$).

- Im affinen Teil $X \cap \{z_0 \neq 0\}$ verwenden wir die affinen Koordinaten x, z mit $y = xz$ und haben dann
$$X \cap \{z_0 \neq 0\} = \{((x, xz), (1 : z))\}.$$
  Die Gerade erhält die Gleichung
$$xz = \lambda x, \quad \text{also} \quad x(z - \lambda) = 0.$$
  Da die exzeptionelle Faser durch $x = 0$ gegeben wird, wird das eigentliche Urbild der Geraden durch
$$z - \lambda = 0$$
  gegeben, also
$$X \cap \{z_0 \neq 0\} \cap \widetilde{G}_\lambda = \{(x, \lambda x), (1 : \lambda) : x \in \overline{K}\}.$$
  $\widetilde{G}_\lambda$ schneidet die exzeptionelle Faser im Punkt $((0, 0), (1 : \lambda))$.
- Im affinen Teil $X \cap \{z_1 \neq 0\}$ verwenden wir die affinen Koordinaten y, t mit $x = yt$. Es ist
$$X \cap \{z_1 \neq 0\} = \{(yt, y), (t : 1)\}.$$
  Die Gerade erhält nun die Gleichung
$$y = \lambda yt \quad \text{bzw.} \quad y(1 - \lambda t) = 0.$$
  Die exzeptionelle Faser wird durch $y = 0$ gegeben, das eigentliche Urbild der Geraden durch $1 - \lambda t = 0$. Daher ist
$$X \cap \{z_1 \neq 0\} \cap \widetilde{G}_\lambda = \{((yt, y), (t : 1)) : \lambda t = 1\}.$$

$\widetilde{G}_\lambda$ schneidet die exzeptionelle Faser im Punkt $((0,0),(\frac{1}{\lambda}:1))$, falls $\lambda \neq 0$ ist, sonst nicht. Dies liefert keine neue Information.

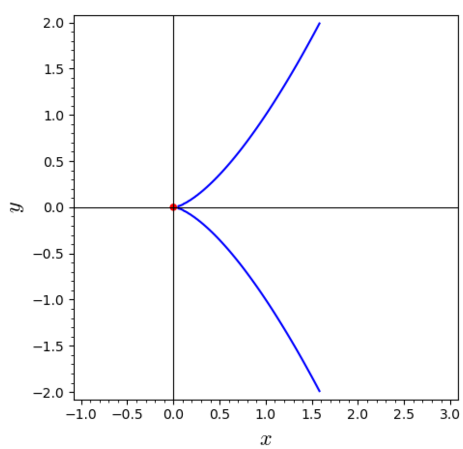
Als Ergebnis erhalten wir
$$\widetilde{G}_\lambda = \{((x,\lambda x),(1:\lambda)) \in X : x \in \overline{K}\}.$$
Verschiedene Geraden G_λ durch $(0,0)$ werden also beim Aufblasen „auseinandergezogen".

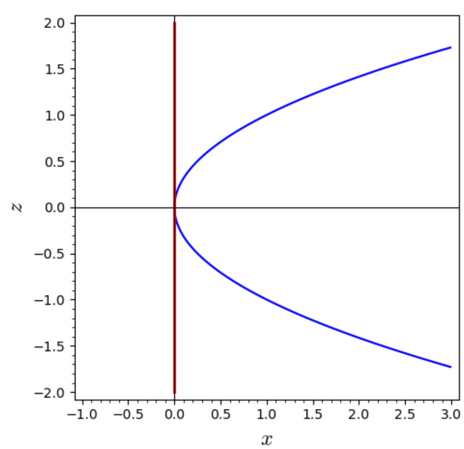




Beispiel: Die durch $y^2 = x^3$ definierte Kurve C hat eine Singularität in $(0,0)$. Wir blasen $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$ auf und wollen das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ von C bestimmen.

- Im affinen Teil
$$X \cap \{z_0 \neq 0\} = \{((x,xz),(1:z))\}$$
mit den affinen Koordinaten x, z setzen wir $y = xz$ in die Kurvengleichung ein:
$$0 = y^2 - x^3 = (xz)^2 - x^3 = x^2(z^2 - x).$$
Die exzeptionelle Faser wird durch $x = 0$ beschrieben, das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ von C durch
$$x = z^2.$$
Einziger Schnittpunkt der exzeptionellen Faser mit $\widetilde{C}$ ist der Punkt $(x,z) = (0,0)$, der nichtsingulär ist.





- Im affinen Teil
$$X \cap \{z_1 \neq 0\} = \{((yt,y),(t:1)\}$$
mit den affinen Koordinaten y, t setzen wir $x = yt$ in die Kurvengleichung ein:
$$0 = y^2 - x^3 = y^2 - y^3t^3 = y^2(1 - yt^3).$$

Das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ von C wird hier durch $1 = yt^3$ beschrieben, es schneidet die exzeptionelle Faser $y = 0$ nicht.

Ergebnis: $\widetilde{C}$ ist nichtsingulär und

$$X \cap \{z_0 \neq 0\} \cap \widetilde{C} = \{((x, xz), (1 : z)) : x = z^2\} \quad \text{und} \quad E \cap \widetilde{C} = \{((0,0), (1:0))\}.$$

Wir haben also die Singularität von C durch Aufblasen aufgelöst.

Beispiel: $y^2 = x^2 + x^3$ definiert eine Kurve C, die in $(0,0)$ singulär ist. Wir blasen $\mathbb{A}^2$ in $(0,0)$ auf und bestimmen das eigentliche Urbild von C.

- Im affinen Teil

$$X \cap \{z_0 \neq 0\} = \{((x, xz), (1 : z))\}$$

mit den affinen Koordinaten x, z setzen wir $y = xz$ in die Kurvengleichung ein:

$$0 = y^2 - x^2 - x^3 = (xz)^2 - x^2 - x^3 = x^2(z^2 - 1 - x).$$

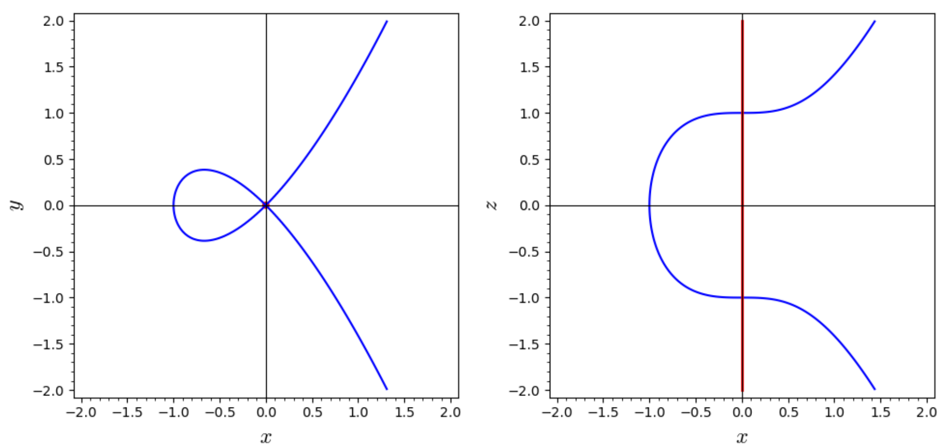
Die exzeptionelle Faser wird durch $x = 0$ beschrieben, das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ von C durch

$$x = z^2 - 1.$$

$\widetilde{C}$ schneidet die exzeptionelle Faser in den zwei Punkten $(x, z) = (0, \pm 1)$, also in

$$((0,0), (1 : \pm 1)).$$

$\widetilde{C}$ ist in diesen Punkten nichtsingulär.



- Im affinen Teil

$$X \cap \{z_1 \neq 0\} = \{((yt, y), (t : 1))\}$$

mit den affinen Koordinaten y, t setzen wir $x = yt$ in die Kurvengleichung ein:

$$0 = y^2 - x^2 - x^3 = y^2 - y^2t^2 - y^3t^3 = y^2(1 - t^2 - yt^3).$$

Das eigentliche Urbild $\widetilde{C}$ von C wird durch die Gleichung

$$t^2 = 1 - yt^3$$

beschrieben. Die Schnittpunkte mit der exzeptionellen Faser sind die Punkte $(y, t) = (0, \pm 1)$, also

$$((0,0), (\pm 1 : 1)).$$

Diese Punkte haben wir aber schon untersucht und müssen deshalb nicht weiter betrachtet werden.

Ergebnis: $\widetilde{C}$ ist nichtsingulär mit

$$\widetilde{C} \cap E = \{((0,0),(1:1)),((0,0),(1:-1))\}.$$

Wir haben also C durch Aufblasen desingularisiert. Denken wir uns $\widetilde{C}$ in der affinen Ebene mit den Koordinaten x, z gegeben durch $x = z^2 - 1$, so ist

$$\widetilde{C} = \{(x,z) \in \mathbb{A}^2 : x = z^2 - 1\} \xrightarrow{(x,z)\mapsto(x,xz)} C = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2 : y^2 = x^2 + x^3\}$$

ein birationaler Morphismus und eingeschränkt auf $\widetilde{C} \setminus \{(0,1),(0,-1)\} \to C \setminus \{(0,0)\}$ ein Isomorphismus.

Sei C eine ebene Kurve. Wie löst man die Singularitäten von C auf? Sei C_0 die Aufblasung von C in einem singulären Punkt. Dann ist $\pi_0 : C_0 \to C$ ein birationaler Morphismus. Ist C_0 noch singulär, so blase man einen singulären Punkt von C_0 auf. Man kann dies lokal, also affin machen. Man erhält $\pi_1 : C_1 \to C_0$, etc.

$$\cdots \to C_n \stackrel{\pi_n}{\to} C_{n-1} \stackrel{\pi_{n-1}}{\to} C_{n-2} \to \cdots \to C_1 \stackrel{\pi_1}{\to} C_0 \stackrel{\pi_0}{\to} C,$$

wobei die π_i birationale Morphismen sind. Die entscheidende Tatsache ist nun, dass man durch diesen Prozess irgendwann bei einer nichtsingulären Kurve ankommt, was wir aber nicht beweisen werden. Durch Aufblasen kann man also eine ebene Kurve desingularisieren. (Einen Beweis findet man bei [**Hartshorne**, Proposition 3.8, S.390].) Damit erhält man schließlich:

Satz. *Zu jeder irreduziblen projektiven Kurve C gibt es eine nichtsinguläre irreduzible projektive Kurve $\widehat{C}$ und einen birationalen Morphismus $\pi : \widehat{C} \to C$. Die Kurve $\widehat{C}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Man sagt, $\widehat{C}$ ist ein nichtsinguläres Modell von C.*

Bemerkung: Wir haben den Aufblasprozess bisher nur affin 2-dimensional betrachtet. Man kann man auch allgemein einen Punkt im $\mathbb{P}^n$ aufblasen: Man nennt

$$X = \{((x_0 : x_1 : \cdots : x_n),(y_1 : \cdots : y_n)) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} : x_i y_j = x_j y_i \text{ für } i,j = 1,\ldots,n\}$$

zusammen mit der Projektion $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ die Aufblasung von $\mathbb{P}^n$ im Punkt $(1 : 0 : \cdots : 0)$.

Wir wollen nochmals Morphismen zwischen glatten projektiven Kurven betrachten.

Beispiel: Sei $C \subseteq \mathbb{P}^2$ definiert durch $y^2 = x^3 - 1$ und $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ durch $\phi = (1 : y)$. Für $c \in \overline{K}$ gilt

$$\phi^{-1}((1:c)) = \{(1 : x : c) \in C : x^3 = c^2 + 1\}.$$

Für $c \neq \pm i$ gibt es also genau 3 Urbilder von c. Außerdem gilt:

$$[\overline{K}(C) : \overline{K}(y)] = [\overline{K}(x,y) : \overline{K}(y)] = 3.$$

Dies ist nun ein ganz allgemeines Phänomen.

Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven. Wir wissen: ist ϕ nicht konstant, so ist ϕ surjektiv. Außerdem ist dann $\overline{K}(C_1)$ eine endliche algebraische Körpererweiterung von $\phi^*\overline{K}(C_2)$.

Definition. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven. Dann heißt*

$$\operatorname{grad}(\phi) = [\overline{K}(C_1) : \phi^*\overline{K}(C_2)]$$

der **Grad von** ϕ. *Man sagt, ϕ ist* **separabel**, *wenn die Körpererweiterung $\overline{K}(C_1)|\phi^*\overline{K}(C_2)$ separabel ist.*

Um die Urbilder $\phi^{-1}(P)$ eines Punktes P richtig zu zählen, brauchen wir noch folgende Definition:

Definition. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus glatter projektiver Kurven und $P \in C_1$. Ist $t_{\phi(P)}$ eine Uniformisierende im Punkt $\phi(P)$, so heißt*

$$e_\phi(P) = \operatorname{ord}_P(\phi^* t_{\phi(P)})$$

der **Verzweigungsindex** *von ϕ im Punkt P. (Wegen $(\phi^* t_{\phi(P)})(P) = t_{\phi(P)}(\phi(P)) = 0$ gilt immer $e_\phi(P) \geq 1$.) ϕ heißt* **verzweigt in** P, *falls $e_\phi(P) \geq 2$ gilt. Der Morphismus ϕ heißt* **unverzweigt**, *falls $e_\phi(P) = 1$ für alle $P \in C_1$ gilt.*

$e_\phi(P)$ zählt also, *wie oft* der Punkt P unter ϕ auf den Punkt $\phi(P)$ abgebildet wird. Dies wird noch deutlicher durch folgendes

Beispiel: Sei C eine glatte projektive Kurve und $f \in \overline{K}(C), f \notin \overline{K}$. Wir betrachten den Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ mit $\phi = (1 : f)$ und einen Punkt $P \in C$ mit $\phi(P) = Q$.
Fall $Q = (1 : a)$**:** In Q ist $x - a$ uniformisierend (mit $x = \frac{x_1}{x_0}$), also ist $\phi^*(x - a) = f - a$ und daher

$$e_\phi(P) = \mathrm{ord}_P(f - a).$$

Ist $a = 0$, so ist $e_\phi(P) = \mathrm{ord}_P(f)$ die Nullstellenordnung von f.
Fall $Q = (0 : 1)$**:** In Q ist $u = \frac{1}{x} = \frac{x_0}{x_1}$ uniformisierend, mit $\phi^*(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f}$ gilt dann

$$e_\phi(P) = \mathrm{ord}_P(\frac{1}{f}) = -\mathrm{ord}_P(f).$$

Nun gilt der wichtige Satz, für dessen Beweis wir auf [**Silverman**, Proposition 2.6, S.23-24] verweisen:

Satz. *Sei $\phi : C_1 \to C_2$ ein nichtkonstanter Morphismus zwischen glatten projektiven Kurven. Dann gilt:*

(1) *Für alle $Q \in C_2$ ist*

$$\sum_{P \in \phi^{-1}(Q)} e_\phi(P) = \mathrm{grad}(\phi).$$

(2) *Ist ϕ separabel, so gibt es nur endlich viele Verzweigungspunkte, d.h. Punkte P mit $e_\phi(P) \geq 2$, insbesondere gilt für alle Punkte Q von C_2 mit nur endlich vielen Ausnahmen:*

$$\#\phi^{-1}(Q) = \mathrm{grad}(\phi).$$

Jede nichtkonstante Funktion $f \in \overline{K}(C)$ liefert durch $\phi = (1 : f)$ einen Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$, mit unserem letzten Beispiel folgt sofort:

Folgerung. *Ist C eine glatte Kurve und $f \in \overline{K}(C) \setminus \overline{K}$, so nimmt f jeden Wert gleich oft an, wenn man mit Vielfachheiten zählt.*

Es gibt also genauso viele Null- wie Polstellen, womit wir haben:

Folgerung. *Ist C eine glatte Kurve und $f \in \overline{K}(C)$, so gilt*

$$\sum_{P \in C} \mathrm{ord}_P(f) = 0.$$

Bemerkungen:

- Später werden wir uns näher mit sogenannten **hyperelliptischen Kurven** beschäftigen. Im Wesentlichen werden diese dadurch charakterisiert, dass sie nichtsinguläre, absolut irreduzible, projektive Kurven C sind, die einen Morphismus
$$\phi : C \to \mathbb{P}^1 \quad \text{mit} \quad \mathrm{grad}(\phi) = 2$$
besitzen. (Auch $\mathbb{P}^1$ und sogenannte **elliptische Kurven** besitzen einen Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ vom Grad 2, die aber nicht als hyperelliptische Kurven gezählt werden.)
- Wie kann man Kurven C beschreiben, die einen Morphismus $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ vom Grad 2 besitzen? Sei $\phi : C \to \mathbb{P}^1$ ein Morphismus vom Grad 2. Als rationale Abbildung lässt sich ϕ schreiben als $\phi = (1 : \xi)$ mit $\xi \in \overline{K}(C) \setminus \overline{K}$. Verwenden wir wie üblich auf $\mathbb{P}^1$ die Koordinatenfunktion x, so ist $\phi^*(x) = \xi$. Dass ϕ Grad 2 hat, bedeutet, dass $\overline{K}(C)$ eine Körpererweiterung vom Grad 2 von $\phi^*\overline{K}(\mathbb{P}^1) = \phi^*\overline{K}(x) = \overline{K}(\xi)$ ist. Setzen zusätzlich voraus, dass die Charakteristik von K von 2 verwenden ist, so existiert ein $\eta \in \overline{K}(C)$ und ein Polynom separables Polynom $f(x) \in \overline{K}[x]$ mit
$$\overline{K}(C) = \overline{K}(\xi)(\eta) \quad \text{und} \quad \eta^2 = f(\xi).$$

(Dies entspricht der Aussage, dass die quadratischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ in der Form $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit quadratfreien Zahlen $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$ geschrieben werden können.) Dann ist

$$\overline{K}(C) \simeq \mathrm{Quot}(\overline{K}[x,y]/(y^2 - f(x))),$$

C ist also birational äquivalent zu der durch

$$y^2 = f(x)$$

definierten Kurve, bei der der Morphismus nach $\mathbb{P}^1$ einfach durch $(x,y) \mapsto x$ gegeben wird.

Exkurs: Potenzreihenentwicklungen - Laurentreihenentwicklungen

Lemma. *Sei t uniformisierend in einem Punkt P einer Kurve C. Zu $g \in K(C)^*$ mit $m = \mathrm{ord}_P(g)$ und $n \geq m$ gibt es dann Zahlen $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n \in K$ mit*

$$g \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i t^i \bmod t^{n+1},$$

d.h.

$$g - \sum_{i=m}^{n} c_i t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P}.$$

Die Koeffizienten c_i sind eindeutig bestimmt.

Beweis:

- *Existenz:* Sei zunächst $g \in \mathcal{O}_{C,P}$. Definiere $c_0 = g(P)$. Dann lässt sich zerlegen
$$g = c_0 + g_1 t,$$
wo wieder $g_1 \in \mathcal{O}_{C,P}$ ist. Dies lässt sich iterieren: Definiere $c_i = g_i(P)$ und schreibe $g_i = c_i + g_{i+1}t$ mit $g_{i+1} \in \mathcal{O}_{C,P}$. So erhält man
$$g = c_0 + g_1 t = c_0 + c_1 t + g_2 t^2 = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + g_3 t^3 = \cdots = c_0 + c_1 t + \cdots + c_n t^n + g_{n+1} t^{n+1}.$$
Damit hat man die gewünschte Zerlegung erhalten.
Ist $\mathrm{ord}_P(g) = -s < 0$, so entwickle man $t^s g \in \mathcal{O}_{C,P}$ modulo t^{n+1+s} und dividiere dann anschließend durch t^s.
- *Eindeutigkeit:* Es genügt die Eindeutigkeit für $g \in \mathcal{O}_{C,P}$ zu zeigen. Angenommen
$$g - \sum_{0 \leq i \leq n} c_i t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P} \quad \text{und} \quad g - \sum_{0 \leq i \leq n} d_i t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P},$$
dann ist auch
$$\sum_{0 \leq i \leq n} (c_i - d_i) t^i \in t^{n+1}\mathcal{O}_{C,P},$$
was nur sein kann, wenn alle $c_i = d_i$ sind. ■

Das vorangegangene Lemma deutet schon an, dass man einer Funktion des Funktionenkörpers $K(C)$ eine Potenzreihenentwicklung in einem Punkt P zuordnen kann. Kann man dies auch praktisch machen?

Sei eine Kurve C durch eine affine Gleichung $f(x,y) = 0$ gegeben zusammen mit einem nichtsingulären Kurvenpunkt $P = (a,b)$. (Den Funktionenkörper $K(C)$ kann man sich dann als $K(x,y)$ vorstellen, wo zwischen x und y die Beziehung $f(x,y) = 0$ gilt.) Die Tangente in P ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b) = 0.$$

Ist nun $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$, so ist $x - a = 0$ nicht die Tangente, also können wir $t = x - a$ als Uniformisierende in P verwenden. Nach dem vorangegangenen Lemma können wir jede Funktion $g \in K(C)^*$ in der Gestalt

$$g \equiv \sum_{i=m}^{n} c_i t^i \bmod t^{n+1}$$

entwickeln für beliebig große n. Da der Funktionenkörper $K(C)$ von x und y erzeugt wird, betrachten wir zunächst x und y. Nach Definition von t ist

$$x = a + t.$$

Wir suchen nun Zahlen $b_0, b_1, b_2, \dots$ mit

$$y \equiv \sum_{i=0}^{n} b_i t^i \bmod t^{n+1},$$

wobei wegen $y(P) = b$ natürlich $b_0 = b$ gilt.

Wir stellen hier ganz knapp ein paar Grundlagen zu Potenzreihen und Laurentreihen zusammen.

Man definiert den **Ring der formalen Potenzreihen** (in der Variablen t über dem Körper K) durch

$$K[[t]] = \left\{ \sum_{i \geq 0} a_i t^i : a_i \in K \right\}.$$

Es ist klar, wenn man addiert, multipliziert etc. Eine Potenzreihe $\sum_{i\geq 0} a_i t^i$ ist genau dann invertierbar, wenn $a_0 \neq 0$ gilt. Der Quotientenkörper $\mathrm{Quot}(K[[t]])$ wird mit den formalen Laurentreihen identifiziert:

$$K((t)) = \left\{ \sum_{i \geq n} a_i t^i, n \in \mathbb{Z}, a_i \in K \right\}.$$

Man definiert die Ordnung einer Potenz- bzw. Laurentreihe durch

$$\mathrm{ord}\,(\sum_{i \geq n} a_i t^i) = n, \text{ falls } a_n \neq 0.$$

Diese Ordnungsfunktion macht $K[[t]]$ zu einem vollständigen diskreten Bewertungsring.

Lemma. *Sei $f(x,y) \in K[x,y]$, seien $a, b \in K$ mit $f(a,b) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$. Sei t eine Variable über K. Beginnend mit $b_0 = b$ werden rekursiv Zahlen $b_0, b_1, b_2, \dots$ aus K wie folgt definiert: Sind $b_0, b_1, \dots, b_k$ bereits definiert, so sei c_{k+1} der Koeffizient des Polynoms $f(a + t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) \in K[t]$ bei t^{k+1}, also*

$$f(a + t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) = \dots + c_{k+1} t^{k+1} + \dots \in K[t]$$

Damit wird definiert

$$b_{k+1} = -\frac{c_{k+1}}{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}.$$

Dann gilt:

(1) *Es ist*

$$f(a + t, \sum_{i=0}^{n} b_i t^i) \equiv 0 \bmod t^{n+1} \text{ für alle } n \geq 0.$$

(2) *Die Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \in K[[t]]$ existiert in $K[[t]]$ und erfüllt die Gleichung*

$$f(a + t, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i) = 0,$$

d.h. $(a + t, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i)$ ist eine Nullstelle des Polynoms $f(x,y)$ in $K[[t]]$.

Beweis:

(0) Wir schreiben in $K[x,y,z]$

$$f(x, y+z) = A_0(x,y) + A_1(x,y)\cdot z + A_2(x,y)\cdot z^2 + \dots .$$

Setzt man $z=0$, so erhält man $A_0(x,y) = f(x,y)$. Differenziert man nach z, so erhält man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y+z) = A_1(x,y) + A_2(x,y)\cdot 2z + \dots ,$$

setzt man $z=0$ ein, so erhält man $A_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Insgesamt:

$$f(x, y+z) = f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot z + \text{ höhere Terme in } z.$$

(1) Wir zeigen durch Induktion, dass

$$f(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) \equiv 0 \bmod t^{k+1} \text{ für alle } k \geq 0$$

gilt.

- Der Induktionsanfang $k=0$ ist wegen
$$f(a, b_0) = f(a,b) = 0$$
trivialerweise richtig.
- Sei nun $k \geq 0$ und die Behauptung bereits für k gezeigt, d.h.
$$f(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) \equiv 0 \bmod t^{k+1}.$$
Wir können dann schreiben
$$f(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) = t^{k+1}(c_{k+1} + tg(t)).$$
Es folgt mit $z = b_{k+1}t^{k+1}$, wobei wir modulo t^{k+2} rechnen wollen:

$$\begin{aligned}
f(a+t, \sum_{i=0}^{k+1} b_i t^i) &= f(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i + b_{k+1}t^{k+1}) = \\
&= f(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i)\cdot b_{k+1}t^{k+1} + t^{k+1+k+1}\cdot(\dots) = \\
&= t^{k+1}(c_{k+1} + \dots) + \frac{\partial f}{\partial y}(a+t, \sum_{i=0}^{k} b_i t^i)\cdot b_{k+1}t^{k+1} + \dots \equiv \\
&\equiv \left(c_{k+1} + b_{k+1}\cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\cdot t^{k+1} \equiv 0 \bmod t^{k+2}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Behauptung durch Induktion.

(2) Für alle $n \geq 0$ gilt

$$f(a+t, \sum_{i=0}^{n} b_i t^i) \equiv 0 \bmod t^{n+1},$$

d.h.

$$\operatorname{ord}\left(f(a+t, \sum_{i=0}^{n} b_i t^i\right) \geq n+1.$$

Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(a+t, \sum_{i=0}^{n} b_i t^i) = 0.$$

Die Stetigkeit von $f(x,y)$ impliziert dann

$$f(a+t, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i) = 0.$$

Dies ist die Behauptung. ■

Satz. *Sei C eine absolut irreduzible, nichtsinguläre, projektive Kurve und $P \in C(K)$. In einer affinen Umgebung von P werde C durch die Gleichung $f(x,y) = 0$ beschrieben mit $P = (a,b)$, sodass $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$ gilt. Dann ist $t = x - a$ uniformisierend in P. Bestimmt man mit dem vorangegangenen Lemma*

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i \quad \textit{mit} \quad f(a+t, \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i) = 0 \ \textit{in} \ K[[t]],$$

so definiert

$$x \mapsto a+t, \quad y \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$$

eine Einbettung

$$K(C) \hookrightarrow K((t)),$$

wobei für $g \in K(C)$ gilt $\operatorname{ord}_P(g) = \operatorname{ord}(g)$.