Kurze Einführung in die formale Logik

© Edgar M. E. Wermuth, TH Nürnberg

Mein teurer Freund, ich rat' Euch drum,
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist euch wohl dressiert,
In spanische Stiefeln eingeschnürt,
Dass er bedächtiger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa, die Kreuz und Quer,
Irrlichteliere hin und her.
Mephistopheles (Goethe: Faust I)

Logic merely sanctions
the conquests of the intuition.
Jacques Salomon Hadamard

1 Vorbemerkungen

Bei Aussagen der Alltagssprache steht nicht immer fest, ob sie „wahr" oder „falsch" sind.

Fritz ist eine Nervensäge.
Frieda hat wieder nicht aufgepasst.
Friedrich II. von Preußen war ein großer König.
Lass mich in Ruhe, Friedhelm.

Der semantische Wirklichkeitsbezug (und damit der „Wahrheitsgehalt") solcher Aussagen ist ungeheuer komplex, nicht selten mehrdeutig, und außerdem ist gar nicht klar, ob man (wie Ludwig Wittgenstein (1889-1951) in seinem „Tractatus logico-philosophicus") überhaupt sagen kann: „Der Satz ist das logische Bild der Tatsache."
Es gibt aber viele Aussagesituationen, bei denen exakt zwischen zutreffenden (=wahren) und nicht zutreffenden (=falschen) Aussagen unterschieden werden kann, und bei *mathematischen* Aussagen ist diese Zweiteilung sozusagen als Grundregel ins System eingebaut. Zumindest, wenn man den Aufbau der Mathematik in der heute zumeist üblichen Weise begründet; die intuitionistische bzw. konstruktive Mathematik (Luitzen E. J. Brouwer (1881-1966), Paul Lorenzen (1915-1994)) berücksichtigt die mögliche Unentschiedenheit von Aussagen.
Die klassische formale Logik befasst sich generell nur mit Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind (ein Drittes gibt es nicht, *tertium non datur*), mit, wie man auch sagt, *wahrheitsdefiniten* Aussagen; während die konstruktive Logik berücksichtigt, dass die heutige mathematische Exaktheit eigentlich bloß *beweisdefinite* Aussagen garantiert. Insbesondere geht es in der klassischen formalen Logik um die Analyse der Struktur von solchen Aussagen und Schlussfolgerungen, die *aufgrund ihrer Form* wahr bzw. korrekt sind, wie z.B. die Aussage:

Wenn der Hahn kräht auf dem Mist,
ändert sich das Wetter oder
bleibt, wie's ist.

Diese Parodie einer meteorologischen Bauernregel hat die *logische* Form:

Wenn A, dann B oder nicht B.

Unabhängig vom Wahr- oder Falschsein (dem *Wahrheitswert*) der Teilaussagen A und B ist die Gesamtaussage immer wahr. (Erfolgreiche Astrologen beherrschen die Kunst, in ihren Formulierungen diesem Ideal nahezukommen.)

2 Aussagenlogische Junktoren und Wahrheitstafeln

In der Aussagenlogik betrachten wir stets *Aussageformen* (*Formeln*), die aus irgendwelchen formallogisch nicht weiter zerlegten Aussagebausteinen, durch Variablen A, B, C, ... repräsentiert, mithilfe logischer *Junktoren* zusammengesetzt sind:

sprachlicher Ausdruck	Formelzeichen	Name
nicht A	$\neg$A	Negation
A und B	A $\wedge$ B	Konjunktion
A oder B	A $\vee$ B	Disjunktion
wenn A, dann B	A $\Rightarrow$ B	Subjunktion, Implikation
A genau dann, wenn B	A $\Leftrightarrow$ B	Bijunktion, Äquivalenz, Koimplikation

Eine präzise formallogische Bedeutung erhalten die Junktoren, indem festgelegt wird, wie das Wahr- oder Falschsein (und damit letztlich die inhaltliche Bedeutung, der Wirklichkeitsbezug) der zusammengesetzten Aussageformen von demjenigen der Bausteine A und B abhängen. Diese Definitonen kann man übersichtlich durch „*Wahrheitstafeln*" darstellen, wobei „W" für „wahr" und „F" für „falsch" steht. (Der Gebrauch von Wahrheitstafeln geht auf Charles S. Peirce (1839 - 1914) und Wittgensteins schon erwähnten „Tractatus" zurück.)

Definition 1 *Aussagenlogische Junktoren*

A	$\neg$A
W	F
F	W

A	**B**	A $\wedge$ B	A $\vee$ B	A $\Rightarrow$ B	A $\Leftrightarrow$ B
W	**W**	W	W	W	W
W	**F**	F	W	F	F
F	**W**	F	W	W	F
F	**F**	F	F	W	W

Von diesen Festlegungen ist höchstens diejenige von A $\Rightarrow$ B nicht selbstverständlich. Plausibel wird sie aber durch mathematische Beispiele wie:

$$0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$$

Diese Implikation möchte man als für beliebige reelle Zahlen a und b wahre mathematische Aussage ansehen; und im Falle des Nichtzutreffens von $0 < a < b$ kann eben $a^2 < b^2$ entweder wahr oder falsch sein („für diesen Fall wird nichts behauptet").

Mithilfe der eingeführten Junktoren kann man nun kompliziertere Aussageformen zusammensetzen wie

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{A} \vee (\neg \mathrm{B})),$$

$$(\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow ((\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A}) \Rightarrow (\mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{B})),$$

$$((\neg \mathrm{A}) \vee \mathrm{B}) \Rightarrow ((\neg \mathrm{B}) \wedge \mathrm{A}),$$

usw.
Um Klammern zu sparen, vereinbart man dabei, dass „$\neg$“ stärker als die anderen Junktoren bindet, und „$\wedge$“ sowie „$\vee$“ stärker als „$\Rightarrow$“ und „ $\Leftrightarrow$“. Dadurch vereinfacht sich z.B. die letzterwähnte Formel zu

$$\neg \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \Rightarrow \neg \mathrm{B} \wedge \mathrm{A}.$$

Mit der *Wahrheitstafelmethode* kann man für jede so gebildete Aussageform alle möglichen Wahrheitswertbelegungen durchmustern.
Dazu einige **Beispiele**:

a)

A	**B**	$\neg$A	$\vee$	B	$\Rightarrow$	$\neg$B	$\wedge$	A
W	**W**	F	W		F	F	F	
W	**F**	F	F		W	W	W	
F	**W**	W	W		F	F	F	
F	**F**	W	W		F	W	F	

b)

A	**B**	A	$\Rightarrow$	A	$\vee$	$\neg$B
W	**W**		W		W	F
W	**F**		W		W	W
F	**W**		W		F	F
F	**F**		W		W	W

Unter jedem Junktor steht der Wahrheitswert, der bei der links gegebenen Variablenbelegung für die mit diesem Junktor gebildete Teilformel resultiert; der am schwächsten bindende („äußerste“) Junktor ergibt dann den jeweiligen Wahrheitswert der ganzen Formel, welch letzterer durch Einrahmung hervorgehoben ist. ▫

Bei a) sieht man, dass $\neg\mathrm{A}\vee\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{B}\wedge\mathrm{A}$ genau dann wahr ist, wenn A wahr und B falsch ist. Die Formel $\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B}$ hingegen ist immer wahr, unabhängig von den Wahrheitswerten, mit denen A und B belegt sind. Jede solche durch ihre junktorenlogische Zusammensetzung wahre Aussageform nennt man *Tautologie* oder *allgemeingültig*; ebenso heißen *Aussagen* von tautologischer Form Tautologien (z.B. „Wenn der Hahn kräht. . . “).
Einige Beispiele für Tautologien:

$$\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{1}$$

$$(\neg \mathrm{A} \Rightarrow \neg \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{2}$$

$$(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{C})) \Rightarrow ((\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C})) \tag{3}$$

$$\mathrm{A} \Leftrightarrow \neg\neg \mathrm{A} \tag{4}$$

Mit der Wahrheitstafelmethode haben wir ein einfaches *schematisches Verfahren*, bei jeder aussagenlogischen Formel nach *endlich vielen Schritten* zu entscheiden, ob sie allgemeingültig ist.
Das Gegenstück zu den Tautologien sind die *Kontradiktionen*, die Aussageformen, die unabhängig von den Wahrheitswerten der in ihnen auftretenden Aussagevariablen stets falsch sind, z.B.

$$\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{A}$$

oder

$$(\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}).$$

Jede Kontradiktion enthält mindestens eine Negation.

3 Äquivalenzumformungen

Sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ Aussageformen und ist $\mathbf{F}_1 \Leftrightarrow \mathbf{F}_2$ eine Tautologie, so nennt man $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ *äquivalent*; bei jeder Verteilung der Wahrheitswerte auf die in $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ vorkommenden Variablen sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ entweder beide „wahr“ oder beide „falsch“. Man schreibt in diesem Fall auch:

$$\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$$

Zwei verschiedene zueinander äquivalente Aussageformen formulieren sozusagen mit unterschiedlichen Worten dieselbe logische Verknüpfung der in ihnen auftretenden (durch die Variablen repräsentierten) Aussagebausteine.
Beispiele für solche Äquivalenzen:

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \sim \neg(\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \tag{5}$$
$$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \sim \neg(\neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B}) \tag{6}$$
$$\mathrm{A} \Leftrightarrow \mathrm{B} \sim (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{A}) \tag{7}$$
$$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} \sim \mathrm{B} \vee \neg \mathrm{A} \tag{8}$$
$$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \sim (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}) \tag{9}$$
$$\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \sim (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \tag{10}$$
$$\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \sim \neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B} \tag{11}$$
$$\neg(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \sim \neg \mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B} \tag{12}$$
$$\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \sim (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C} \tag{13}$$
$$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \sim (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} \tag{14}$$
$$(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \neg \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \tag{15}$$
$$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \tag{16}$$

Die Äquivalenzen (9) und (10) heißen *Distributivgesetze*, (11) und (12) *de Morgansche Regeln*, (13) und (14) *Assoziativgesetze* der Aussagenlogik.

Die Assoziativgesetze zeigen (Mehrfachanwendung!), dass man bei mehrgliedrigen Disjunktionen oder Konjunktionen keine Klammern zu setzen braucht, da alle Klammersetzungen zu untereinander äquivalenten Formeln führen.
Die hier aufgeführten und ähnliche Äquivalenzen ergeben zusammen mit den folgenden beiden Sätzen die Möglichkeit, von einer Formel durch *Äquivalenzumformung* zu einer Vielzahl logisch gleichwertiger Formeln zu gelangen.

Satz 1

Jede Aussageform wird in eine zu ihr äquivalente verwandelt, wenn eine Teilformel durch eine äquivalente andere Formel ersetzt wird.

Beispielsweise ist Formel (3) äquivalent zu

$$(\mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{B})) \Rightarrow ((\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}) \Rightarrow (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{A})) \tag{17}$$

(hier wurde dreimal die Äquivalenz (8) benutzt),
und $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C})$ ist äquivalent zu $\mathrm{A} \wedge \neg(\neg\mathrm{B} \wedge \neg\mathrm{C})$.
Zum **Beweis** von Satz 1 bemerken wir nur, dass bei jeder Belegung der vorkommenden Variablen mit Wahrheitswerten der resultierende Wahrheitswert der ersetzten Teilformel nach Voraussetzung derselbe ist wie vor der Ersetzung, also auch der Wahrheitswert der Gesamtformel unverändert bleibt. ∎
Durch ähnliche Überlegungen gelangt man zu

Satz 2

Wird in zwei äquivalenten Aussageformen eine Variable an jeder Stelle ihres Auftretens durch eine bestimmte Formel ersetzt, ergeben sich wieder zwei äquivalente Aussageformen.

Beispiel: Es soll (17) weiter umgeformt werden. Wegen

$$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} \sim \mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}$$

gilt auch

$$\begin{aligned} \mathrm{A} \Rightarrow (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{B}) \quad &\sim \quad (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{A}, \\ (\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}) \Rightarrow (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{A}) \quad &\sim \quad (\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{A}) \vee \neg(\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A}), \end{aligned}$$

so dass (17) und damit auch (3) äquivalent ist zu

$$((\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{A}) \vee \neg(\mathrm{B} \vee \neg\mathrm{A})) \vee \neg((\mathrm{C} \vee \neg\mathrm{B}) \vee \neg\mathrm{A}). \tag{18}$$

Zur Veranschaulichung ersetzen wir die Variablen bei (3) und (18) durch Aussagen, und zwar

A Der See ist zugefroren.

B Dem Esel geht's zu gut.

C Der Esel geht auf's Eis.

Die aus (3) entstehende Aussage lautet dann:

> Falls der Esel, sofern der See zugefroren ist, auf's Eis geht, wenn es ihm zu gut geht, so geht der Esel bei zugefrorenem See auf's Eis, wenn es ihm bei zugefrorenem See zu gut geht. (3')

Aus (18) ergibt sich entsprechend:

> Der See ist nicht zugefroren, oder der Esel geht nicht auf's Eis, oder es stimmt nicht, dass der See nicht zugefroren ist oder es dem Esel zu gut geht, oder es stimmt nicht, dass der See nicht zugefroren ist oder es dem Esel nicht zu gut geht oder der Esel auf's Eis geht. (18')

Während man bei (3') unmittelbar erkennt, dass es sich um eine Tautologie handelt, die also, wenn man sie behauptet, nichts über den Wahrheitsgehalt der in ihr auftretenden Aussagebausteine beinhaltet und daher keinen Beitrag zur Eselskunde liefert, merkt man dies bei der logisch völlig äquivalenten Aussage (18') nicht so ohne weiteres. Deshalb ist es (auch bei Tautologien) nützlich, verschiedene äquivalente Varianten zu kennen, um besser echte von unechten Aussagen der Eselskunde zu unterscheiden. ▫

Bei dem soeben betrachteten Beispiel wurde die nur mit dem Junktor „⇒“ gebildete Formel (3) umgewandelt in eine äquivalente Formel, die ausschließlich die Junktoren „¬ “ und „∨“ verwendet. Dies führt auf die generelle Frage, inwieweit man beim Aussagenkalkül auf gewisse Junktoren verzichten könnte.

Satz 3

a) Zu jeder aussagenlogischen Formel $\boldsymbol{F}$ *gibt es äquivalente Formeln* $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ *und* $\boldsymbol{F}_3$*, die nur die Junktoren „¬“ und „∧“, nur „¬“ und „∨“ bzw. nur „¬“ und „⇒“ enthalten.*

b) $A \wedge B$ *lässt sich nicht allein mithilfe der Junktoren „¬“ und „⇔“ darstellen.*

Beweis:
Die Formeln (5) bis (8) in Verbindung mit den Sätzen 1 und 2 zeigen, dass alle Formeln in äquivalente Formeln umgewandelt werden können, in denen nur die Junktoren „¬“ und „∧“ bzw. „¬“ und „∨“ vorkommen. Wegen

$$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B} : \tag{19}$$

kann man das Auftreten von „∨“ durch das von „¬“ und „⇒“ ersetzen. Damit ist a) bewiesen.
Zum Nachweis von b) sei verwiesen auf Hilbert/Ackermann [2], Seite 14. ∎

Es gibt überraschenderweise auch zwei aussagenlogische Junktoren, die jeweils *allein* ausreichen, alle anderen auszudrücken, und zwar die folgenden:

Definition 2 *Sheffer-Strich und Peirce-Junktor*

A	**B**	A | B	A ↓ B
W	**W**	F	F
W	**F**	W	F
F	**W**	W	F
F	**F**	W	W

A | B („A unverträglich mit B") heißt *Sheffer-Strich*, A ↓ B („weder A noch B") heißt *Peirce*-Junktor (sprich „piers"). Es gilt

$$\mathrm{A} \mid \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \vee \neg\mathrm{B} \tag{20}$$

und

$$\mathrm{A} \downarrow \mathrm{B} \sim \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}, \tag{21}$$

weshalb die Sheffersche auch NAND-Verknüpfung („NOT AND", man vgl. (12)) und die Peircesche NOR-Verknüpfung („NOT OR") heißt.
Aus

$$\mathrm{A} \mid \mathrm{A} \sim \neg\mathrm{A},\ (\mathrm{A} \mid \mathrm{A}) \mid (\mathrm{B} \mid \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \vee \mathrm{B},\ (\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \mid (\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$$

sowie

$$\mathrm{A} \downarrow \mathrm{A} \sim \neg\mathrm{A},\ (\mathrm{A} \downarrow \mathrm{A}) \downarrow (\mathrm{B} \downarrow \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \wedge \mathrm{B},\ (\mathrm{A} \downarrow \mathrm{B}) \downarrow (A \downarrow \mathrm{B}) \sim \mathrm{A} \vee \mathrm{B}$$

folgt nach Satz 3 unmittelbar, dass alle anderen Verknüpfungen allein durch NAND oder allein durch NOR ausgedrückt werden können.
Aus Gründen der Lesbarkeit ist es aber dennoch sinnvoll, eine gewisse an die Alltagssprache angelehnte Redundanz der aussagenlogischen Formelsprache beizubehalten und alle fünf *ursprünglich eingeführten* Junktoren parallel zu verwenden (siehe auch das Esels-Beispiel).

4 Disjunktive und konjunktive Normalformen

Es gibt allerdings recht übersichtliche Darstellungen der aussagenlogischen Formeln, die ausschließlich die Junktoren „¬", „∧" und „∨" verwenden. Zu ihnen gelangt man, wenn man sich fragt, ob eigentlich mit den bisher eingeführten Junktoren zu jeder kombinatorisch möglichen Wahrheitstafel eine dieser entsprechende aussagenlogische Formel konstruiert werden kann.
Sei beispielsweise folgende Wahrheitstafel gegeben:

A	**B**	**C**	**F**
W	**W**	**W**	W
W	**W**	**F**	F
W	**F**	**W**	W
W	**F**	**F**	F
F	**W**	**W**	W
F	**W**	**F**	F
F	**F**	**W**	W
F	**F**	**F**	F

Die Frage ist, ob es tatsächlich eine Formel **F** mit den Variablen A,B,C gibt, zu der diese Tafel passt. Nun, die Formel soll genau dann mit dem Wahrheitswert „wahr" belegt werden, wenn

A und B und C wahr

oder

A und ¬ B und C wahr

oder

¬ A und B und C wahr

oder

¬ A und ¬ B und C wahr.

Dies ist offenbar der Werteverlauf der Formel

$$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \vee (\neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}), \tag{22}$$

womit eine geeignete Formel **F** gefunden ist.
Man nennt eine Formel solcher Bauart (eine mehrgliedrige Disjunktion, bei der jedes Disjunktionsglied eine Konjunktion von Variablen und negierten Variablen ist) eine *disjunktive Normalform.*
Vom vorgeführten Beispiel her ist klar, wie man bei jeder beliebigen gegebenen Werteverteilung (Wahrheitstafel) – unabhängig von der Anzahl der Variablen – zu einer passenden disjunktiven Normalform gelangt.
Allerdings gibt es evtl. auch äquivalente einfachere disjunktive Normalformen, bei denen nicht in jedem Disjunktionsglied alle Variablen vorkommen; (22) z.B. ist nach (16) äquivalent zu (A ∧ C) ∨ (¬ A ∧ C) und damit sogar zu C allein!
Statt als Disjunktion von Konjunktionen kann man jede aussagenlogische Formel **F** auch als Konjunktion von Disjunktionen darstellen, d.h. in *konjunktiver Normalform.* Man erhält sie z.B., indem man von einer disjunktiven Normalform von ¬ **F** ausgeht, nach den de Morganschen Regeln (11) und (12) ¬¬ **F** bildet und ¬¬ **F** ∼ **F** berücksichtigt.
Man kann auch durch Äquivalenzumformungen eine gegebene Formel in disjuktive oder konjunktive Normalform bringen.

Beispiel: Es soll (A ⇒ B) ⇒ (A ⇒ C) in konjunktive Normalform gebracht werden.
Es gilt:

$$\begin{aligned} & (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{C}) \\ \sim\ & (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \Rightarrow (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \\ \sim\ & \neg(\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \\ \sim\ & (\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}) \vee (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{C}) \\ \sim\ & (\mathrm{A} \vee (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{C})) \wedge (\neg\mathrm{B} \vee (\neg\mathrm{A} \vee \mathrm{C})). \end{aligned}$$

Hier hat man schon eine konjunktive Normalform, wenn man die innersten Klammern noch weglässt.
Eine disjunktive Normalform stellt die vorletzte Formel dar, wenn man noch die Klammern um ¬ A ∨ C weglässt. ▫

5 Semantischer Folgerungsbegriff und Ableitungskalkül

In den letzten Abschnitten wurden einige Techniken vorgeführt, durch Äquivalenzumformungen eine Aussageform in logisch *gleichwertige* umzuwandeln. Nun befassen wir uns

mit der allgemeineren Frage, wann eine Aussageform aus einer oder mehreren anderen *logisch folgt*.
Die Intention des logischen Schließens ist es, von einer oder mehreren vorausgesetzten Aussagen (*Prämissen*) zu einer solchen Folgerung (*Konklusion*) überzugehen, die auf jeden Fall dann wahr ist, wenn sämtliche Prämissen es sind.

Definition 3 *Semantischer Folgerungsbegriff*

Eine aussagenlogische Formel $\boldsymbol{F}$ *folgt aus den Formeln* $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ *(in Zeichen:* $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n \models \boldsymbol{F}$*) genau dann, wenn* $\boldsymbol{F}$ *wahr ist bei jeder Wahrheitswertbelegung der in* $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ *vorkommenden Aussagevariablen, für welche* $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$ *wahr sind.*

Aufgrund der Definition des Junktors "⇒" ergibt sich sofort

Satz 4

$\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n \models \boldsymbol{F}$ *gilt genau dann, wenn* $\boldsymbol{F}_1 \wedge \ldots \boldsymbol{F}_n \Rightarrow \boldsymbol{F}$ *eine Tautologie ist.*

Damit ist die Überprüfung eines aussagenlogischen Schlusses auf Korrektheit einfach darauf zurückgeführt, die Allgemeingültigkeit der korrespondierenden Implikation nachzuweisen, z.B. mit der Wahrheitstafelmethode.
Kennt man alle Tautologien, kennt man also auch alle korrekten Schlüsse. (Infolgedessen kann man sagen: Die formale Logik ist *die Lehre von den der Form nach wahren Aussagen.*)
Wir haben bisher die Allgemeingültigkeit von Formeln mittels Durchmusterung aller Möglichkeiten (Wahrheitstafeln) erschlossen. Dies ist eine *semantische* Methode. Andererseits gelangt man, von allgemeingültigen Formeln ausgehend, durch Äquivalenzumformung zu neuen allgemeingültigen Formeln. Es lässt sich nun sogar beweisen, dass man mit einigen einfachen Tautologien als *Axiomen* und einer einzigen *Ableitungsregel* alle anderen aussagenlogischen Tautologien erschließen kann.
Die Ableitungsregel ist der *Modus ponens* (Bezeichnung aus der traditionellen Syllogistik):

Sind $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ Formeln, und $\mathbf{F}_1$ sowie $\mathbf{F}_1 \Rightarrow \mathbf{F}_2$ Tautologien,
so ist auch $\mathbf{F}_2$ eine Tautologie. (MP)
(„Aus $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_1 \Rightarrow \mathbf{F}_2$ folgere $\mathbf{F}_2$.")

Dass diese Regel korrekt ist, ist klar, da offenbar $(\mathbf{F} \wedge (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G})) \Rightarrow \mathbf{G}$ für beliebige Formeln **F, G** eine Tautologie ist.
Als Axiome kann man alle Formeln der folgenden Formen wählen:

$$\mathbf{F} \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}) \tag{A1}$$
$$(\neg\mathbf{F} \Rightarrow \neg\mathbf{G}) \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{F}) \tag{A2}$$
$$(\mathbf{F} \Rightarrow (\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{H})) \Rightarrow ((\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{G}) \Rightarrow (\mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{H})) \tag{A3}$$

(Man vgl. Formeln (1) bis (3).)
(MP), (A1), (A2), (A3) ergeben zusammen einen *Ableitungskalkül*, mit dem sich alle Tautologien ableiten lassen (den Beweis dafür führen wir hier nicht, da etwas langwierig).
Für den Bereich der Aussagenlogik ist es allerdings weit einfacher, die Allgemeingültigkeit

einer Formel über Wahrheitstafeln zu beweisen, statt zu versuchen, sie schrittweise herzuleiten durch „geschickt gewählte" Einsetzung in den Axiomen (A1), (A2), (A2) sowie ebensolche Anwendungen von (MP). In der Quantorenlogik werden wir allerdings auf eine grundlegend andere Situation treffen.

6 Schaltfunktionen

Beim Aufstellen der Wahrheitstafel für eine aussagenlogische Formel ist es irrelevant, was die dabei auftretenden Buchstaben W und F inhaltlich bedeuten. Man kann völlig absehen vom Bezug zu „wahr" und „falsch", W und F durch irgendwelche anderen Zeichen, etwa 0 und 1, ersetzen, und eine Formel mit den Variablen $A_1, \ldots, A_n$ auffassen als *Funktion*, die jedem n-Tupel von Einsen und Nullen wieder 1 oder 0 zuordnet. Die zugehörige Wahrheitstafel ist dann nichts als die tabellarische Darstellung der Funktion. Zwei äquivalenten Formeln, in denen dieselben Variablen auftreten, wird auf diese Weise einunddieselbe Funktion zugeordnet, während verschiedenen Funktionen offenbar stets nicht-äquivalente Formeln entsprechen.
Bei n Variablen gibt es 2^n n-Tupel von Nullen und Einsen (für jeden der n Plätze hat man unabhängig voneinander jeweils zwei Möglichkeiten), also 2^{2^n} verschiedene solcher Funktionen. Diese Anzahl wächst mit n ungeheuer schnell:

n	1	2	3	4	5	6	7
2^{2^n}	4	16	256	65536	4294967296	$1,8446744 * 10^{19}$	$3,4028 * 10^{38}$

Es gibt also rund 4,3 Milliarden(!) verschiedene (logisch zueinander nicht äquivalente) Möglichkeiten, die fünf Sätze

A Heute ist es kalt.

B Morgen scheint die Sonne.

C Die Wetterkunde ist Hokuspokus.

D Meteorologie ist ein Teilgebiet der Geophysik.

E Die Geophysik ist eine Wissenschaft.

aussagenlogisch zu verknüpfen, z.B.:

- Wenn es heute kalt ist und morgen die Sonne nicht scheint, ist die Wetterkunde ein Hokuspokus, woraus folgt, dass die Geophysik, weil sie die Meteorologie als Teilgebiet umfasst, keine Wissenschaft ist.
- Da Meteorologie ein Teilgebiet der Geophysik ist, ist die Wetterkunde kein Hokuspokus; deshalb ist es heute nicht kalt und scheint morgen die Sonne.

Selbst wenn man Formeln wie

$$(A \Rightarrow B) \vee ((C \wedge \neg D) \Rightarrow \neg E)$$

und

$$(B \Rightarrow C) \vee ((D \wedge \neg E) \Rightarrow \neg A)$$

als von gleicher Bauart identifiziert, gibt es immer noch weit mehr als 35 Millionen wirklich verschiedenartiger Verknüpfungen von fünf Aussagebausteinen A, B, C, D, E. Der nahezu unermesslichen Fülle von 0-1-Funktionen entsprechen nun nur wenige Grundfunktionen, durch die alle Funktionen mittels Ineinandereinsetzen darstellbar sind, nämlich die den Junktoren korrespondierenden ein- und zweistelligen Funktionen. Man kann diese auch rein rechnerisch darstellen:
Wenn x und y jeweils für eine der Zahlen 0 und 1 stehen, gilt

Definition 4 *Schaltfunktionen*

$$\begin{aligned}
NON(x) &= 1-x\\
AND(x,y) &= xy\\
OR(x,y) &= x+y-xy\\
IMPL(x,y) &= 1-x+xy\\
EQU(x,y) &= 1-(x-y)^2\\
NAND(x,y) &= 1-xy\\
NOR(x,y) &= (1-x)(1-y)\\
XOR(x,y) &= (x-y)^2
\end{aligned}$$

Für zusammengesetzte Funktionen erhält man durch Ineinandersetzen dieser Rechenausdrücke die entsprechenden Funktionsterme, wobei sich mit $x^2 = x$ und $y^2 = y$ (da x und y gleich 1 oder 0 sind) Vereinfachungen ergeben.

Beispiel:

$$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \Leftrightarrow (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{C})$$

enspricht (mit A$\hat{=}x$, B$\hat{=}y$, C$\hat{=}z$)

$$\begin{aligned}
& \mathrm{EQU}(x \cdot \mathrm{OR}(y,z), \mathrm{OR}(xy,xz))\\
= \;& \mathrm{EQU}(x \cdot (y+z-yz), xy+xz-x^2yz)\\
= \;& \mathrm{EQU}(xy+xz-xyz, xy+xz-xyz)\\
= \;& 1
\end{aligned}$$

Die Beispielfunktion ergibt also stets den Wert 1; die zugrundeliegende Formel ist ja eine Tautologie (eines der Distributivgesetze). ▫

In dieser Weise kann man jede Tautologie mechanisch „ausrechnen“. Das algebraische Verfahren ist manchmal deutlich weniger aufwendig als die Wahrheitstafelmethode. (Die Auswertung der Wahrheitsbelegungen von Formeln ist aber ein prinzipiell schwieriges, ein möglicherweise „NP-vollständiges“ Problem; siehe Wang [20], Abschnitt 6.2.)

Man kann die aussagenlogischen Funktionen durch elektrische Schaltwerke mit mehreren Eingängen und einem Ausgang realisieren (Abb. 1).
Der Belegung eines Eingangs mit 1 oder 0 entspricht elektrisch: Es kommt während eines bestimmten Zeittaktes ein bzw. kein Impuls über diesen Eingang an; Analoges gilt für den Ausgang. Aus solchen Schaltungen sind Digitalrechner tatsächlich aufgebaut, weshalb aussagenlogische Äquivalenzumformungen ermöglichen, zu einer gegebenen Schaltung eine andere äquivalente, möglicherweise aber einfachere zu finden.

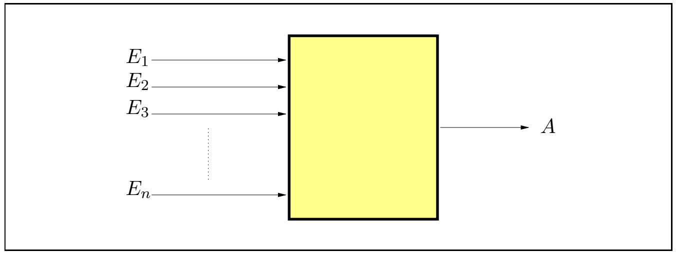

Abbildung 1: Schaltwerk

Man hat daher für die Zwecke des *Schaltungsdesigns* systematische Umformungstechniken auf der Basis von disjunktiven und konjunktiven Normalformen entwickelt; siehe z.B. Giloi/Liebig [8], Mendelson [9] und Schöne [11].
Als Anwendung der Schaltfunktionen überlegen wir uns die Konstruktion eines sogenannten *Volladdierers*.
Wir bestimmen zunächst die Schaltfunktionen f_1 und f_2, die zwei Dualziffern addieren und die den Übertrag berechnen. Aus ihnen kann ein *Addierwerk* für Dualzahlen aufgebaut werden.

x	y	$f_1(x,y)$	$f_2(x,y)$
1	1	0	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

Offenbar gilt für die Übertragsfunktion

$$f_2(x,y) = xy = \mathrm{AND}(x,y)$$

während

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x+y\,(\mathrm{mod}2)\\
&= (x-y)^2\\
&= \mathrm{XOR}(x,y)\\
&= 1-(1-(x-y)^2)\\
&= \mathrm{NON}(\mathrm{EQU}(x,y)).
\end{aligned}$$

Hat man die *Wertetafel* für eine Schaltfunktion $f(x,y,z)$ vorgegeben, so kann man den *algebraischen Ausdruck* für $f(x,y,z)$ folgendermaßen bestimmen:
Da der algebraische Term aus den Grundfunktionen zusammengesetzt ist, gilt stets

$$f(x,y,z) = a + bx + cy + dz + exy + fxz + gyz + hxyz$$

Dabei ist $a = f(0,0,0)$, $b = f(1,0,0,) - a$, $c = f(0,1,0) - a$, $d = f(0,0,1) - a$. Die Koeffizienten e, f und g bestimmen sich aus $f(1,1,0)$, $f(1,0,1)$ bzw. $f(0,1,1)$, h aus $f(1,1,1)$.

Analog kann man immer vorgehen, unabhängig von der Anzahl der zu berücksichtigen Variablen. Manchmal einfacher: Die disjunktive Normalform als Schaltfunktion schreiben und dann vereinfachen!

Wir entwickeln nun schrittweise den Aufbau eines Addierwerks, das zwei Dualzahlen der Länge n addiert.
Zunächst der Fall n=1 (Abb. 2).

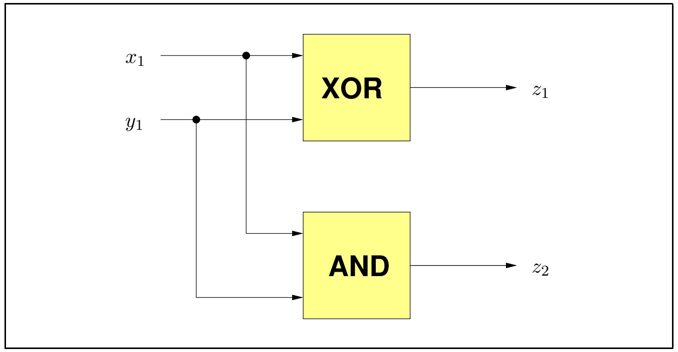

Abbildung 2: Addierwerk für zwei Dualziffern

Durch dieses Schaltwerk werden die beiden einstelligen Dualzahlen x_1 und y_1 zu der zweistelligen Dualzahl z_2z_1 addiert (wobei die führende Ziffer z_2 natürlich 0 sein kann).
Angenommen nun, es sei schon ein Addierwerk für zwei n-stellige Dualzahlen konstruiert worden; darauf aufbauend soll eines für (n+1)-stellige Zahlen entworfen werden. Ist dieser konstruktive Erweiterungsschritt allgemein geklärt, kann man offenbar sukzessiv für jedes natürliche n ein n-stelliges Addierwerk konstruieren.
(Diese *rekursive Konstruktion* der Addierwerke entspricht der rekursiven Definition und dem Beweis durch vollständige Induktion, von denen Mathematik wie Theorie der formalen Logik oft Gebrauch machen. Bemerkungen dazu am Ende von Abschnitt 10.)
Das schon konstruierte Addierwerk sei folgendermaßen bezeichnet (Abb. 3):

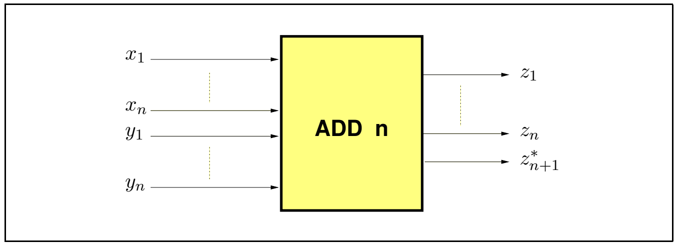

Abbildung 3: Addierwerk für zwei n-stellige Dualzahlen

Wollen wir nun zwei zusätzliche führende Stellen x_{n+1} und y_{n+1} in die Addition einbeziehen, ergibt sich die endgültige Stelle z_{n+1} aus x_{n+1}, y_{n+1} und der (n+1)-ten Resultatstelle z^*_{n+1} folgendermaßen (Abb. 4).

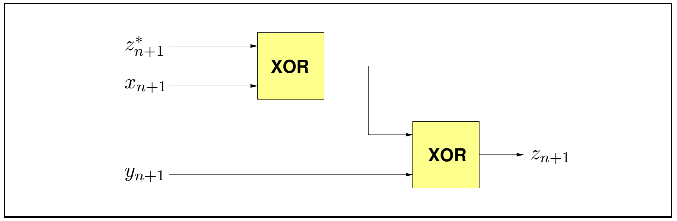

Abbildung 4: Schaltwerk für $n+1$-te Stelle

Der Wert der neuen führenden Resultatstelle z_{n+2} ist genau dann 1, wenn mindestens zwei der drei Werte z^*_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1} gleich 1 sind. Wir suchen also eine möglichst einfache Schaltung für

z	x	y	$f(z,x,y)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(z,x,y) &= xy + xz + yz - 2xyz \\ &= y(x+z-2xz) + xz \\ &= y(x+z-2xz) + xz - 2y(x+z-2xz)xz \\ &= \mathrm{XOR}(\mathrm{AND}(y, \mathrm{XOR}(x,z)), \mathrm{AND}(x,z)). \end{aligned}$$

Bei dieser Umformung wurde die wegen $x, y, z \in \{0,1\}$ gültige Identität

$$y(x+z-2xz)xz = 0$$

benutzt.
Damit kann man das Addierwerk für (n+1)-stellige Zahlen folgendermaßen gestalten (Abb. 5).

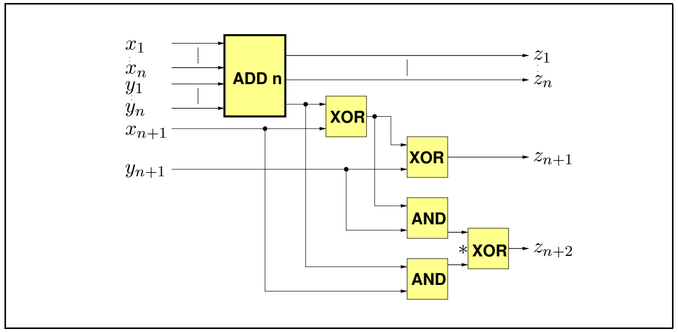

Abbildung 5: Addierwerk für $n+1$ Stellen

(Ein XOR-Schaltelement braucht bei gewissen Typen von AND-Schaltelementen an dem mit $*$ markierten Knoten nicht installiert zu werden, weil wegen $y(x+z-2xz)xz = 0$ die beiden AND-Ausgänge niemals gleichzeitig signalführend sind.)

7 Einführung der Quantoren

Die Aussagenlogik reicht schon nicht aus, um die aristotelischen Syllogismen logisch zu erfassen („Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.“). Noch weniger ist sie geeignet, die logische Feinstruktur mathematischer Aussagen wiederzugeben. Man betrachte folgende **Beispiele**:

1) Es gibt auf der Erde keinen Ort, der mit allen Orten auf dem Landwege verbunden ist.

2) Zu jedem Ort auf der Erde gibt es einen anderen, der nicht mit ihm auf dem Landwege verbunden ist.

3) Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine reelle Zahl y, so dass $z^2 + xz + x^2 \geq y$ für alle reellen Zahlen z.

4) Es gibt keine reelle Zahl x, so dass zu jedem reellen y ein reelles z existiert mit $z^2 + xz + x^2 < y$.

Man merkt sofort, dass die Aussagen 1) und 2) gleichwertig sind, und mit etwas mehr Mühe erkennt man auch die Gleichwertigkeit von 3) und 4). Um die *logische* Natur dieser Beziehungen sichtbar zu machen, muss man neben den Junktoren weitere immer wiederkehrende Aussagebestandteile als rein logische Sprachelemente herauslösen:
Es wird in den Aussagebeispielen 1) bis 4) über die Existenz oder Nichtexistenz gewisser Objekte gesprochen, die zu anderen Objekten in irgendwelchen Beziehungen stehen oder gewisse Eigenschaften haben. Das ist eine typische mathematische Aussagesituation und veranlasste Gottlob Frege (1848-1925), der die mathematischen Argumentationsweisen einer genauen logischen Analyse unterzog, *Objektvariablen* und die sogenannten *Quantoren* in die Logik einzuführen.

Wir wollen die Aussagen 1) bis 4) mithilfe solcher Variablen und Quantoren in eine formalisiertere Gestalt bringen.
Zunächst führen wir die Bezeichnung $\phi(x, y)$ ein, die besagen soll:

„Der Ort x ist mit dem Ort y auf dem Landwege verbunden.“

Dabei sind x und y *Variablen* für Orte, und ϕ ist eine *zweistellige Relation* (oder: ein zweistelliges *Prädikat*). Als weitere zweistellige Relation sei $\chi(x, y)$ definiert mit der Bedeutung:

„Es gibt eine reelle Zahl z mit $z^2 + xz + x^2 < y$.“

Die Variablen x und y stehen nun nicht für Orte der Erde, sondern für reelle Zahlen. Die Negation $\neg\chi(x, y)$ bedeutet offenbar:

„Für alle reellen Zahlen z gilt $z^2 + xz + x^2 \geq y$.“

Weiterhin führen wir den *Allquantor* $\forall x(\ldots)$ ein, der besagen soll:

„Für alle x gilt: …“,

ferner den *Existenzquantor* $\exists x(\ldots)$ mit der Bedeutung:

„Es gibt ein x, so dass gilt: …“.

Dabei steht „…“ jeweils für eine korrekt gebildete Formel, in der die Variable x vorkommen kann, aber nicht muss. Man nennt den durch „…“ bezeichneten Formelteil den *Wirkungsbereich* des Quantors und jedes Auftreten der Variablen x in diesem Bereich *gebunden* durch den Quantor $\forall x$ bzw. $\exists x$; im Gegensatz dazu heißt eine nicht durch den Quantor gebundene Variable in einer Formel *frei.* (Die gleiche Variable kann zugleich in einer Formel gebunden und frei auftreten, wie wir an Beispielen sehen werden.)
Um Klammern zu sparen, sei noch vereinbart, dass der Wirkungsbereich eines Quantors nur dann eingeklammert werden muss, wenn auf ihn rechts noch weitere Formelteile folgen.
Mit den getroffenen Vereinbarungen lassen sich die Aussagen 1) bis 4) folgendermaßen formalisieren:

$$\neg\exists x \forall y\, \phi(x, y) \tag{23}$$

und

$$\forall x \exists y\, \neg\phi(x, y) \tag{24}$$

entsprechen 1) bzw. 2),

$$\forall x \exists y\, \neg\chi(x, y) \tag{25}$$

und

$$\neg\exists x \forall y\, \chi(x, y) \tag{26}$$

repräsentieren 3) bzw. 4).
Man sieht bei dieser Schreibweise sofort, dass (23) und (26) sowie (24) und (25) jeweils eine übereinstimmende logische Struktur haben und die Äquivalenz von 1) und 2) sowie von 3) und 4) auf denselben logischen Sachverhalt zurückzuführen ist, nämlich auf die generelle Äquivalenz von

$$\neg\exists x \forall y\ \ldots$$

und

$$\forall x \exists y\, \neg \ldots$$

8 Die Sprachelemente der Prädikatenlogik

In den Beispielen sind alle typischen Sprachelemente aufgetreten, durch welche sich die prädikatenlogischen Formeln von denjenigen der Aussagenlogik unterscheiden. Eine prädikatenlogische Formel ist aufgebaut aus

- Variablenzeichen,
- n-stelligen Funktionszeichen (n=0,1,2...),
- n-stelligen Relationszeichen,
- den logischen Junktoren,
- den Quantoren.

Eine zahlentheoretische Formel, in der all diese Sprachelemente vorkommen:

$$\forall m \exists n \forall k \;\; k > n \Rightarrow k^3 > mk^2 + 1$$

Will man nur die formallogische Struktur ausdrücken, benutzt man nicht konkrete Funktions- und Relationsnamen und zugehörige spezielle Schreibkonventionen, sondern etwa
$x_1, x_2, x_3, \dots$ für Variablen,
$f_1, f_2, f_3, \dots$ für Funktionen,
$R_1, R_2, R_3, \dots$ für Relationen.
Die soeben betrachtete Formel erhält dann z.B. die Gestalt

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \;\; R_1(x_3, x_2) \Rightarrow R_1(f_1(x_3), f_2(f_3(x_1, f_4(x_3)), f_5)).$$

Dabei entspricht R_1 der zweistelligen „Größer"-Relation, f_1 der einstelligen „Hoch drei"-Funktion, f_2 der zweistelligen Additionsfunktion, f_3 der zweistelligen Multiplikationsfunktion, f_4 der einstelligen „Hoch zwei"-Funktion und f_5 schließlich der konstanten („nullstelligen") Funktion mit Wert 1.
Für theoretische Aussagen über die „Mechanik" des Kalküls ist es einfacher, sich auf eine solche normierte Schreibung zu beziehen; die Lesbarkeit geht aber, das zeigt schon dies einfache Beispiel, ohne die üblichen Sonderschreibweisen und vielerlei Abkürzungen schnell verloren. Wir werden deshalb im folgenden mathematiküblichere Schreibweisen vorziehen.
Bei jeder Formel ist die genaue Festlegung des Wirkungsbereichs jedes Quantors ganz wichtig. Einige **Beispiele**:

$$\forall m \exists n \forall k \; \exists l \; (n = kl) \Rightarrow k = 1 \vee k > m \tag{27}$$

$$\forall m \exists n \forall k \exists l \; n = kl \Rightarrow k = 1 \vee k > m \tag{28}$$

$$\forall m \exists n (m = 2^n) \vee \exists k \; m + 1 = k + n \tag{29}$$

$$\forall m \exists n \; m = 2^n \vee \exists k \; m + 1 = k + n \tag{30}$$

$$\forall m (\exists n (m = 2n \wedge n > 1)) \Rightarrow \exists k \exists l \; \mathrm{Prim}(k) \wedge \mathrm{Prim}(l) \wedge m = k + l \tag{31}$$

$$\forall m \exists n \; (m = 2n \wedge n > 1) \Rightarrow \exists k \exists l \; \mathrm{Prim}(k) \wedge \mathrm{Prim}(l) \wedge m = k + l \tag{32}$$

Die in (29) und (32) auftretende einstellige Relation Prim(n) ist eine Abkürzung für

$$\forall k \forall l \; n = kl \Rightarrow k = 1 \vee l = 1$$

mit der Bedeutung „n ist Primzahl".
(Solche Abkürzungen muss man in der Mathematik ständig einführen, um Aussagen überschaubar zu halten.)
Die Formeln (27) und (28) unterscheiden sich nur durch den Wirkungsbereich des Quantors $\exists l$. Das hat zur Folge, dass (28) trivialerweise wahr ist (z.B. mit $n = 1$), während (27) die Existenz unendlich vieler Primzahlen behauptet. Man beachte, dass keineswegs durch die Ausdehnung des Wirkungsbereiches von $\exists l$ eine vorher freie Variable gebunden wird. Dass ein solcher Effekt eine Formel erheblich verändern kann, liegt auf der Hand:
In (29) z.B. tritt n gebunden und frei auf, und da die freie Form für irgendeine beliebige natürliche Zahl steht, ist die Formel nicht allgemeingültig. Bei (30) hingegen ist jedes Auftreten von n durch $\exists n$ gebunden und die Formel wahr (z.B. mit der Wahl $n = 1, m = k$).
Formel (31) schließlich ist trivialerweise wahr, weil die Vorderformel von „$\Rightarrow$" falsch ist, während (32) die noch unbewiesene Goldbachsche Vermutung formuliert (Jede gerade Zahl > 2 ist die Summe zweier Primzahlen.).
Die Bezeichnung von Variablen ist im Prinzip belanglos, aber bei *Umbenennungen* muss man folgendes beachten:

- Es dürfen nicht zwei vorher verschiedene Variablen nach der Umbenennung gleich sein;
- wird eine Quantorvariable geändert, müssen alle durch diesen Quantor gebundenen Variablen mitgeändert werden, und der neue Variablenname darf nicht mit einem der bisher im Wirkungsbereich des Quantors frei vorkommenden übereinstimmen;
- wird eine freie Variable geändert, so muss jedes freie Vorkommen entsprechend mitgeändert werden, und keines dieser Vorkommen darf nach der Änderung gebunden sein.

Diese Bedingungen sind insbesondere dann erfüllt, wenn die Umbenennung der Variablen eine Bijektion ist. Es ist aber z.B. auch

$$\forall m \exists n \;\; (m = 2^n) \vee \exists k \;\; m + 1 = k + l \tag{33}$$

logisch gleichwertig zu (29).
Es ist zwar nicht zwingend, aber oft zweckmäßig, in einer Formel keine gebundenen Variablen zugleich als freie Variablen zu verwenden und für jeden Quantor eine andere Quantorvariable zu benutzen. Formel (33) ist durchsichtiger als (29) und auch klarer als die ebenfalls logisch gleichwertige Formel

$$\forall m \exists n \;\; (m = 2^n) \vee \exists n \;\; m + 1 = n + k. \tag{34}$$

Zum Zweck der Umformung in die äquivalente Formel

$$\forall m \exists n \;\; m = 2^n \vee m + 1 = n + k$$

ist allerdings (34) besser geeignet.

In der Mathematik hat man es oft mit mehreren klar abgegrenzten Variabilitätsbereichen zu tun, weshalb man meistens folgende Varianten der Quantorenschreibweise benutzt:

$$\forall x \in M\ (A) \quad :\Leftrightarrow \quad \forall x(x \notin M \vee A), \tag{35}$$
$$\exists x \in M\ (A) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x(x \in M \wedge A). \tag{36}$$

Insbesondere lauten die de Morgan-Regeln dann

$$\neg\forall x \in M\ (A) \quad \sim \quad \exists x \in M\ (\neg A) \tag{37}$$

und

$$\neg\exists x \in M\ (A) \quad \sim \quad \forall x \in M\ (\neg A). \tag{38}$$

Hat man mehrere Quantoren hintereinander, muss man jeden Quantor durch den jeweils anderen ersetzen, z.B. („f ist nicht fastperiodisch“):

$$\neg(\forall\epsilon > 0\ \exists x > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists t \in (y, y+x)\ \forall z \in \mathbb{R}\ |f(z) - f(z+t)|\ < \epsilon) \tag{39}$$

ist äquivalent zu

$$\exists\epsilon > 0\ \forall x > 0\ \exists y \in \mathbb{R}\ \forall t \in (y, y+x)\ \exists z \in \mathbb{R}\ |f(z) - f(z+t)|\ \geq \epsilon$$

Hierbei wurden noch Schreibweisen wie $\forall\epsilon > 0$ anstelle von $\forall\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ benutzt.
Eine andere mathematikübliche Quantorenschreibweise:

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \tag{40}$$

anstelle von

$$\forall x \in \mathbb{R}\ (f(x) = g(x) + h(x)).$$

Manchmal benutzt man noch die Bezeichnung $\exists!\ x\ (\ldots)$ mit der Bedeutung „Es gibt *genau* ein x, so dass ... “:

$$\exists!\ x\ (A(x)) \ :\Leftrightarrow\ \exists x\ (A(x) \wedge \forall y\ A(y) \Rightarrow y = x) \tag{41}$$

9 Wahre Formeln der Prädikatenlogik

Der Begriff der wahren Formel, der Tautologie, in der Prädikatenlogik ist weit weniger trivial als der entsprechende Begriff der Aussagenlogik. Denn bei der aussagenlogischen Formel sind alle Interpretationsmöglichkeiten durch die endliche Kombinatorik der Wahrheitstafelmethode zu erfassen, während bei der quantorenlogischen Formel z.B. die Variablen Bezug nehmen auf *irgendeinen Objektbereich*, also bei der Beurteilung der Allgemeingültigkeit einer Formel das Zutreffen für *jeden denkbaren Objektbereich* überprüft werden muss. Wir formulieren dies in einer Definition:

Definition 5 *Semantischer Wahrheitsbegriff*

Eine quantorenlogische Formel heißt allgemeingültig (oder Tautologie), wenn bei jeder Interpretation der in ihr auftretenden freien Variablen durch Dinge irgendeines nichtleeren Objektbereichs und bei Interpretation der auftretenden Relations- und Funktionszeichen durch Relationen und Funktionen dieses Objektbereichs diese Formel in eine wahre Aussage über diesen Objektbereich übergeht.

Wenn man davon ausgeht, dass die formale Logik als Fundament der Mathematik gedacht ist, kann eine solche Begriffsbildung nicht ganz zufriedenstellen, da sie offenbar auf eine naive Mengenlehre zurückgreift, also einen methodischen *circulus vitiosus* in die Grundlegung der Mathematik einschleppt. So manchen mathematischen Logiker scheint das nicht zu kümmern, weil er die mathematische Logik eher als Teilgebiet denn als Fundament der modernen Mathematik ansieht. Es ist aber andererseits doch so, dass die meisten fruchtbaren Impulse und Ideen der modernen Logik aus Anstrengungen zur exakten methodischen Begründung der Mathematik herrühren. Und gemessen daran könnte die heute florierende mengentheoretisch-semantische mathematische Logik als Karikatur empfunden werden. Andererseits muss man aber bedenken: *Wenn* es irgendwie auf andere Weise gelungen ist, die Korrektheit des mathematischen Argumentierens zu sichern, oder wenigstens plausibel zu machen, dann sind auch die mit mengentheoretischen Methoden gewonnenen Aussagen der mathematischen Logik zumindest ebenso stichhaltig wie andere mathematische Aussagen.

Satz 5 *Einige wahre Formeln*

a) Folgende Formeln sind allgemeingültig:

1. $A \Rightarrow \exists x\ A$
2. $\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x(A) \Rightarrow \forall x(B))$
3. $(\exists x(A) \Rightarrow \exists x(B)) \Rightarrow \exists x(A \Rightarrow B)$
4. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x(A) \Rightarrow B)$ *(vordere Generalisierung)*
5. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \exists x\ B)$ *(hintere Partikularisierung)*
6. $\exists x\forall y\ A \Rightarrow \forall y\exists x\ A$

b) Einige Äquivalenzen:

1. $\forall x\forall y\ A \sim \forall y\forall x\ A$
2. $\exists x\exists y\ A \sim \exists y\exists x\ A$
3. $(\forall x\ A) \wedge (\forall x\ B) \sim \forall x\ A \wedge B$
4. $\left.\begin{array}{lcl} \neg(\forall x\ A) & \sim & \exists x\ \neg A \\ \neg(\exists x\ A) & \sim & \forall x\ \neg A \end{array}\right\}$ *de Morgansche Regeln*
5. *Wenn x nicht frei in A vorkommt, gilt:*
   $\left.\begin{array}{lcl} A \vee \exists x\ B & \sim & \exists x\ (A \vee B) \\ A \wedge \forall x\ B & \sim & \forall x\ (A \wedge B) \end{array}\right\}$ *Kommutativgesetze*
   $\left.\begin{array}{lcl} A \vee \forall x\ B & \sim & \forall x\ (A \vee B) \\ A \wedge \exists x\ B & \sim & \exists x\ (A \wedge B) \end{array}\right\}$ *Distributivgesetze*

In den Formeln dieses Satzes und im folgenden stehen A und B für beliebige quantorenlogische *Formeln*, nicht etwa nur für atomare Aussagen (wie in der Aussagenlogik).
Zum **Beweis**:
Wir beweisen nur exemplarisch die Formel a) 3., wobei wir die de Morgan-Regeln b) 4. benutzen.

$$\exists x\ (A) \Rightarrow \exists x\ (B)$$

ist äquivalent zu

$$\neg\exists x\ (A) \vee \exists x\ (B)$$

und damit zu

$$\forall x\ (\neg A) \vee \exists x\ (B);$$

also ist die Formel a) 3. äquivalent zu

$$\neg(\forall x\ (\neg A) \vee \exists\ x(B)) \vee \exists x\ (A \Rightarrow B),$$

d.h. zu

$$(\exists x\ (A) \wedge \forall x\ (\neg B)) \vee \exists x\ (\neg A \vee B).$$

Wenn das linke Disjunktionsglied nicht zutrifft bei einer Interpretation, gilt entweder $\neg A$ für alle x, oder für ein x gilt B. Auf jeden Fall gilt dann $\neg A \vee B$ für ein x, d.h. das rechte Disjunktionsglied trifft zu. ■

Wegen der größeren Kompliziertheit des semantischen Wahrheitsbegriffs hat man nun in der Quantorenlogik kein einfaches *Entscheidungsverfahren*, die Allgemeingültigkeit oder Nichtallgemeingültigkeit einer Formel zu überprüfen. Man hat nicht nur keines gefunden bisher, sondern es gilt sogar:

> **Satz 6** *A. Church, 1936*
>
> *Es gibt kein explizites Entscheidungsverfahren für die Formeln der Quantorenlogik.*

Siehe z.B. Hilbert/Ackermann [2], S. 119ff. Dennoch ist eine präzise Charakterisierung aller wahren Formeln durch einen *Ableitungskalkül* möglich.
Der Ableitungskalkül besteht aus *Axiomen* und *Ableitungsregeln*:
Alle Formeln der folgenden Formen sind *Axiome*:

$$A \quad \Rightarrow \quad (B \Rightarrow A) \qquad \text{(A1)}$$
$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \quad \Rightarrow \quad (B \Rightarrow A) \qquad \text{(A2)}$$
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \quad \Rightarrow \quad ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \qquad \text{(A3)}$$
$$\forall x\ (A \Rightarrow B) \quad \Rightarrow \quad (A \Rightarrow \forall x\ B), \text{ falls } x \text{ nicht frei in } A \text{ vorkommt} \qquad \text{(A4)}$$
$$\forall x\ (A) \quad \Rightarrow \quad A|_{x=y}\ , \text{ falls } x \text{ in keiner Teilformel } \forall y(B) \text{ frei auftritt} \qquad \text{(A5)}$$

Dabei steht $A|_{x=y}$ für die Formel, die aus A entsteht, wenn man jedes frei vorkommende x durch y ersetzt. Die Bedingungen bei (A4) und (A5) sind keine echte Einschränkung, da sie durch Umbenennung der gebundenen Variablen stets zu erfüllen sind.
Ableitungsregeln sind der schon aus der Aussagenlogik bekannte *Modus ponens* (MP) sowie die *Generalisierung*:

Aus A folgere $\forall x\ A$. (GE)

Mit semantischen Argumenten konnte Kurt Gödel (1906-1978) nun zeigen (und damit zumindest eine konsistente Rechtfertigung des Kalküls liefern):

> **Satz 7** *Gödelscher Vollständigkeitssatz, 1930*
>
> *Jede allgemeingültige Formel der Quantorenlogik lässt sich mithilfe der Regeln (MP) und (GE) aus Axiomen der Typen (A1) bis (A5) herleiten.*

(Lässt man die Axiomentypen (A4) und (A5) sowie die Schlussregel (GE) weg und beschränkt sich auf aussagenlogische Formeln, erhält man wieder den Ableitungskalkül für die Aussagenlogik.)
Somit hat man in Gestalt von (A1) bis (A5), (MP) und (GE) eine explizite finite Charakterisierung der allgemeingültigen Formeln der Prädikatenlogik. Der Haken dabei: Der Kalkül beschreibt nur, wie eine korrekte Ableitung einer Tautologie auszusehen hat, aber *nicht*, wie man - bei vorgelegter (Vielleicht-)Tautologie - eine solche Ableitung finden kann! Dafür gibt es (nach Satz 6) kein konkretes Rezept.

10 Mathematische Beweise

Mathematische Aussagen haben oft die Form: „Aus A folgt B“. Streng formallogisch betrachtet, steckt aber meistens weit mehr dahinter!
Gehen wir aus von einem Beispiel:

„Jeder angeordnete Körper ist unendlich.“

Hier hat man die beiden Aussagen

A: „Die Menge K ist ein angeordneter Körper.“

und

B: „Die Menge K ist unendlich.“

Um nun „Aus A folgt B“ zu beweisen, benutzt man irgendwelche als bekannt vorausgesetzten (schon bewiesenen) Eigenschaften angeordneter Körper, aber möglicherweise auch irgendwelche anderen Eigenschaften von Mengen, d.h. Folgerungen aus dem mengentheoretischen Axiomensystem der Mathematik. Die zu beweisende mathematische Aussage ist also eigentlich:

„Ist K ein Objektbereich, für den die Axiome der Mengenlehre gelten sowie die durch die Definition des Begriffs ‚Angeordneter Körper‘ beinhalteten Aussagen, so ist K eine unendliche Menge.“

Kurz gesagt:

„Aus A und den Axiomen der Mengenlehre folgt B.“

Dies lässt sich aber nicht als prädikatenlogische Formel aufschreiben, da das Axiomensystem der Mengenlehre (wie dasjenige der Prädikatenlogik) aus unendlich vielen Axiomen besteht. Um den intendierten Sinn einer mathematischen Aussage logisch präzise zu erfassen, muss man den semantischen Folgerungsbegriff (Definition 3) auf unendliche Prämissenmengen verallgemeinern:

> **Definition 6** *Semantischer Folgerungsbegriff*
>
> *Eine Formel B folgt aus einer Formelmenge $\boldsymbol{A}$, in Zeichen $\boldsymbol{A} \vDash B$, wenn bei jeder Interpretation der in $\boldsymbol{A} \cup \{B\}$ auftretenden Objekt-, Relations- und Funktionssymbole, für die alle Formeln aus $\boldsymbol{A}$ wahr sind, auch B wahr ist.*

Ob jeder mathematischen *Folgerung* im Sinne dieser Definition (die natürlich ebenso wie Definition 5 auf eine schon zur Verfügung stehende „naive" Mengenlehre angewiesen ist!) auch eine *Ableitung* im Prädikatenkalkül entspricht, ist nicht von vornherein klar, da eine Ableitung ja immer nur auf endlich viele Prämissen zurückgreifen kann.
Dies wird geklärt durch den

Satz 8 *Endlichkeitssatz*

Folgt B aus einer Formelmenge $\boldsymbol{A}$, so gibt es eine endliche Teilmenge $A_1, \ldots, A_n$ von $\boldsymbol{A}$, aus der auch schon B folgt.

Zusammen mit dem Gödelschen Vollständigkeitssatz der Prädikatenlogik ergibt sich also

Satz 9

Zu jeder in einer mathematischen Theorie gültigen Aussage B gibt es endlich viele Axiome $A_1, \ldots, A_n$ der Theorie, so dass

$$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow B$$

im Prädikatenkalkül ableitbar ist.

Kurz gesagt: Jede in einer mathematischen Theorie wahre Formel ist in endlich vielen Schritten ableitbar.
Die nichttriviale Aufgabe, eine Ableitung für eine Formel B zu finden, wird manchmal erleichtert durch eine Umformulierung der Aussage. Besonders wirkungsvoll ist die Technik des *indirekten Beweises*:
Statt $\mathrm{A}_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}$ zu beweisen, beweist man die als Kontraposition logisch gleichwertige Formel

$$\neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{A}_1 \vee \ldots \vee \neg\mathrm{A}_n .$$

Und da $\mathrm{A}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}$ logisch gleichwertig ist zu $\mathrm{A}_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{A}_n \Rightarrow \mathrm{B}\vee\neg\mathrm{A}_1^*\vee\ldots\vee\neg\mathrm{A}_m^*$, wenn neben $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ auch $\mathrm{A}_1^*, \ldots, \mathrm{A}_m^*$ irgendwelche schon als gültig vorausgesetzte Formeln sind, kann man auch

$$\mathrm{A}_1^* \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}_m^* \wedge \neg\mathrm{B} \Rightarrow \neg\mathrm{A}_1 \vee \ldots \vee \neg\mathrm{A}_n$$

als Kontraposition der zu beweisenden Formel wählen. (Dabei wurde benutzt, dass man statt Axiomen auch andere schon aus den Axiomen gefolgerte Formeln zum Ausgangspunkt neuer Ableitungen machen kann; dies ergibt sich ja unmittelbar aus der Ableitungsregel, dem *Modus ponens*.)
Resultat ist die

Methode des indirekten Beweises:
Um eine mathematische Aussage (Formel) B herzuleiten, kann man stattdessen aus $\neg B$ und irgendwelchen schon bewiesenen Formeln die Negation *irgendeiner* als gültig bekannten Formel herleiten.

Man nennt einen solchen Beweis auch *Widerspruchsbeweis*, weil die dabei hergeleitete Negation einer als gültig angenommenen Formel ja „im Widerspruch steht" zu den Voraussetzungen; $\neg$B heißt in diesem Zusammenhang dann *Widerspruchsannahme*.

Die indirekte Beweismethode bringt insofern oft eine Beweiserleichterung, als man zusätzlich zu den schon bekannten Formeln $\neg$B als Voraussetzung zur Verfügung hat und außerdem nicht die spezielle Formel B herleiten muss, sondern nur *irgendeine* aus einer ganzen Klasse von Formeln.
Ein typisches einfaches Beispiel für den indirekten Beweis ist der Nachweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$. Dies ist zugleich ein Beispiel für einen *Unmöglichkeitsbeweis*: Die Nichtexistenz eines Objektes mit einer gewissen Eigenschaft wird bewiesen, indem die Annahme seiner Existenz zum Widerspruch geführt wird:
Angenommen, für zwei teilerfremde natürliche Zahlen p und q gilt $(p/q)^2 = 2$. Dann folgt $p^2 = 2q^2$ Also ist p^2 gerade und damit auch p. Folglich $p = 2p_0$ und somit $4p_0^2 = 2q^2$, $2p_0^2 = q^2$. Also ist auch q^2 und damit q gerade; Widerspruch!
Wenn sich dies auch nicht logisch präzise fassen lässt, so gibt ein sogenannter *direkter Beweis*, bei dem man schrittweise von den Prämissen zur zu beweisenden Behauptung B gelangt, im allgemeinen doch eher als ein indirekter Beweis das Gefühl, dass man nach Kenntnis des Beweises weiß, „warum" B gilt. (Im Falle der Irrationalität von $\sqrt{2}$ etwa liefert ein Beweis unter Bezugnahme auf den Satz von der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung eher ein Verständnis des Sachverhalts - und zugleich eine viel allgemeinere Aussage.)
Ein gelegentlicher beweistechnischer Anfängerfehler besteht darin, eine Aussage dadurch begründen zu wollen, dass man von ihr durch schrittweise Folgerung zu einer als wahr bekannten Aussage gelangt. Ein solcher Beweisversuch ist jedoch nur dann stichhaltig, wenn jeder Folgerungsschritt eine *Äquivalenzumformung* ist; denn aus etwas Falschem lässt sich formallogisch korrekt Beliebiges (auch Richtiges) folgern (*Ex falso quodlibet*). So ist z. B. für beliebige Aussagen A und B die Formel $\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$ eine Tautologie.
Die *vollständige Induktion*, eine besonders leistungsfähige mathematische Beweismethode, gehört nicht zur allgemeinen Logik des Beweisens, sondern ist das Fundament der Lehre von den natürlichen Zahlen und damit schon Teil der Mathematik. Ihrer logischen Struktur nach lässt sich die vollständige Induktion als Spezialfall der indirekten Beweismethode auffassen:
Zu beweisen sei die Gültigkeit von

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n))\,.$$

Man macht die Widerspruchsannahme

$$\neg\forall n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n))\,,\ \text{also}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ (\neg\mathrm{A}(n))\,.$$

Es ist nun eine fundamentale Eigenschaft der natürlichen Zahlen („Wohlordnung" von $\mathbb{N}$), dass es dann ein *kleinstes* natürliches n_0 gibt mit $\neg\mathrm{A}(n_0)$. Durch den Nachweis von

$$\mathrm{A}(1)\ \ \text{sowie}\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ (\mathrm{A}(n) \Rightarrow \mathrm{A}(n+1))$$

führt dies zu einem Widerspruch, ebenso natürlich durch den Nachweis von

$$\mathrm{A}(1) \wedge \ldots \wedge \mathrm{A}(n_0 - 1) \Rightarrow \mathrm{A}(n_0).$$

Auch in der Theorie der formalen Logik wird eine – sozusagen inhaltlich naive – Induktions-Argumentation oft benutzt: *Induktion über den Formelaufbau.* Grundlagenkritischer Einwand: Dann kann man doch erst recht in der Zahlentheorie die Induktion inhaltlich-naiv verwenden! Man berührt da den Dissens zwischen „Formalisten" und „Konstruktivisten".

Letztlich kommt man wohl um ein gewissermaßen *dialektisches* Verständnis der Rechtfertigung unserer Denk- und Argumentationsmethoden nicht herum: Es gibt keinen „archimedischen Punkt“, keinen ein für allemal endgültigen und voraussetzungslosen Ausgangspunkt unseres formalen Denkens. (Siehe auch [4, 7].)
Immerhin: Durch die genaue Erfassung der formal-logischen Struktur mathematischer Beweise ist eine *explizite Kodifizierung des korrekten mathematischen Schließens* möglich geworden. Die Kalküle der formalen Logik (insbesondere die „Resolution“, siehe etwa Schöning [1]) liefern auch die Grundlage für die KI-orientierte Programmiersprache PROLOG und für die Verfahren des „automatischen Beweisens“.
Der Prozess der mathematischen Erfindung aber wird durch die formallogisch präzise Beschreibung von Beweisen bestenfalls karikiert. Denn der Mathematiker lässt sich bei seinen Überlegungen weniger vom Formelapparat seiner logischen und mathematischen Axiome leiten als vielmehr von intuitiven Vorstellungen. Geschicklichkeit im mathematischen Beweisen setzt also neben einer Beherrschung des Formelapparates auch eine durch Erfahrung gereifte mathematische Intuition voraus. Letztere ist nur sehr schwer einem Computer-Programm beizubringen, weil vieles dabei unbewusst abläuft; und auch die Studierenden können sich da bis auf weiteres nur an ein von Paul R. Halmos formuliertes Rezept halten, bei welchem auf unbewusstem Lernen das Hauptgewicht liegt:

The only way to learn mathematics is to do mathematics.

[···] vielleicht gar eine Maschine, die alles exakt Denkbare mechanisch ausführt?
Dieser Gedanke ist noch unscharf; wir können ihn verschärfen,
indem wir die Schwierigkeiten ins Auge fassen, die seiner Verwirklichung entgegenstehen.
Die Maschine kann nur solche Informationen verarbeiten, die ihr eindeutig gegeben sind.
Zahlen sind dafür das beste Beispiel; nur deshalb sind die faktisch gebauten Maschinen
für die mechanische Ausführung denk-analoger Prozesse meist Rechenmaschinen.
Das Schema, nach dem eine Maschine arbeitet, kann aber, zum mindesten zu Anfang,
nicht selbst durch Hinschreiben einer Zahlenfolge mitgeteilt werden.
Wir müssen dafür vielmehr in Worten sagen, was mit den Zahlen geschehen soll.
Dieses informationstheoretisch so undurchsichtige Gebilde, die sogenannte „natürliche Sprache“,
die Sprache, in der sich normale Menschen verständigen,
ist zum mindesten als Ausgangspunkt unentbehrlich.
Es würde auch nichts nützen, ihre Buchstaben
durch Morse-Zeichen in Ja-Nein-Entscheidungen zu verwandeln.
Jetzt handelt es sich ja nicht darum, sie jemandem, der sie verstehen wird, telegraphisch mitzuteilen.
Es handelt sich nicht mehr darum, ihren Wortlaut, sondern ihren Sinn
in eine Gestalt zu bringen, in der mit ihm schematisch operiert werden kann.
Ist das, vielleicht nach gewissen Vorarbeiten, möglich?
Diese Frage hat wohl in voller Klarheit zuerst Leibniz gestellt.
Kann man, nicht dem sprachlichen Namen, sondern dem klar verstandenen Sinn
jedes Begriffs, den wir im Denken brauchen, genau ein Zeichen entsprechen lassen
und jeder zulässigen Denkoperation genau eine Operation mit diesen Zeichen,
derart, daß alles richtige Denken in diesen Operationen gespiegelt und kontrolliert würde
wie das Denken über Zahlen in den Operationen der Algebra?
Eine bescheidene Ausführung eines kleinen Teils seines Programms ist der moderne Logikkalkül.
Er ist die am weitesten getriebene Reduktion der Sprache
auf ihren eindeutig hantierbaren Informationsgehalt.
Er kehrt von der Lautschrift auf einer neuen Abstraktionsstufe
zur Bedeutungsschrift zurück.
Carl Friedrich von Weizsäcker (Die Einheit der Natur)

Das Paradoxe, das Widersprüchliche, wird durch unser Denken geschaffen;
vielleicht weil ein an sich widerspruchsloses Denken im letzten unmöglich ist,
vielleicht weil im notwendig Widersprüchlichen, im Paradoxen,
die Grenze des Erkennbaren erreicht ist,
von wo aus möglicherweise die Wahrheit zu ahnen ist.
Friedrich Dürrenmatt (Zusammenhänge - Essay über Israel)

Literatur

[1] U. SCHÖNING: Logik für Informatiker; BI, Mannheim ^{4}1996

[2] D. HILBERT / W. ACKERMANN: Grundzüge der theoretischen Logik, 5. Auflage; Springer, Berlin 1967

[3] P. LORENZEN: Formale Logik; de Gruyter, Berlin 1967

[4] W. KAMLAH / P. LORENZEN: Logische Propädeutik; BI, Mannheim 1967

[5] H. HERMES: Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit; Springer, Berlin 1971

[6] W. STEGMÜLLER: Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit; Springer, Wien 1973

[7] C. F. v. WEIZSÄCKER: Wie begründet man Logik? S. 53-64 in: Aufbau der Physik; dtv, München 1988

[8] W. K. GILOI / H. LIEBIG: Logischer Entwurf digitaler Systeme; Springer,Berlin 1973

[9] E. MENDELSON: Boolesche Algebra und logische Schaltungen; McGraw-Hill, London 1982

[10] E. P. LYNCH: Applied Symbolic Logic; Wiley, New York 1980

[11] A. SCHÖNE: Digitaltechnik und Mikrorechner; Vieweg, Wiesbaden 1984

[12] W. RAUTENBERG: Klassische und nichtklassische Aussagenlogik; Vieweg, Braunschweig 1979

[13] H.-D. EBBINGHAUS / J. FLUM / W. THOMAS: Einführung in die mathematische Logik; BI, Mannheim ^{3}1992

[14] M. M. RICHTER: Logikkalküle; Teubner, Stuttgart 1978

[15] Y. I. MANIN: A Course in Mathematical Logic; Springer, New York 1977

[16] S. C. KLEENE: Introduction to Metamathematics; North-Holand, New York 1971

[17] J. R. SHOENFIELD: Mathematical Logic; Addison-Wesley, Reading 1967

[18] J. D. MONK: Mathematical Logic; Springer, New York 1976

[19] J. BARWISE(ed.): Handbook of Mathematical Logic; North Holland, Amsterdam 1977

[20] H. WANG: Popular Lectures on Mathematical Logic; Dover, New York 1993

[1] ist eine ausgezeichnete moderne Einführung handlichen Umfangs, [2] ein noch immer sehr lesenswertes, auch didaktisch gut aufgebautes klassisches Werk, [3] ein inhaltsreiches Buch im Westentaschenformat, das auch auf die nichtklassische Logik eingeht. Diese drei exzellenten Bücher enthalten (unterschiedliche) Beweise des Gödelschen Vollständigkeitssatzes sowie des Churchschen Unentscheidbarkeitssatzes (Satz 6). Satz 6 wird auch in [5] und [6] ausführlich dargestellt nebst der zugrundeliegenden Theorie der rekursiven Funktionen, durch die der Begriff des Berechnungsverfahrens präzisiert wird. Die Werke [8, 9, 10, 11] behandeln Anwendungen der formalen Logik auf elektronische Schaltungen, chemische Anlagenplanung, usw.; [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19] sind - in etwa nach steigendem Schwierigkeitsgrad geordnet - anspruchsvollere Monographien zur modernen mengentheoretischen mathematischen Logik. Unter diesen Büchern zeichnet sich [15] durch besondere Originalität aus; der Autor Yuri I. Manin, Professor in Moskau und Bonn, kein Logik-*Spezialist*, ist einer der bedeutendsten zeitgenössischen Mathematiker. Sehr lesenswert ist auch [20]; Hao Wang war ein namhafter Logiker, Mathematiker und Philosoph.
Stand: Oktober 2003