Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen*

Karl-Hermann Neeb

Inhalt

* Skriptum zu einer Vorlesung an der TU Darmstadt im WS 03/04

I. Elementare Eigenschaften holomorpher Funktionen

In der Funktionentheorie von einer Veränderlichen beschäftigt man sich mit holomorphen Funktionen $f:\Omega \to \mathbb{C}$, wobei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist. In dieser Vorlesung werden wir die Einschränkung auf Dimension 1 fallen lassen, d.h. Ω wird eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$ sein. Wie aus der eindimensionalen Situation bekannt ist, gibt es mehrere äquivalente Zugänge zum Holomorphiebegriff. Das ist im Mehrdimensionalen ähnlich und wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels diskutiert werden. Es ist bemerkenswert, dass man viele mehrdimensionale Sätze durch eine einfache Induktion aus dem Eindimensionalen gewinnt und so keine neue harte Arbeit mehr leisten muss. Dies gilt insbesondere für die Cauchy'sche Integralformel für Polyzylinder, die sich sehr leicht aus der für Kreisscheiben ergibt. Hieraus werden wir dann ableiten, dass holomorphe Funktionen analytisch sind – eine Tatsache, die das Fundament der gesamten Funktionentheorie bildet.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels führen wir den Begriff der Holomorphie ein und beweisen eine Verallgemeinerung der Cauchy-Formel auf Polyzylinder. Der zweite Abschnitt ist der Diskussion analytischer Funktionen gewidmet. An seinem Ende steht die Erkenntnis, dass die Begriffe der Holomorphie und Analytizität zusammenfallen. In dritten Abschnitt werden wir einige Eigenschaften holomorpher Funktionen diskutieren: das Prinzip der analytischen Fortsetzung, den Satz der offenen Abbildung etc. Weiter werden wir sehen, wie man den Raum der holomorphen Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ zu einem metrischen Raum machen kann, und durch den Satz von Montel die kompakten Teilmengen dieses Raumes beschreiben.

I.1. Holomorphe Funktionen

Wir fixieren unsere Bezeichnungen wie folgt:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ steht für den Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen. Weiter setzen wir

$$\mathbb{R}^+ := \{r \in \mathbb{R}: r \geq 0\} = [0, \infty[.$$

Elemente von $\mathbb{C}^n$ werden wir mit $z = (z_1, \ldots, z_n)$ bezeichnen, und wir schreiben $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ für die kanonische Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Auf $\mathbb{C}^n$ betrachten wir die beiden folgenden Normen:

(1) $\|z\| := \|z\|_2 := \sqrt{\sum_{j=1}^n |z_j|^2}$ (*euklidische Norm*) und

(2) $\|z\|_\infty := \max\{|z_j|: j = 1, \ldots, n\}$ (*Maximum-Norm*). In $\mathbb{C}$ schreiben wir für Kreisscheiben:

$$K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\} \quad \text{und} \quad \overline{K}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}.$$

Definition I.1.1. (Komplexe Differenzierbarkeit) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung $f: \Omega \to \mathbb{C}^m$ heißt in $z_0 \in \Omega$ (*komplex*) *differenzierbar*, wenn es eine komplex-lineare Abbildung $A \in \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ gibt, sodass

$$\lim_{z \to z_0} \frac{1}{\|z - z_0\|}\Big(f(z) - f(z_0) - A(z - z_0)\Big) = 0$$

gilt. Äquivalent hierzu ist die Existenz einer Funktion $\varphi: \Omega - z_0 \to \mathbb{C}^m$ mit $\lim_{h \to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|} = 0$ und

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + A(h) + \varphi(h)$$

für $h + z_0 \in \Omega$. Ist f in z_0 differenzierbar, so gilt

$$A(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + tv) - f(z_0)}{t}$$

für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Hieraus folgt insbesondere, dass die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt ist. Wir definieren daher

$$df(z_0)(v) := \lim_{t \to 0} \frac{f(z_0 + tv) - f(z_0)}{t}$$

und beachten, dass dies eine lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist. ■

Bemerkung I.1.2. Aus der Definition der Differenzierbarkeit von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}^l$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, so wie man sie in der Analysis kennenlernt, folgt sofort, dass eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, genau dann in $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist, wenn sie reell differenzierbar ist und zusätzlich die reell lineare Abbildung

$$df(z_0): \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^m \cong \mathbb{R}^{2m}$$

komplex linear ist.

Stellen wir $df(z_0)$ für den Fall $n = m = 1$ bzgl. der kanonischen reellen Basis $(e_1, e_2) = (1, i)$ von $\mathbb{C}$ durch eine Matrix dar, so rechnet mal direkt nach, dass sie die Gestalt

$$df(z_0) \cong \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

hat. ■

Definition I.1.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen.
(a) (Holomorphie) Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ heißt *holomorph*, wenn sie in jedem Punkt $z_0 \in \Omega$ komplex differenzierbar ist. Wir schreiben $\mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ oder $\mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C}^m)$ für den komplexen Vektorraum der holomorphen Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}^m$. Für $m = 1$ setzen wir $\mathcal{O}(\Omega) := \mathrm{Hol}(\Omega) := \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C})$.
(b) (Partielle Holomorphie) Eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ heißt *partiell holomorph*, wenn für jeden Punkt $a \in \Omega$ und jeden Index $j \in \{1, \ldots, n\}$, für den $a + he_j \in \Omega$ für $h \in K_r(0) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$ gilt, die Funktion

$$f_{a,j}\colon K_r(0) \to \mathbb{C}^m, \quad h \mapsto f(a + he_j) = f(a_1, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)$$

holomorph ist. In diesem Fall definieren wir die partielle Ableitung durch

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\Big(f(a + he_j) - f(a)\Big). \qquad \blacksquare$$

Bemerkung I.1.4. (a) Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ eine Funktion mit den Komponentenfunktionen $f_1, \ldots, f_m$. Es folgt unmittelbar aus den Definitionen, dass f genau dann holomorph ist, wenn alle Komponentenfunktionen f_j holomorphe Funktionen sind. Diese Beobachtung zeigt, dass wir uns für das Studium vieler Aspekte der Holomorphie auf den Fall $m = 1$ beschränken dürfen.
(b) Jede komplex lineare Abbildung $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ ist holomorph mit $dA(z_0) = A$ für alle $z_0 \in \mathbb{C}^n$ (folgt sofort aus der Definition).
(c) Kompositionen holomorpher Funktionen sind wieder holomorph: Sind

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m \quad \text{und} \quad g\colon \Omega' \to \mathbb{C}^k$$

($\Omega' \subseteq \mathbb{C}^m$ offen) beide holomorph mit $f(\Omega) \subseteq \Omega'$, so ist $g \circ f\colon \Omega \to \mathbb{C}^k$ holomorph, und für jedes $z_0 \in \Omega$ gilt die Kettenregel:

$$d(g \circ f)(z_0) = dg\big(f(z_0)\big) \circ df(z_0)$$

(vgl. Aufgabe I.1.1(c) und Bemerkung I.1.2).
(d) Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind die Funktionen $g_j\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z_j)$ holomorph, denn $g_j = f \circ p_j$, wobei $p_j\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, z \mapsto z_j$, die Projektion auf die j-te Koordinate ist.
(e) Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ holomorph, so erhalten wir durch Ableiten eine Abbildung

$$df\colon \Omega \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \cong \mathbb{C}^{nm}.$$

Die Matrix von $df(z)$ bzgl. der kanonischen Basis enthält als Einträge die Zahlen $\frac{\partial f_j}{\partial z_k}(z)$. Mit (a) sehen wir also, dass die Abbildung df genau dann holomorph ist, wenn alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f holomorphe Funktionen sind. Wir werden unten sehen, dass dies immer der Fall ist.
(f) Ist $f \in \mathrm{Hol}(\Omega, \mathbb{C}^m)$, so ist f insbesondere partiell holomorph. Es ist allerdings ein tiefliegender Satz (Satz von Hartogs*), dass jede partiell holomorphe Funktion schon holomorph ist. Der schwierigste Teil des Beweises besteht darin, die Stetigkeit von f aus der partiellen Holomorphie zu folgern. Setzt man sie zusätzlich voraus, so ist die Behauptung viel leichter zu zeigen (das werden wir weiter unten in Theorem I.2.14 auch tun; siehe dazu auch Satz I.4.3). $\blacksquare$

---

* Friedrich Hartogs (1874 – 1943), deutscher Mathematiker in München.

Aufgabe I.1.1. (a) Wie sieht die Matrix einer komplex linearen Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ bzgl. der reellen Basis $(e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n)$ aus? Wie verändert sie sich, wenn man die Basis $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ betrachtet?
(b) Man zeige, dass eine Funktion, die in $z_0 \in \Omega$ differenzierbar ist, dort stetig ist.
(c) Man verifiziere, dass die Kettenregel (vgl. Bemerkung I.1.4(c)) und (für $m = 1$) die Produktregel sich wortwörtlich aus dem Reellen übertragen lassen. ■

Der Schlüssel zu allen weiteren Informationen über holomorphe Funktionen ist die *Cauchy-Formel für Kreisscheiben*, die wir aus der Funktionentheorie einer Variablen übernehmen:

Theorem I.1.5. (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben**) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega$ und $r > 0$, sodass die abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{K}_r(z_0)$ in Ω enthalten ist. Ist nun $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so sind die Werte von f im Innern $K_r(z_0)$ von $\overline{K}_r(z_0)$ gegeben durch die Integralformel:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad \textit{für} \qquad |z - z_0| < r. \qquad ■$$

Bemerkung I.1.6. Das Integral in Theorem I.1.5 ist ein komplexes Kurvenintegral. Wir erinnern uns daran, dass man solch ein Integral wie folgt auswertet. Parametrisieren wir $\partial K_r(z_0)$ durch $\zeta(t) := z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, so erhalten wir mit $d\zeta = rie^{it}dt$ die explizitere Formel

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 - z + re^{it}} re^{it}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(z_0 - z)r^{-1}e^{-it} + 1}\, dt. \end{aligned}$$

Für $z = z_0$ ergibt sich insbesondere die *Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt. \qquad ■$$

Wir möchten nun die Cauchy'sche Integralformel auf mehrdimensionale Situationen verallgemeinern. Hier bieten sich viele Wege an, die wir gehen könnten. Zum Beispiel könnte man eine Formel ableiten, die die Werte einer holomorphen Funktion im Innern einer Kugel bzgl. der euklidischen Norm durch ihre Werte auf der begrenzenden Sphäre reproduziert. Solche Formeln gibt es in der Tat, aber wir werden sehen, dass es sich als viel günstiger erweist, statt mit Kugeln mit sogenannten Polyzylindern zu arbeiten.

** Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), französischer Mathematiker in Paris; hat durch sein Buch "Cours d'analyse" wesentlich zur Entwicklung der Infinitesimalrechnung beigetragen; Systematisierung der komplexen Funktionentheorie.

Definition I.1.7. Wir definieren eine Ordnung auf $\mathbb{R}^n$ durch

$$x \leq y \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall j)\ x_j \leq y_j \quad \text{und} \quad x < y \quad :\Longleftrightarrow \quad (\forall j)\ x_j < y_j.$$

Für $z \in \mathbb{C}^n$ definieren wir $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Sei $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ und $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$. Dann heißt

$$P_{\mathbf{r}}(a) := \{z \in \mathbb{C}^n : (\forall j)|z_j - a_j| < r_j\} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < \mathbf{r}\}$$

offener Polyzylinder um a vom *Polyradius* $\mathbf{r}$ und

$$\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| \leq \mathbf{r}\}$$

abgeschlossener Polyzylinder um a.

Polyzylinder haben folgende Produktdarstellung:

$$P_{\mathbf{r}}(a) = \prod_{j=1}^n K_{r_j}(a_j) \quad \text{und} \quad \overline{P}_{\mathbf{r}}(a) = \prod_{j=1}^n \overline{K}_{r_j}(a_j).$$

Für $n = 1$ sind Polyzylinder Kreisscheiben, aber für $n = 2$ sind Polyzylinder keine euklidischen Kugeln. Im Fall $r_1 = \ldots = r_n = r$ ist $P_{\mathbf{r}}(a)$ die offene Kugel vom Radius r um a bzgl. der Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$.

Zur Motivation der Wortwahl "Polyzylinder" (engl: polydisc) : Für $n = 2$ ist die Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\exists (z_1, z_2) \in P_{\mathbf{r}}(0)) z_1 = x + iy, z = |z_2|\} = K_{r_1}(0) \times [0, r_2[$$

ein Zylinder. ∎

Hiermit können wir nun eine geeignete Verallgemeinerung der Cauchyschen Integralformel für Polyzylinder beweisen.

Theorem I.1.8. (Cauchy'sche Integralformel für Polyzylinder) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $a \in \Omega$ und $\mathbf{r} > 0$ mit $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$. Ist $f : \Omega \to \mathbb{C}$ partiell holomorph und stetig, so ist der Wert von f in $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$ gegeben durch die Integralformel:*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \oint_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n \cdots d\zeta_1.$$

Beweis. Zunächst beachten wir, dass der Integrand in der Formel gemäß unserer Annahme stetig ist, sodass wir das Integral als iteriertes Integral berechnen können und die Reihenfolge, in der wir das tun, nach dem Satz von Fubini keine Rolle spielt.

Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Dimension n. Für $n = 1$ folgt sie aus Theorem I.1.5.

Sei jetzt $n > 1$ und $\zeta' := (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ mit $|\zeta_i - a_i| = r_i$. Dann ist $(\zeta', w) \in \Omega$ für $|w - a_n| \leq r_n$ und wegen der partiellen Holomorphie von f ist die Funktion

$$w \mapsto f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, w)$$

auf einer Umgebung von $\overline{K_{r_n}(a_n)}$ holomorph, sodass der eindimensionale Fall die Formel

$$f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n}\, d\zeta_n$$

liefert.

Weiter ist $\Omega' := \{w \in \mathbb{C}^{n-1} \colon (w, a_n) \in \Omega\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^{n-1}$, denn die Abbildung

$$j \colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^n, \quad z' \mapsto (z', z_n)$$

ist stetig mit $\Omega' = j^{-1}(\Omega)$. Die Funktion $f' \colon \Omega' \to \mathbb{C}, w \mapsto f(w, z_n)$ ist partiell holomorph und stetig. Für $\mathbf{r}' = (r_1, \ldots, r_{n-1})$ und $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$ ist weiter $\overline{P}_{\mathbf{r}'}(a') \subseteq \Omega'$, sodass unsere Induktionsannahme für $z' \in P_{\mathbf{r}'}(a')$ zusammen mit dem eindimensionalen Fall die Formel

$$\begin{aligned}
&f(z) = f(z', z_n) \\
=&\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \oint_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \oint_{|\zeta_{n-1} - a_{n-1}| = r_{n-1}} \frac{f(\zeta', z_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_{n-1} - z_{n-1})}\, d\zeta_{n-1} \cdots d\zeta_1 \\
=&\frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \oint_{|\zeta_{n-1} - a_{n-1}| = r_{n-1}} \oint_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta', \zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)}\, d\zeta_n \cdots d\zeta_1
\end{aligned}$$

liefert. ■

Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreiben wir von nun an kürzer:

$$\oint_{|\zeta - a| = \mathbf{r}} h(\zeta)\, d\zeta := \oint_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \oint_{|\zeta_n - a_n| = r_n} h(\zeta)\, d\zeta_n \cdots d\zeta_1.$$

Bemerkung I.1.9. Das Integral auf der rechten Seite der Cauchyschen Integralformel kann man als ein Integral über die Menge

$$T_{\mathbf{r}}(a) := \{z \in \mathbb{C}^n \colon (\forall j) |z_j - a_j| = r_j\}$$

lesen. Topologisch ist $T_{\mathbf{r}}(a) \cong (\mathbb{S}^1)^n$ ein n*-dimensionaler Torus*. Man beachte insbesondere, dass zwar $T_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \partial P_{\mathbf{r}}(a)$ gilt, aber der Rand von $P_{\mathbf{r}}(a)$ für $n \geq 2$ viel größer als $T_{\mathbf{r}}(a)$ ist.

Für diejenigen, die sich mit Mannigfaltigkeiten auskennen: Da ein Polyzylinder konvex ist (Übung), ist sein Rand homöomorph zur $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre. Der Torus $T_{\mathbf{r}}(a)$ hat allerdings nur die Dimension n, also die halbe Dimension von $\mathbb{C}^n$. Umso interessanter ist es natürlich, dass die Werte einer holomorphen Funktion auf $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a)$ schon durch ihre Werte auf $T_{\mathbf{r}}(a)$ eindeutig bestimmt sind. Das ist eine Folgerung aus der Cauchy'schen Formel. Siehe hierzu auch die Diskussion der Eindeutigkeitsmengen in Abschnitt I.4. ■

Aufgabe I.1.2. Vergleiche für einen zweidimensionalen Polyzylinder $P_{\mathbf{r}}(a)$ den topologischen Rand mit dem Torus $T_{\mathbf{r}}(a)$. ■

Mittels der Cauchy-Formel lassen sich nun Regularitätseigenschaften holomorpher Funktionen ableiten, da man die Abhängigkeit des Integrals auf der rechten Seite von z sehr gut kontrollieren kann.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, dass stetige partiell holomorphe Funktionen sich lokal durch Potenzreihen darstellen lassen, d.h. analytisch sind. Hieraus folgt schnell, dass sie holomorph sind.

I.2. Analytische Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir den Begriff einer analytischen Funktion und einige der wesentlichen Eigenschaften analytischer Funktionen kennenlernen. Um mit konvergenten Potenzreihen in mehreren Variablen geeignet hantieren zu können, werden wir uns zuerst überlegen, wie man Reihen aufsummiert, deren Indexmenge nicht die Menge $\mathbb{N}$ ist, sondern zum Beispiel auch $\mathbb{N}^n$ oder $\mathbb{Z}^n$ sein darf.

Summierbarkeit

Definition I.2.1. Eine Familie $(x_j)_{j\in J}$ komplexer Zahlen heißt *absolut summierbar*, wenn

$$\|(x_j)\|_1 := \sum_{j\in J} |x_j| := \sup\Big\{\sum_{j\in F} |x_j| : F \subseteq J, |F| < \infty\Big\} < \infty$$

ist.

Aus dieser Bedingung folgt sofort, dass die Menge $J_0 := \{j \in J : x_j \neq 0\}$ abzählbar ist (Übung!). Ist J_0 endlich, so ist $\sum_{j\in J} x_j$ wohldefiniert. Ist $J_0 = \{j_n : n \in \mathbb{N}\}$ unendlich, so ist $\sum_{n=1}^\infty x_{j_n}$ eine absolut konvergente Reihe. Für ihren Grenzwert schreiben wir $\sum_{j\in J} x_j$. Das ist dadurch gerechtfertigt, dass der Grenzwert obiger Reihe (wegen der absoluten Konvergenz) nicht von der Aufzählungsreihenfolge der Menge J_0 abhängt (Übung).

Ist $J = \mathbb{N}_0^n$, so spricht man auch von der *absoluten Konvergenz der Reihe* $\sum_j x_j$, denn das klingt vertrauter. Man meint aber eigentlich die Summierbarkeit. ■

Aufgabe I.2.1. (a) Ist die Familie $(x_j)_{j\in J}$ komplexer Zahlen absolut summierbar, so ist sie auch *summierbar* im folgenden Sinn: Es existiert eine Zahl $s \in \mathbb{C}$, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilmenge $F \subseteq J$ so existiert, dass für jede endliche Teilmenge $E \supseteq F$ von J gilt:

$$|\sum_{j\in E} x_j - s| < \varepsilon.$$

(b) Etwas schwieriger ist folgende Umkehrung: Ist die Familie $(x_j)_{j\in J}$ komplexer Zahlen summierbar im Sinne von (a), so ist sie auch absolut summierbar. Hinweis: Man reduziere die Aussage auf Familien reeller Zahlen und verwende den Riemannschen Umordnungssatz.
(c) Sind $(x_j)_{j\in J}$ und $(y_k)_{k\in K}$ absolut summierbare Familien komplexer Zahlen, so gilt dies auch für die Produktfamilie $(x_j y_k)_{(j,k)\in J\times K}$. Weiter gilt

$$\Big(\sum_{j\in J} x_j\Big)\Big(\sum_{k\in K} y_k\Big) = \sum_{(j,k)\in J\times K} x_j y_k. \qquad \blacksquare$$

Definition I.2.2. Sei X eine Menge und $B(X)$ der Banachraum der beschränkten Funktionen $f\colon X \to \mathbb{C}$ mit der Supremumsnorm:

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}.$$

Eine Familie $(f_j)_{j\in J}$ von beschränkten Funktionen $f_j \in B(X)$ heißt *gleichmäßig summierbar*, wenn $(\|f_j\|_\infty)_{j\in J}$ absolut summierbar ist, d.h.

$$\sum_{j\in J} \|f_j\|_\infty < \infty.$$

In diesem Fall definieren wir die Funktion $\sum_j f_j$ punktweise durch $\sum_j f_j(x)$ für alle $x \in X$. Da $|\sum_j f_j(x)| \leq \sum_j |f_j(x)| \leq \sum_j \|f_j\|_\infty$ für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir insbesondere

$$\sum_j f_j \in B(X) \quad \text{mit} \quad \|\sum_j f_j\|_\infty \leq \sum_j \|f_j\|_\infty. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung I.2.3. (a) Ist $J = \mathbb{N}$, so reduziert sich der Begriff der gleichmäßigen Summierbarkeit natürlich sofort auf den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_n f_n$.
(b) Ist $(f_j)_{j\in J}$ eine gleichmäßig summierbare Familie von beschränkten Funktionen auf der Menge X, so ist die Menge $J_0 := \{j \in J\colon f_j \neq 0\}$ abzählbar, denn

$$J_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \quad \text{mit} \quad J_n := \{j \in J\colon \|f_j\|_\infty \leq \tfrac{1}{n}\}$$

und jede der Mengen J_n ist wegen $\frac{1}{n}|J_n| \leq \sum_{j\in J_n} \|f_j\|_\infty < \infty$ endlich. Für jede Aufzählung $J_0 = \{j_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ konvergiert die Funktionenfolge

$$F_m := \sum_{n=1}^{m} f_{j_n}$$

dann gleichmäßig gegen die Funktion $\sum_{j\in J} f_j$. $\blacksquare$

Potenzreihen

Um mit analytischen Funktionen und Potenzreihen gut umgehen zu können, benötigen wir zuerst eine geeignete Notation.

Wir schreiben $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für Elemente von $\mathbb{N}_0^n$ und denken sie uns als *Multiindizes*. Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $z \in \mathbb{C}^n$ definieren wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{und} \quad z^\alpha := z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

Für zwei Multiindizes α, β setzen wir

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j} = \prod_{j=1}^n \frac{\alpha_j(\alpha_j - 1) \cdots (\alpha_j - \beta_j + 1)}{\beta_j!}.$$

Beachte, dass $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ für $\beta \not\leq \alpha$ gilt.

Analog definieren wir Symbole für höhere partielle Ableitungen durch $D_j := \frac{\partial}{\partial z_j}$ und für Multiindizes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}.$$

Definition I.2.4. (a) Eine (*formale*) *Potenzreihe* in den Variablen $Z_1, \ldots, Z_n$ ist eine Reihe der Gestalt

$$P(Z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha Z^\alpha$$

mit $c_\alpha \in \mathbb{C}$ und $Z^\alpha = Z_1^{\alpha_1} \cdots Z_n^{\alpha_n}$. Wir schreiben

$$\mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$$

für den Vektorraum der formalen Potenzreihen in $Z_1, \ldots, Z_n$.

(b) Für formale Potenzreihen lassen sich formale Ableitungen beliebiger Ordnung leicht definieren:

$$(D^\beta P)(Z) := \sum_\alpha c_\alpha \beta! \binom{\alpha}{\beta} Z^{\alpha - \beta} = \sum_{\alpha \geq \beta} c_\alpha \beta! \binom{\alpha}{\beta} Z^{\alpha - \beta}.$$

Beachte, dass für $\beta \not\leq \alpha$ der Faktor $\binom{\alpha}{\beta}$ verschwindet. Insbesondere ist

$$D^\beta Z^\alpha = \big(\alpha_1(\alpha_1 - 1) \cdots (\alpha_1 - \beta_1 + 1)\big) \cdots \big(\alpha_n(\alpha_n - 1) \cdots (\alpha_n - \beta_n + 1)\big) Z^{\alpha - \beta}.$$

(c) Die Potenzreihe $P(Z)$ heißt in $z \in \mathbb{C}^n$ *konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha$$

absolut konvergiert (siehe Definition I.2.1). Wir beachten insbesondere, dass die Reihe in diesem Fall einen Grenzwert hat, der nicht von der Summationsreihenfolge abhängt.

Wir schreiben

$$\mathcal{D}_P := \Big\{ z \in \mathbb{C}^n \colon \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} |c_\alpha||z^\alpha| < \infty \Big\}$$

für den *Konvergenzbereich* der formalen Potenzreihe $P(Z)$ und

$$P \colon \mathcal{D}_P \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} c_\alpha z^\alpha$$

für die durch $P(Z)$ definierte Funktion. In diesem Sinn steht $P(z)$ für die komplexe Zahl, die wir durch Einsetzen von z_j für Z_j in die formale Potenzreihe $P(Z)$ erhalten. Wir sagen, $P(Z)$ *konvergiert auf* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, wenn $\Omega \subseteq \mathcal{D}_P$ gilt. ■

Nun stellt sich natürlich die Frage, auf welchen Gebieten Potenzreihen konvergieren. Im Eindimensionalen ist das sehr einfach: Es gibt eine Zahl R, den *Konvergenzradius*, sodass $P(Z) = \sum_{n=0}^\infty c_n Z^n$ für $|z| < R$ konvergiert und für $|z| > R$ divergiert, d.h.

$$K_R(0) \subseteq \mathcal{D}_P \subseteq \overline{K}_R(0).$$

Der Spektralradius lässt sich aus der Formel

$$R = \frac{1}{\limsup |c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

bestimmen (vgl. Wurzelkriterium). Insbesondere haben die formal abgeleiteten Potenzreihen

$$D^k P(Z) = k! \sum_{n \geq m} c_n \binom{n}{k} Z^{n-k}$$

den gleichen Konvergenzradius, da

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k}^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\big(n(n-1)\cdots(n-k+1)\big)^{\frac{1}{n}}}{(k!)^{\frac{1}{n}}} = 1$$

ist.

Mehr lässt sich im allgemeinen nicht sagen. Das wesentliche Datum, das den Konvergenzbereich beschreibt, ist also der Konvergenzradius. Im Höherdimensionalen ist die Situation komplizierter.

Um die Eigenschaften der Konvergenzbereiche besser studieren zu können, benötigen wir die Exponentialfunktion im $\mathbb{C}^n$:

Definition I.2.5. Wir betrachten die *Exponentialfunktion*

$$\exp\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \mapsto e^z := (e^{z_1}, \ldots, e^{z_n}).$$

Nach Bemerkung I.1.4(a),(d) ist die Exponentialfunktion holomorph.

Um die Exponentialfunktion besser zu verstehen, bemerken wir, dass $\mathbb{C}^n$ bezüglich der Addition eine abelsche Gruppe ist, andererseits aber auch ein multiplikatives Monoid (d.h. eine Halbgruppe mit Eins), wenn wir die Multiplikation komponentenweise definieren:

$$z \cdot w := (z_1 w_1, \ldots, z_n w_n).$$

Das Element $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1)$ ist natürlich das Einselement. Zusammen liefern beide Strukturen auf $\mathbb{C}^n$ die Struktur einer kommutativen komplexen Algebra mit Eins.*

In diesem Sinn ist

$$\exp\colon (\mathbb{C}^n, +, \mathbf{0}) \to (\mathbb{C}^n, \cdot, \mathbf{1})$$

ein Homomorphismus von Monoiden, da $\exp(0) = \mathbf{1}$ ist. Das Bild ist die Einheitengruppe $(\mathbb{C}^\times)^n = (\mathbb{C}^n)^\times$ der Algebra $\mathbb{C}^n$. Die Korestriktion liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\exp\colon \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^\times)^n,$$

dessen Kern gegeben ist durch

$$\ker(\exp) = 2\pi i \mathbb{Z}^n.$$

Die Untergruppe $i\mathbb{R}^n$ von $(\mathbb{C}^n, +)$ wird abgebildet auf den (Einheits-)Torus

$$\mathbb{T}^n := T_{\mathbf{1}}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon (\forall j) |z_j| = 1\},$$

der eine Untergruppe von $(\mathbb{C}^\times)^n$ ist. Der Polyzylinder

$$\mathbb{P}^n := \overline{P}_{\mathbf{1}}(0) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon (\forall j) |z_j| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \|z\|_\infty \leq 1\}$$

ist ein multiplikatives Untermonoid von $(\mathbb{C}^n, \cdot, \mathbf{1})$, dessen Einheitengruppe mit $\mathbb{T}^n$ übereinstimmt. ■

---

* Eine *komplexe Algebra* ist ein komplexer Vektorraum A mit einer assoziativen bilinearen Abbildung $A \times A \to A$, der Multiplikation der Algebra.

Satz I.2.6. *Für den Konvergenzbereich $\mathcal{D}_P$ der formalen Potenzreihe P gilt*

(i) $\mathbb{P}^n \cdot \mathcal{D}_P \subseteq \mathcal{D}_P$, *insbesondere ist*

$$\mathbb{T}^n \cdot \mathcal{D}_P = \mathcal{D}_P, \quad \mathcal{D}_P = \mathbb{T}^n \cdot (\mathcal{D}_P \cap (\mathbb{R}^+)^n)$$

und es gilt

$$z \in \mathcal{D}_P \quad \Leftrightarrow \quad |z| \in \mathcal{D}_P. \tag{2.1}$$

(ii) $\mathcal{D}_P \cap (\mathbb{R}^+)^n$ *ist logarithmisch konvex, d.h. für* $z, w \in \mathcal{D}_P \cap (\mathbb{R}^+)^n$ *und* $\lambda \in]0,1[$ *ist auch*

$$(z_1^\lambda w_1^{1-\lambda}, \ldots, z_n^\lambda w_n^{1-\lambda}) \in \mathcal{D}_P.$$

(iii) $\exp^{-1}(\mathcal{D}_P)$ *ist konvex.*

Beweis. (i) Für $w \in \mathbb{P}^n$ und $z \in \mathcal{D}_P$ gilt $|w_j z_j| \leq |z_j|$, also ist

$$\sum_\alpha |c_\alpha||(wz)^\alpha| \leq \sum_\alpha |c_\alpha||z^\alpha| < \infty$$

und somit $wz \in \mathcal{D}_P$. Ist $w \in \mathbb{T}^n$, so ist auch $w^{-1} \in \mathbb{T}^n$ und wir erhalten aus

$$w.\mathcal{D}_P \subseteq \mathcal{D}_P \quad \text{und} \quad w^{-1}.\mathcal{D}_P \subseteq \mathcal{D}_P$$

die Gleichheit $w.\mathcal{D}_P = \mathcal{D}_P$.

Da sich jedes $z \in \mathbb{C}^n$ schreiben lässt als

$$z = w|z| \quad \text{mit} \quad w \in \mathbb{T}^n$$

(Polarkoordinaten in $\mathbb{C}$), erhalten wir (2.1). Hieraus folgt weiter

$$\mathcal{D}_P = \mathbb{T}^n \cdot (\mathcal{D}_P \cap (\mathbb{R}^+)^n).$$

(ii) Aus der Konvexität der Exponentialfunktion erhalten wir für $x, y > 0$ und $0 < \lambda < 1$ die Beziehung

$$x^\lambda y^{1-\lambda} = e^{\lambda \log x + (1-\lambda) \log y} \leq \lambda x + (1-\lambda) y.$$

Für allgemeine $x, y \geq 0$ folgt diese Formel aus der Stetigkeit der Potenzfunktion $x \mapsto x^\lambda$ bzw. $y \mapsto y^{1-\lambda}$ in 0 aus $\lim_{x \to 0} x^\lambda = 0$. Damit ist

$$|c_\alpha||(z_1^\lambda w_1^{1-\lambda})^{\alpha_1} \cdots (z_n^\lambda w_n^{1-\lambda})^{\alpha_n}| = |c_\alpha|(z^\alpha)^\lambda (w^\alpha)^{1-\lambda} \leq |c_\alpha|\Big(\lambda z^\alpha + (1-\lambda) w^\alpha\Big).$$

Hieraus folgt (ii) sofort.

(iii) Seien $x, y \in \exp^{-1}(\mathcal{D}_P)$, $z := \exp x$ und $w := \exp y$. Wir haben zu zeigen, dass für $0 < \lambda < 1$ auch die Konvexkombination $\lambda x + (1-\lambda) y \in \exp^{-1}(\mathcal{D}_P)$ ist, also

$$\exp(\lambda x + (1-\lambda) y) \in \mathcal{D}_P.$$

Aus (i) folgt, dass dies äquivalent ist zu

$$|\exp(\lambda x + (1-\lambda) y)| = \exp(\mathrm{Re}(\lambda x + (1-\lambda) y)) = \exp(\lambda \,\mathrm{Re}\, x + (1-\lambda) \,\mathrm{Re}\, y) \in \mathcal{D}_P.$$

Da $|z| = \exp(\mathrm{Re}\, x)$ und $|w| = \exp(\mathrm{Re}\, y) \in \mathcal{D}_P$ sind, erhalten wir wegen (ii)

$$\begin{aligned} e^{\lambda \,\mathrm{Re}\, x + (1-\lambda) \,\mathrm{Re}\, y} &= (e^{\lambda \,\mathrm{Re}\, x_1 + (1-\lambda) \,\mathrm{Re}\, y_1}, \ldots, e^{\lambda \,\mathrm{Re}\, x_n + (1-\lambda) \,\mathrm{Re}\, y_n}) \\ &= (|z_1|^\lambda |w_1|^{1-\lambda}, \ldots, |z_n|^\lambda |w_n|^{1-\lambda}) \in \mathcal{D}_P. \end{aligned}$$

■

Wir kommen nun zu etwas feineren Konvergenzaussagen über Potenzreihen.

Lemma I.2.7. (Abel*)
(a) *Für* $\mathbf{r} > 0$ *sei die Familie* $(c_\alpha \mathbf{r}^\alpha)_\alpha$ *beschränkt. Dann konvergiert die formale Potenzreihe* $P(Z) = \sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha$ *und jede ihrer formalen Ableitungen* $D^\beta P(Z)$ *für jedes* $\theta \in]0,1[$ *gleichmäßig auf dem Polyzylinder* $P_{\theta\mathbf{r}}(0)$.
(b) *Gibt es ein* $z \in \mathbb{C}^n$ *mit* $|z| > 0$ *und eine Aufzählung* $\mathbb{N}_0^n = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, *für die die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\alpha_n} z^{\alpha_n} \tag{2.2}$$

konvergiert, so konvergiert $P(Z)$ *auf dem offenen Polyzylinder* $P_{|z|}(0)$.

Beweis. (a) Sei $\theta \in]0,1[$, $|c_\alpha \mathbf{r}^\alpha| \leq M$ für alle α sowie $\beta \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex. Für $z \in P_{\theta\mathbf{r}}(0)$ folgt dann

$$\sum_{\alpha \geq \beta} |c_\alpha| \beta! \binom{\alpha}{\beta} |z^{\alpha-\beta}| \leq \sum_{\alpha \geq \beta} |c_\alpha| \beta! \binom{\alpha}{\beta} \theta^{|\alpha-\beta|} \mathbf{r}^{\alpha-\beta} \leq \frac{M\beta!}{\theta^{|\beta|}\mathbf{r}^\beta} \sum_{\alpha \geq \beta} \binom{\alpha}{\beta} \theta^{|\alpha|}$$
$$\leq \frac{M\beta!}{\theta^{|\beta|}\mathbf{r}^\beta} \sum_{\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \theta^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n} = \frac{M\beta!}{\theta^{|\beta|}\mathbf{r}^\beta} \prod_{j=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha_j=0}^{\infty} \binom{\alpha_j}{\beta_j} \theta^{\alpha_j} \Big).$$

Die absolute Konvergenz der Reihe folgt nun aus Aufgabe I.2.1(c) und der absoluten Konvergenz der Potenzreihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m}{\beta_j} z^m$$

für $z = \theta < 1$ (Quotientenkriterium). Da obige Abschätzung unabhängig von z gilt, ist die Potenzreihe $D^\beta P(Z)$ auf $P_{\theta\mathbf{r}}(0)$ gleichmäßig summierbar bzw. gleichmäßig konvergent.
(b) Aus der Konvergenz der Reihe (2.2) folgt insbesondere die Beschränktheit der Folge

$$(c_{\alpha_n} z^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}},$$

also der Familie $(c_\alpha z^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$. Aus (a) folgt nun die Konvergenz der Potenzreihe $P(Z)$ auf $P_{|z|}(0)$. ■

Aufgabe I.2.2. (a) Beweisen Sie folgende Aussage über die Divergenz von Potenzreihen: Gibt es ein $\widehat{z} \in \mathbb{C}^n$ und eine Aufzählung $\mathbb{N}_0^n = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\alpha_n} \widehat{z}^{\alpha_n}$$

---

* Niels Henrik Abel (1802 – 1829(!)), norwegischer Mathematiker; hat zum Beispiel gezeigt, dass sich die allgemeine Polynomgleichung vom Grad ≥5 nicht durch Wurzeln lösen lässt; *Abelsche* Gruppen korrespondieren zu Gleichungen, die sich durch einmaliges Ziehen von Wurzeln lösen lassen.

divergiert, dann ist $P(Z)$ nicht konvergent für $|z| > |\widehat{z}|$.
(b) Es existieren Potenzreihen $P(Z)$, für die $\mathcal{D}_P$ von $\{0\}$ verschieden ist, aber keine inneren Punkte besitzt. Hierzu betrachte man die Potenzreihe

$$P(Z_1, Z_2) = \sum_{m=0}^{\infty} m!(Z_1 Z_2)^m$$

und verwende $\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}} = \infty$ (Nachweis!).
(c) (Überkonvergenz) Wir betrachten die Potenzreihe

$$P(Z) = \sum_{j=0}^{\infty}(Z_1 + Z_2)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} Z_1^k Z_2^{j-k}.$$

Man zeige

$$\mathcal{D}_P = \{z \in \mathbb{C}^2 \colon |z_1| + |z_2| < 1\}$$

und vergleiche mit der Konvergenz der geeignet gruppierten Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty}(Z_1 + Z_2)^j.$$

■

Aufgabe I.2.3. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ und $A := \mathcal{O}(\Omega, \mathbb{C})$ die komplexe Algebra der holomorphen Funktionen $\Omega \to \mathbb{C}$.

(1) Was ist die Einheitengruppe $A^\times$ dieser Algebra?

(2) Wir definieren eine Exponentialfunktion

$$\exp_A \colon A \to A, \quad f \mapsto (z \mapsto e^{f(z)})$$

punktweise. Zeige: $\exp_A \colon (A, +) \to (A^\times, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(3) Was lässt sich über die Surjektivität von $\exp_A \colon A \to A^\times$ sagen? Hinweis: Betrachte $\Omega := \mathbb{C}^\times$. ■

Aufgabe I.2.4. Sei $A := \mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ der komplexe Vektorraum der formalen Potenzreihen in $Z_1, \ldots, Z_n$.

(1) Zeige, dass durch

$$\sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha \cdot \sum_\beta d_\beta Z^\beta := \sum_\gamma \Big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha d_\beta\Big) Z^\gamma$$

auf A eine assoziative bilineare Multiplikation definiert wird. Hierdurch wird A zu einer komplexen Algebra mit der "konstanten" Potenzreihe $1 = 1Z^0$ als Einselement.

(2) Zeige, dass

$$\varepsilon \colon A \to \mathbb{C}, \quad \sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha \mapsto c_0$$

Homomorphismus komplexer Algebren ist.

(3) Zeige, dass die Einheitengruppe von A gegeben ist durch

$$A^\times = \Big\{ \sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha \in A \colon c_0 \neq 0 \Big\}.$$

Hinweis: Die Notwendigkeit der Bedingung $c_0 \neq 0$ sieht man leicht ein. Um einzusehen, dass sie hinreichend ist, muss man überlegen, dass man für $c_0 \neq 0$ ein Inverses von $P(Z) = \sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha$ rekursiv finden kann. Man sucht also komplexe Zahlen d_β, $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, mit

$$\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha d_\beta = \delta_{\gamma,0}$$

für alle $\gamma \in \mathbb{N}_0^n$. Dieses Gleichungssystem löst man induktiv nach dem Grad $|\gamma|$ von γ, indem man es für $|\gamma| > 0$ umschreibt zu

$$c_0 d_\gamma = - \sum_{\substack{\alpha+\beta=\gamma \\ |\beta|<|\gamma|}} c_\alpha d_\beta.$$

(4)* Zeige, dass $\varepsilon \colon A \to \mathbb{C}$ der einzige Algebrenhomomorphismus $A \to \mathbb{C}$ ist. Hinweis: Jeder Algebrenhomomorphismus $f \colon A \to \mathbb{C}$ ist eindeutig durch die Hyperebene $\ker f$ bestimmt und diese darf $A^\times$ nicht schneiden. ■

Aufgabe I.2.5. Sei $A := \mathbb{C}[[Z]]$ die Algebra der formalen Potenzreihen in Z und

$$I := Z\mathbb{C}[[Z]] = \Big\{ \sum_{n=1}^\infty c_n Z^n \colon c_n \in \mathbb{C} \Big\}$$

das Ideal der nicht invertierbaren Elemente (Aufgabe I.2.4). Wir wollen nun Potenzreihen ineinander einsetzen.

(1) Zeige: Für $P(Z) = \sum_n c_n Z^n \in A$ und $Q(Z) = \sum_{m=1}^\infty d_m Z^m \in I$ wird durch

$$(P \circ Q)(Z) := c_0 + \sum_{k=1}^\infty \Big(\sum_{n=1}^\infty \sum_{m_1+\ldots+m_n=k} c_n \cdot d_{m_1} \cdots d_{m_k} \Big) Z^k$$

eine Potenzreihe definiert, die durch Ordnen nach Potenzen von Z aus

$$\sum_{n=0}^\infty c_n \Big(\sum_{m>0} d_m Z^m \Big)^n$$

hervorgeht.

(2) Für die Ideale $I^m = Z^m \mathbb{C}[[Z]]$ gilt $\bigcap_m I^m = \{0\}$. Zwei Elemente $P, Q \in A$ sind also genau dann gleich, wenn $P - Q \in I^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

(3)* Zeige: Für $P \in A$ und $Q, R \in I$ gilt

$$P \circ (Q \circ R) = (P \circ Q) \circ R.$$

Hinweis: Wegen (2) reicht es aus, die Behauptung für jedes $m \in \mathbb{N}$ modulo dem Ideal I^m zu zeigen. Damit reduziert sich alles auf den Fall von Polynomen.

(4)* $(I, \circ)$ ist eine Halbgruppe mit neutralem Element Z. Die Einheitengruppe dieses Monoids ist gegeben durch

$$I^\times = \Big\{ \sum_{m=1}^\infty c_m Z^m : c_1 \neq 0 \Big\}.$$ ■

Aufgabe I.2.6. Zeige, dass die Abbildung

$$\mu: \mathbb{T}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad (t, z) \mapsto t \cdot z$$

eine Wirkung der Gruppe $\mathbb{T}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ definiert. Zeige, dass $(\mathbb{R}^+)^n$ ein Repräsentantensystem für die Bahnen dieser Gruppenwirkung ist, d.h., jede Bahn $\mathbb{T}^n.z$ von $\mathbb{T}^n$ schneidet $(\mathbb{R}^+)^n$ genau einmal, und zwar in $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$. ■

Aufgabe I.2.7. Sei $P \in \mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ eine formale Potentzreihe, $\mathcal{D}_P$ ihr Konvergenzbereich und $\mathcal{D}_P^o$ sein Inneres. Zeige: $\mathcal{D}_P$ und $\mathcal{D}_P^o$ sind zusammenhängend. ■

Analytische Funktionen

Definition I.2.8. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn es zu jedem Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung U und eine Potenzreihe $P(Z)$ gibt, so dass $U - a := \{u - a : u \in U\} \subseteq \mathcal{D}_P$ gilt und

$$f(a + h) = P(h) = \sum_\alpha c_\alpha h^\alpha$$

für alle $h \in U - a$ gilt. ■

Lemma I.2.9. *Analytische Funktionen sind stetig.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass durch eine auf einem offenen Polyzylinder konvergente Potenzreihe $P_{\mathbf{r}}(0)$ eine in 0 stetige Funktion definiert wird. Nach Lemma I.2.7(a) ist jede solche Funktion Grenzwert einer auf der Nullumgebung $P_{\frac{1}{2}\mathbf{r}}(0)$ gleichmäßig konvergenten Reihe von Polynomfunktionen, also stetig. ■

Zuerst fragen wir uns, wie man analytische Funktionen erhält. Natürlich erwartet man, dass Potenzreihen, die auf offenen Mengen konvergieren, dort auch analytische Funktionen darstellen. Aber dazu muss man beweisen, dass sie sich auch um andere Punkte herum durch entsprechende Potenzreihen darstellen lassen. Dies tun wir im folgenden Lemma.

Lemma I.2.10. *Sei* $\mathbf{r} > 0$ *und* $P(Z) = \sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha$ *eine Potenzreihe mit* $P_\mathbf{r}(0) \subseteq \mathcal{D}_P$. *Für jedes* $a \in \mathbb{C}^n$ *ist die Funktion*

$$f\colon P_\mathbf{r}(a) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z-a)$$

analytisch. Genauer gilt:

(1) *Für jeden Multiindex* β *konvergiert die Potenzreihe*

$$(\Delta^\beta P)(Z) := \frac{1}{\beta!}(D^\beta P)(Z) = \sum_{\alpha \geq \beta} c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} Z^{\alpha-\beta}$$

in $P_\mathbf{r}(0)$.

(2) *Ist* $z \in P_\mathbf{r}(0)$ *und* $h \in P_{\mathbf{r}-|z|}(a)$, *so konvergiert die Reihe* $\sum_\beta \big(\Delta^\beta P(z)\big)h^\beta$ *gegen* $P(z+h)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass es reicht, den Fall $a = 0$ zu betrachten. Sei dazu $b \in P_\mathbf{r}(a)$. Dann ist $b - a \in P_\mathbf{r}(0)$. Ist nun $Q(Z)$ eine Potenzreihe, die auf einer Umgebung U von 0 mit $b - a + U \subseteq P_\mathbf{r}(0)$ konvergiert, sodass $P(b-a+h) = Q(h)$ für alle $h \in U$ gilt, so erhalten wir

$$f(b+h) = P(b-a+h) = Q(h).$$

Wir müssen also nur zeigen, dass die Behauptung im Falle $a = 0$ gilt.

Sei also $z \in P_\mathbf{r}(0)$ und $h \in P_{\mathbf{r}-|z|}(0)$, sodass $z + h \in P_\mathbf{r}(0)$ ist. Wegen

$$(z_j + h_j)^{\alpha_j} = \sum_{\beta_j=0}^{\alpha_j} \binom{\alpha_j}{\beta_j} z_j^{\alpha_j-\beta_j} h_j^{\beta_j}$$

haben wir

$$(z+h)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} h^\beta. \tag{2.3}$$

Sei $J := \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^{2n} \colon \beta \leq \alpha\}$ und $q_{\alpha,\beta} := c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} h^\beta$. Wir zeigen, dass die Familie $(q_{\alpha,\beta})_{\beta\leq\alpha}$ absolut summierbar ist. Dazu rechnen wir

$$\left| c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} h^\beta \right| = |c_\alpha| \binom{\alpha}{\beta} |z^{\alpha-\beta}||h^\beta| = |c_\alpha| \binom{\alpha}{\beta} |z|^{\alpha-\beta} |h|^\beta$$

und für festes α:

$$\sum_{\beta\leq\alpha} |c_\alpha| \binom{\alpha}{\beta} |z|^{\alpha-\beta}|h|^\beta = |c_\alpha| \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} |z|^{\alpha-\beta}|h|^\beta = |c_\alpha|(|z|+|h|)^\alpha,$$

wobei die letzte Gleichheit aus (2.3) folgt. Wegen $|z| + |h| < \mathbf{r}$ ist $(c_\alpha(|z|+|h|)^\alpha)_\alpha$ absolut summierbar, damit aber auch $(q_{\alpha,\beta})_{\beta\leq\alpha}$. Insbesondere ergibt sich hieraus die Behauptung (1) (die man auch direkt aus dem Satz von Abel erhält) und die Konvergenzaussage in (2).

Wegen der absoluten Summierbarkeit dürfen wir unsere Potenzreihen wie folgt umordnen (Übung):

$$\begin{aligned} P(z+h) &= \sum_\alpha c_\alpha (z+h)^\alpha = \sum_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} h^\beta \\ &= \sum_\beta \sum_{\alpha \geq \beta} c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} h^\beta = \sum_\beta \Big(\sum_{\alpha \geq \beta} c_\alpha \binom{\alpha}{\beta} z^{\alpha-\beta} \Big) h^\beta \\ &= \sum_\beta \big(\Delta^\beta P\big)(z) h^\beta. \end{aligned}$$

Da obige Gleichung für alle $h \in P_{\mathbf{r}-|z|}(0)$ gilt, ist f bzw. P auf $P_{\mathbf{r}}(0)$ analytisch. ■

Beispiel I.2.11. (a) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^{z_1+\ldots+z_n} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{z^\alpha}{\alpha!}$$

is analytisch.
(b) Die Funktion

$$f\colon P_{\mathbf{1}}(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{(1-z_1)\cdots(1-z_n)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} z^\alpha$$

is analytisch. ■

Wir kommen nun zu Differenzierbarkeitseigenschaften analytischer Funktionen.

Satz I.2.12. *Eine analytische Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jeder Punkt $a \in \Omega$ hat eine Umgebung U, auf der*

$$f(z) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} (D^\alpha f)(a)(z-a)^\alpha$$

gilt, d.h. f wird lokal durch konvergente Taylorreihen dargestellt.

Die Potenzreihendarstellung von $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z-a)^\alpha$ für $z \in U$ ist eindeutig, denn

$$c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)$$

gilt für alle Multiindizes α. Insbesondere darf man auf einer offenen Menge konvergente Potenzreihen gliedweise differenzieren.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Holomorphie von f. Sei $a \in \Omega$. Wir haben zu zeigen, dass f in a komplex differenzierbar ist. Auf $P_{\mathbf{r}}(a)$ sei $f(a+h) = P(h) = \sum_\alpha c_\alpha h^\alpha$ für $h \in P_{\mathbf{r}}(0)$. Damit ist

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha h^\alpha + \sum_{|\alpha| \geq 2} c_\alpha h^\alpha.$$

Sei $\varphi(h) := \sum_{|\alpha|\geq 2} c_\alpha h^\alpha$ und $\delta < \min\{r_j : j = 1, \ldots, n\}$. Dann ist $\delta\mathbf{1} \in P_{\mathbf{r}}(0)$ und wir erhalten für $\|h\|_\infty < \delta$:

$$\begin{aligned}|\varphi(h)| &\leq \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha||h|^\alpha \leq \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\|h\|_\infty^{|\alpha|} = \|h\|_\infty^2 \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\|h\|_\infty^{|\alpha|-2} \\ &\leq \|h\|_\infty^2 \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\delta^{|\alpha|-2} = \frac{\|h\|_\infty^2}{\delta^2} \sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\delta^{|\alpha|}.\end{aligned}$$

Da $\sum_{|\alpha|\geq 2} |c_\alpha|\delta^{|\alpha|}$ wegen $\delta\mathbf{1} \in P_{\mathbf{r}}(0)$ konvergiert, existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\varphi(h)| \leq C\|h\|_\infty^2 \quad \text{für} \quad \|h\|_\infty \leq \delta.$$

Insbesondere gilt also

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\|h\|_\infty} = 0.$$

Hieraus folgt, dass f in a differenzierbar ist mit

$$df(a)(h) = \sum_{|\alpha|=1} c_\alpha h^\alpha = \sum_{j=1}^n c_{e_j} h_j, \qquad \text{d.h.} \quad \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = c_{e_i}.$$

Da $a \in \Omega$ beliebig war, ist f in Ω holomorph.

Wir setzen nun die Koeffizienten c_α mit den höheren Ableitungen von f an der Stelle a in Beziehung. Zuerst betrachten wir den Fall $|\alpha| = 1$. Sei dazu $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$ und $|h| < \mathbf{r} - |z|$. Aus Lemma I.2.10 erhalten wir

$$f(a+z+h) = \sum_\beta (\Delta^\beta P)(z) h^\beta.$$

Aus den obigen Argumente folgt nun

$$(D_j f)(a+z) = (\Delta^{e_j} P)(z) = \sum_{\alpha\geq e_j} c_\alpha \binom{\alpha}{e_j} z^{\alpha - e_j} = (D_j P)(z).$$

Die formale Ableitung $D_j P(Z)$ der Potenzreihe $P(Z)$ konvergiert also für $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$ und stellt dort die partielle Ableitung $D_j f(a+z)$ dar. Insbesondere sind die Funktionen $D_j f$ für alle j analytisch. Durch Induktion erhalten wir hiermit

$$(D^\alpha f)(a+z) = (D^\alpha P)(z)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$.

Insbesondere haben wir

$$\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a) = \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha P)(0) = c_\alpha.$$

Hieraus folgt, dass die Funktion f in $P_{\mathbf{r}}(a)$ durch ihre konvergente Taylorreihe dargestellt wird. ■

Lemma I.2.13. *Sei* $\mathbf{r} > 0$ *und* $h\colon T_{\mathbf{r}}(a) \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann wird durch*

$$f\colon P_{\mathbf{r}}(a) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta = \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta$$

eine analytische Funktion auf $P_{\mathbf{r}}(a)$ *definiert. Ihre partiellen Ableitungen sind gegeben durch*

$$\frac{D^\alpha f(z)}{\alpha!} = \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{\alpha_1+1}\cdots(\zeta_n - z_n)^{\alpha_n+1}}\, d\zeta = \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{\alpha+\mathbf{1}}}\, d\zeta.$$

Beweis. Wegen Lemma I.2.10 reicht es für den Beweis der ersten Aussage zu zeigen, dass f auf $P_{\mathbf{r}}(a)$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt wird.

Für $n = 1$ und $|z-a| < |\zeta - a| = r$ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{(\zeta - a)^{-1}}{1 - (z-a)(\zeta - a)^{-1}}\\ &= (\zeta - a)^{-1}\sum_{m=0}^\infty (\zeta - a)^{-m}(z-a)^m = \sum_{m=0}^\infty (\zeta - a)^{-m-1}(z-a)^m.\end{aligned}$$

Für allgemeines n erhalten wir damit wegen der absoluten Konvergenz und Aufgabe I.2.1(c)

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\zeta_j - z_j} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} (\zeta - a)^{-\alpha-\mathbf{1}}(z-a)^\alpha,$$

(Übung) wobei die Konvergenz bzgl. $\zeta \in T_{\mathbf{r}}(a) = \{\zeta' \in \mathbb{C}^n\colon |\zeta' - a| = \mathbf{r}\}$ für jedes feste z gleichmäßig ist.

Hiermit ergibt sich

$$\begin{aligned}f(z) &= \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta\\ &= \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} h(\zeta)\sum_\alpha (\zeta - a)^{-\alpha-\mathbf{1}}(z-a)^\alpha\, d\zeta.\end{aligned}$$

Da h stetig auf der kompakten Menge $T_{\mathbf{r}}(a)$ ist, ist h beschränkt, sodass wir wegen der gleichmäßigen Konvergenz des Integranden Integration und Summation vertauschen können:

$$f(z) = \sum_\alpha \Big(\oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} h(\zeta)(\zeta - a)^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta\Big)(z-a)^\alpha.$$

Diese Formel ist eine Darstellung von f auf $P_{\mathbf{r}}(a)$ durch eine konvergente Potenzreihe und zeigt, dass f analytisch ist.

Die Formel für die partiellen Ableitungen ergibt sich nun durch Integration unter dem Integral. Man hat ein Integral der Gestalt $\int_X f(x,z)\,d\mu(x)$ vorliegen, wobei X kompakt ist, jede der Funktionen partiell nach z differenzierbar, und die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial z}(x,z)$ lassen sich jeweils durch eine beschränkte Funktion $g(x)$, die nicht von z abhängt, majorisieren. Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt dann

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_X f(x,z)\,d\mu(x) = \int_X \frac{\partial}{\partial z} f(x,z)\,d\mu(x)$$

für alle z. Durch $|\alpha|$-maliges Anwenden erhalten wir nun

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(z) = \frac{1}{\alpha!}\oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} h(\zeta) D^\alpha\Big(\frac{1}{(\zeta-z)^{\mathbf{1}}}\Big)\,d\zeta = \oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta-z)^{\alpha+\mathbf{1}}}\,d\zeta.$$

Hierbei haben wir die Formel

$$\frac{1}{\alpha!}D^\alpha\Big(\frac{1}{(\zeta-z)^{\mathbf{1}}}\Big) = \frac{1}{(\zeta-z)^{\alpha+\mathbf{1}}}$$

verwendet, die man sehr leicht aus dem eindimensionalen Fall durch Produktbildung gewinnt. ∎

Nun sind wir soweit, dass wir den ersten Ideenkreis schließen können.

Theorem I.2.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Für eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig und partiell holomorph.*
(2) *f ist analytisch.*
(3) *f ist beliebig oft komplex differenzierbar.*
(4) *f ist holomorph.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $a \in \Omega$ und $\mathbf{r} > 0$ mit $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$. Die Cauchy'sche Integralformel (Theorem I.1.8) liefert:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta-a|=\mathbf{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}\,d\zeta$$

für alle $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$. Also ist f gemäß Lemma I.2.13 analytisch.
(2) $\Rightarrow$ (3): Satz I.2.12.
(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) sind trivial. ∎

Mit diesem Theorem ist die Klasse der Funktionen, die uns im folgenden interessieren werden, durch verschiedene Eigenschaften charakterisiert. In den nächsten Abschnitten werden wir mittels der Analytizität holomorpher Funktionen einige sehr interessante Eigenschaften erhalten.

I.3. Eigenschaften holomorpher Funktionen

Dieser Abschnitt ist einigen besonderen Eigenschaften holomorpher Funktionen gewidmet. Zuerst werden wir die Analytizität einer holomorphen Funktion ausnutzen, um das **Prinzip der analytischen Fortsetzung** zu beweisen. Dann werden wir die **Cauchyschen Ungleichungen** aus der **Cauchyschen Integralformel** gewinnen und einige ihrer Konsequenzen wie z.B. den **Satz der offenen Abbildung** und den **Satz von Liouville** kennenlernen. Schließlich werden wir den Raum $\mathrm{Hol}(\Omega) = \mathcal{O}(\Omega)$ der holomorphen Funktionen auf einer offenen Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ als Ganzes studieren. Wir werden eine Metrik bzw. eine Topologie auf ihm einführen und eine sehr einfache Charakterisierung seiner kompakten Teilmengen **(Satz von Montel)** beweisen.

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung

Im folgenden werden wir zusammenhängende offene Teilmengen $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ als *Gebiet* bezeichnen.*

Satz I.3.1. (Das Prinzip der analytischen Fortsetzung) *Sei Ω ein Gebiet. Die Funktion $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ verschwinde auf einer offenen Teilmenge von Ω. Dann ist $f = 0$.*

Beweis. Nach Theorem I.2.14 ist f beliebig oft komplex differenzierbar und die partiellen Ableitungen $D^\beta f$ sind wieder holomorph, insbesondere stetig. Daher ist die Menge

$$U := \{z \in \Omega \colon (\forall \beta) D^\beta f(z) = 0\} = \bigcap_\beta \{z \in \Omega \colon D^\beta f(z) = 0\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von Ω.

Wir behaupten, dass U auch offen ist. Sei dazu $a \in U$. Dann existiert eine Umgebung $V \subseteq \Omega$ von a, sodass für alle $z \in V$ die Funktion f durch ihre Taylorreihe

$$f(z) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(z-a)^\alpha$$

dargestellt wird (Satz I.2.12, Theorem I.2.14). Wegen $D^\alpha f(a) = 0$ für alle α verschwindet f damit auf V, d.h. a ist innerer Punkt von U und somit U offen.

Verschwindet f auf der offenen Teilmenge $W \subseteq \Omega$, so ist natürlich $W \subseteq U$, also U nicht leer. Somit ist U eine offene abgeschlossene nichtleere Teilmenge von Ω. Aus dem Zusammenhang von Ω folgt nun $U = \Omega$, d.h. $f = 0$. ■

---

* Zur Erinnerung: Eine Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *zusammenhängend*, wenn sie keine disjunkte Zerlegung in zwei nichtleere offene Teilmengen von Ω zulässt. Äquivalent hierzu ist, dass jede nichtleere offene und abgeschlossene Teilmenge von Ω mit Ω übereinstimmt (Nachweis als Übung!).

Folgerung I.3.2. *Ist f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet Ω und existiert ein $a \in \Omega$ mit $D^\alpha f(a) = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Aus dem Beweis von Satz I.3.1 folgt, dass f auf einer Umgebung von a verschwindet, sodass wir nur Satz I.3.1 anwenden müssen. ■

Bemerkung I.3.3. Im Beweis von Satz I.3.1 haben wir nur benötigt, dass f analytisch ist. Die gleiche Aussage gilt daher auch für reell analytische Funktionen. Für eine Diskussion von analytischen Funktionen über allgemeinen vollständig bewerteten Körpern verweisen wir auf das schöne Büchlein von J. P. Serre:

[Se92] Serre, J. P., "Lie algebras and Lie groups," Lecture Notes in Mathematics **1500**, Springer Verlag, Berlin, 1992. ■

.

Aufgabe I.3.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Zeige, dass die Algebra $\mathrm{Hol}(\Omega)$ genau dann nullteilerfrei, d.h. ein Integritätsbereich ist, wenn Ω zusammenhängend ist. ■

Folgerungen aus den Cauchyschen Ungleichungen

Satz I.3.4. (Cauchy'sche Ungleichungen) *Sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, $\mathbf{r} > 0$, $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$.*

(1) *Ist $M := \sup\{|f(z)| : z \in T_{\mathbf{r}}(a)\}$, so gilt*

$$|D^\alpha f(a)| \leq M\alpha! \mathbf{r}^{-\alpha}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, insbesondere ist $|f(a)| \leq M$.

(2) *Ist $M := \sup\{|f(z)| : z \in P_{\mathbf{r}}(a)\}$, so gilt*

$$|D^\alpha f(z)| \leq M\alpha! 2^{|\alpha|} \mathbf{r}^{-\alpha}$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $z \in P_{\frac{\mathbf{r}}{2}}(a)$.

(3) *Für jedes $N \in \mathbb{N}$ und $|z - a| \leq \mathbf{r}' < \mathbf{r}$ ist*

$$\Big| f(z) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)(z-a)^\alpha) \Big| \leq M \sum_{|\alpha| > N} (\mathbf{r}')^\alpha \mathbf{r}^{-\alpha}.$$

Beweis. (1) Aus der Cauchyschen Integralformel (Theorem I.1.8)

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta - a| = \mathbf{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta$$

und Lemma I.2.13 erhalten wir

$$D^\alpha f(a) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta - a| = \mathbf{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - a_1)^{\alpha_1 + 1}\cdots(\zeta_n - a_n)^{\alpha_n + 1}}\, d\zeta.$$

Im Eindimensionalen haben wir

$$\oint_{|\zeta|=r} h(\zeta)\, d\zeta = \int_0^{2\pi} h(re^{it}) rie^{it}\, dt,$$

sodass wir die Abschätzung

$$\Big|\oint_{|\zeta|=r} h(\zeta)\, d\zeta\Big| \leq 2\pi r \sup\{|h(\zeta)|\colon |\zeta| = r\}$$

erhalten.

Wenden wir diese Abschätzung auf die Cauchy'sche Formel für die Ableitungen an, so ergeben sich wegen $|\zeta - a| = \mathbf{r}$ die Ungleichungen $|D^\alpha f(a)| \leq \alpha! M \mathbf{r}^{-\alpha}$.
(2) Für jedes $z \in P_{\frac{\mathbf{r}}{2}}(a)$ gilt $T_{\frac{\mathbf{r}}{2}}(z) \subseteq P_{\mathbf{r}}(a)$. Daher folgt (2) aus (1).
(3) Da der abgeschlossene Polyzylinder $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a)$ ganz in der offenen Menge Ω enthalten ist, haben wir auf ganz $P_{\mathbf{r}}(a)$ die Identität

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)(z-a)^\alpha$$

(Lemma I.2.13). Daher erhalten wir für $|z - a| \leq \mathbf{r}' < \mathbf{r}$ mit (1) die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\Big| f(z) - \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a)(z-a)^\alpha)\Big| \\ \leq &\sum_{|\alpha| > N} \frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(a)||z-a|^\alpha \leq \sum_{|\alpha| > N} M \mathbf{r}^{-\alpha}(\mathbf{r}')^\alpha. \end{aligned}$$

■

Folgerung I.3.5. (Satz von Liouville) *Ist $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n)$ beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis. Aus den Cauchyschen Ungleichungen ergibt sich

$$|D^\alpha f(0)| \leq M \alpha! \mathbf{r}^{-\alpha}$$

für $M := \sup\{|f(z)|\colon z \in \mathbb{C}^n\}$, alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, und alle $\mathbf{r} > 0$. Für $\alpha \neq 0$ führt dies für $\mathbf{r} = n\mathbf{1}$ zu $|D^\alpha f(0)| \leq M\alpha! n^{-|\alpha|}$, also $(D^\alpha f)(0) = 0$. Folglich verschwinden alle Ableitungen von $f - f(0)$ in 0, und die Behauptung folgt aus Folgerung I.3.2. ■

Aufgabe I.3.2. Ist $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{C}^n)$ und existieren $C, D > 0$ mit

$$|f(z)| \leq C\|z\|^m + D$$

für alle $z \in \mathbb{C}^m$, so ist f ein Polynom vom Grad $\leq m$, d.h. $f(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha$. ■

Der Satz der offenen Abbildung

Satz I.3.6. (Satz der offenen Abbildung) *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion, so ist f eine offene Abbildung, d.h. sie bildet offene Mengen in offene Mengen ab.*

Beweis. (a) Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$.

Wir haben zu zeigen, dass für jedes $a \in \Omega$ die Funktion f jede Umgebung U von a auf eine Umgebung von $f(a)$ abbildet. Hierzu dürfen wir o.B.d.A. $a = 0$ und $f(0) = 0$ annehmen, denn sonst ersetzen wir f durch $\widetilde{f}(z) := f(a+z) - f(a)$.

Da f nicht konstant ist, ist f nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung auch auf keiner Umgebung von 0 konstant. Wir schreiben $f(z) = z^k g(z)$, wobei k die Ordnung der Nullstelle 0 von f ist, g holomorph in einer Umgebung von 0 und $g(0) \neq 0$ (f ist nicht konstant!). Da g stetig ist, besitzt g in einer ausreichend kleinen Nullumgebung keine Nullstelle. Sei also $\overline{K}_\rho(0) \subseteq U$ und g auf dieser Menge von 0 verschieden. Wir setzen $\delta := \inf\{|f(z)|\colon |z| = \rho\}$. Dann ist $\delta > 0$, da $\partial K_\rho(0)$ kompakt und f stetig ist.

Ist $w \notin f\big(\overline{K}_\rho(0)\big)$ und $|w| < \delta$, so ist die Funktion $h(z) := \frac{1}{f(z)-w}$ auf einer Umgebung von $\overline{K}_\rho(0)$ holomorph, sodass wir aus den Cauchyschen Ungleichungen

$$\frac{1}{|w|} = |h(0)| \leq \sup\nolimits_{|z|=\rho} |h(z)| \leq \frac{1}{\delta - |w|}$$

erhalten. Also ist $|w| \geq \frac{\delta}{2}$. Folglich ist die Kreisscheibe $K_{\frac{\delta}{2}}(0)$ im Bild von $\overline{K}_\rho(0)$ unter f enthalten.

(b) Nun zum allgemeinen Fall. Sei $a \in \Omega$ und U eine konvexe Umgebung von a in Ω. Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung (Satz I.3.1) ist f auf U nicht konstant. Also existiert ein $b \in U$ mit $f(b) \neq f(a)$. Nun ist die Menge $D := \{z \in \mathbb{C}\colon a + z(b-a) \in U\}$ eine offene konvexe Teilmenge von $\mathbb{C}$, die 0 und 1 enthält, also insbesondere ein Gebiet. Weiter ist $h\colon D \to \mathbb{C}, z \mapsto f\big(a+z(b-a)\big)$ eine holomorphe Funktion mit $h(0) \neq h(1)$. Damit ist h eine offene Abbildung, also auch f. ■

Folgerung I.3.7. (1. Maximum-Prinzip) *Ist $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf dem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ holomorph und existiert ein $a \in \Omega$ mit $|f(a)| = \sup\{|f(z)|\colon z \in \Omega\}$, so ist f konstant.*

Beweis. Falls f nicht konstant ist, ist $f(\Omega)$ eine offene Menge (Satz der offenen Abbildung), die in $\overline{K}_{|f(a)|}(0)$, also auch in $K_{|f(a)|}(0)$ enthalten ist. Das ist ein Widerspruch. ■

Folgerung I.3.8. (2. Maximum-Prinzip) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein beschränktes Gebiet, $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und*

$$M := \sup\nolimits_{z\in\partial\Omega} \limsup_{\zeta\to z, \zeta\in\Omega} |f(\zeta)|.$$

Ist f nicht konstant, so gilt

$$|f(z)| < M$$

für alle $z \in \Omega$.

Beweis. Wir dürfen $M < \infty$ annehmen, denn sonst ist nichts zu zeigen. Sei

$$C := \sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}.$$

Dann finden wir eine Folge $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in Ω mit $\lim |f(z_m)| = C$. Da Ω beschränkt ist, dürfen wir (nach dem Übergang zu einer Teilfolge) annehmen, dass $z := \lim_{m\to\infty} z_m \in \overline{\Omega}$ existiert.

Ist $z \in \Omega$, so folgt aus der Stetigkeit von f die Beziehung $|f(z)| = C$, was dem 1. Maximum-Prinzip widerspricht (Folgerung I.3.7). Also ist $z \in \partial\Omega$ und somit $C \leq M$. Da $M \leq C$ trivialerweise gilt, erhalten wir also $C = M$.

Ist f nicht konstant, so folgt nun aus dem 1. Maximum-Prinzip, dass $|f(z)| < C = M$ für alle $z \in \Omega$ gilt. ■

Der Raum der holomorphen Funktionen

In diesem Abschnitt sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge. Wir betrachten den komplexen Vektorraum $\mathrm{Hol}(\Omega)$ der holomorphen Funktionen auf Ω. Wir wollen diesen Raum mit einer geeigneten Metrik bzw. Topologie versehen.

Definition I.3.9. Für eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ definieren wir

$$p_K : \mathrm{Hol}(\Omega) \to \mathbb{R}^+, \quad f \mapsto \sup\{|f(z)| : z \in K\}.$$ ■

Lemma I.3.10. *Die Funktionen p_K sind submultiplikative Halbnormen, d.h.*

(1) $p_K(\lambda f) = |\lambda| p_K(f)$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$.
(2) $p_K(f + g) \leq p_K(f) + p_K(g)$.
(3) $p_K(fg) \leq p_K(f) p_K(g)$.

Beweis. Übung. ■

Lemma I.3.11. *Es existiert eine Folge von kompakten Teilmengen $K_m \subseteq \Omega$ mit*

(K1) $K_m \subseteq K_{m+1}^o$ *für alle* $m \in \mathbb{N}$.
(K2) $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m = \Omega$.
(K3) *Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_m$.*

Beweis. Sei $d(z,w) := \|z - w\|_2$ die euklidische Metrik auf $\mathbb{C}^n$. Dann ist

$$d_{\Omega^c}(z) := \inf\{d(z,w) : w \notin \Omega\}$$

eine stetige Funktion auf $\mathbb{C}^n$ mit $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : d_\Omega(z) > 0\}$ (Nachweis als Übung). Wir setzen nun

$$K_m := \{z \in \mathbb{C}^n : d_\Omega(z) \geq \tfrac{1}{m}, \|z\|_2 \leq m\}.$$

Dann ist K_m abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Die Eigenschaft (K2) folgt direkt aus der Konstruktion, und (K1) folgt aus der Stetigkeit der Funktionen d_Ω und der Normfunktion $\|\cdot\|_2$ wegen

$$K_m \subseteq \{z \in \Omega\colon d_\Omega(z) > \tfrac{1}{m+1}, \|z\|_2 < m+1\} \subseteq K^o_{m+1}.$$

Um (3) einzusehen, bemerken wir, dass die stetige Funktion d_Ω auf jeder kompakten Teilmenge von Ω ein positives Minimum annimmt, und die Normfunktion $\|\cdot\|_2$ ein positives Maximum. ∎

Lemma I.3.12. *Seien die kompakten Teilmengen $K_n \subseteq \Omega$ wie in* Lemma I.3.11 *gewählt. Auf* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *wird durch*

$$d(f,g) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{p_{K_m}(f-g)}{1+p_{K_m}(f-g)}$$

eine Metrik definiert. Diese Metrik hat folgende Eigenschaften:

(1) $d(f+h, g+h) = d(f,g)$ *für* $f,g,h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ (*Translationsinvarianz*).

(2) *Für eine Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt* $f_n \to f$ *genau dann, wenn* f_n *gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von* Ω *gegen* f *konvergiert.*

(3) *Addition, Skalarmultiplikation und Multiplikation von* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *sind stetig.*

(4) *Die Halbnormen* $p_K\colon \mathrm{Hol}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *sind stetige Funktionen.*

Beweis. Den Nachweis der Metrik-Eigenschaften überlassen wir dem Leser als Übung. Der wesentliche Punkt ist die Dreiecksungleichung. Sie folgt aus

$$\frac{x+y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \quad \text{und} \quad \frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$$

für $x \leq y \in \mathbb{R}^+$, was man leicht verifiziert (Übung!).

(1) Trivial.

(2) Wegen der Translationsinvarianz der Metrik ist $f_n \to f$ äquivalent zu $f_n - f \to 0$. Wir dürfen also $f = 0$ annehmen.

Sei also $f_n \to 0$ und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann existiert wegen (K3) ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subseteq K_m$. Wegen $d(f_n, 0) \to 0$ gilt insbesondere $\frac{p_{K_m}(f_n)}{1+p_{K_m}(f_n)} \to 0$, also $p_{K_m}(f_n) \to 0$. Folglich konvergiert $(f_n)_n$ auf $K \subseteq K_m$ gleichmäßig gegen 0.

Es gelte umgekehrt $p_K(f_n) \to 0$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$, insbesondere also auch für K_m. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $N \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{m>N} \frac{1}{2^m} < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir finden nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} \frac{p_{K_m}(f_n)}{1+p_{K_m}(f_n)} \leq \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{2^m} p_{K_m}(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n > n_0$. Damit ist $d(f_n, 0) < \varepsilon$ für $n > n_0$, also $f_n \to 0$.

(3) Folgt leicht aus (2). Für die Addition verwende man (1) und für die Multiplikation (2) und die Ungleichung

$$p_K(fg - f'g') \leq p_K(f)p_K(g-g') + p_K(g')p_K(f-f').$$

(4) Da p_K eine Halbnorm ist, gilt

$$|p_K(f) - p_K(g)| \leq p_K(f-g)$$

für alle $f,g \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ (Übung!). Jetzt folgt die Stetigkeit von p_K aus (2). ∎

Wegen (2) in Lemma I.3.12 nennt man die Topologie, die wir auf $\mathrm{Hol}(\Omega)$ durch die Metrik d erhalten, die *Topologie der kompakten Konvergenz.* Traditionell spricht man für holomorphe Funktionen auch von *normaler Konvergenz* und meint damit gleichmäßige Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω.

Aufgabe I.3.3. Die Metrik d hängt offenbar von der Wahl der Folge $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ab. Mit Hilfe von (2) kann man zeigen, dass dies nicht für die offenen Mengen der durch sie definierten Topologie gilt. Hierzu zeige man, dass für jede Funktion $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ die Mengen der Gestalt

$$U_{K,\varepsilon}(f) := \{g \in \mathrm{Hol}(\Omega) \colon p_K(f-g) < \varepsilon\}$$

eine Umgebungsbasis von f bilden. ■

Theorem I.3.13. (Weierstraß*) *Der metrische Raum* $\big(\mathrm{Hol}(\Omega), d\big)$ *ist vollständig, und für jeden Multiindex* α *ist die lineare Abbildung*

$$D^\alpha \colon \mathrm{Hol}(\Omega) \to \mathrm{Hol}(\Omega)$$

stetig.

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Hol}(\Omega)$. Dann ist $f_n(z)$ für jedes $z \in \Omega$ eine Cauchy-Folge und wir finden eine Grenzfunktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ für alle $z \in \Omega$.

Sei $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert ein m mit $K \subseteq K_m$. Ist $z \in K_m$, so ist

$$|f(z) - f_m(z)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(z) - f_m(z)| \leq \lim_{k\to\infty} p_{K_m}(f_k - f_m).$$

Aus $p_{K_m}(f_j - f_k) \leq 2^m d(f_j, f_k)$ folgt nun $p_K(f - f_m) \leq p_{K_m}(f - f_m) \to 0$, d.h. $f_m \to f$ gilt gleichmäßig auf K.

Sei $a \in \Omega$, $\mathbf{r} > 0$ und $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$. Da $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a)$ kompakt ist, konvergiert die Folge (f_m) gleichmäßig auf K gegen $f|_K$. Wir dürfen daher in der folgenden Cauchy'schen Integralformel (Theorem I.1.8) Integration und Grenzübergang vertauschen. Für $z \in P_{\mathbf{r}}(a)$ gilt also:

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{m\to\infty} f_m(z) \\ &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta - a| = \mathbf{r}} \frac{f_m(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta - a| = \mathbf{r}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\cdots(\zeta_n - z_n)}\, d\zeta. \end{aligned}$$

---

* Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), Mathematiker in Berlin. Begründer des algebraischen Zugangs zur Funktionentheorie über analytische Funktionen und deren algebraische Eigenschaften.

Nach Lemma I.2.13 ist f daher holomorph in $P_{\mathbf{r}}(a)$. Da a beliebig war, ist $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$. Also konvergiert die Folge (f_m) in $\mathrm{Hol}(\Omega)$ gegen f und daher $\mathrm{Hol}(\Omega)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Aus den Cauchyschen Ungleichungen (Satz I.3.4) erhalten wir für $h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und $z \in P_{\frac{1}{2}\mathbf{r}}(a)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Beziehung

$$|D^\alpha h(z)| \leq \big(\sup_{x \in P_{\mathbf{r}}(a)} |h(x)|\big)\alpha! 2^{|\alpha|}\mathbf{r}^{-\alpha} \leq p_{K_m}(h)\alpha! 2^{|\alpha|}\mathbf{r}^{-\alpha}.$$

Hieraus lesen wir ab, dass

$$|D^\alpha f(z) - D^\alpha f_m(z)| \leq p_{K_m}(f - f_m)\alpha! 2^{|\alpha|}\mathbf{r}^{-\alpha}$$

für $z \in P_{\frac{1}{2}\mathbf{r}}(a)$ gilt, d.h. $D^\alpha f_m$ konvergiert gleichmäßig auf der Umgebung $P_{\frac{1}{2}\mathbf{r}}(a)$ von a gegen $D^\alpha f$. Da jede kompakte Menge durch endlich viele solcher Umgebungen überdeckt werden kann (Nachweis!), konvergiert $D^\alpha f_m$ auf jeder kompakten Teilmenge von Ω gleichmäßig gegen $D^\alpha f$, d.h. $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ gilt im metrischen Raum $\mathrm{Hol}(\Omega)$. ■

Aus dem Beweis erhalten wir:

Folgerung I.3.14. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge holomorpher Funktionen, die normal gegen $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f holomorph und für jeden Multiindex α gilt $D^\alpha f_m \to D^\alpha f$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω.* ■

Aufgabe I.3.4. Man zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorpher Funktionen auf einem Gebiet Ω genau dann normal konvergiert, wenn jeder Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung U besitzt, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert. ■

Randbemerkung (für diejenigen, die schon einmal mit Funktionalanalysis konfrontiert wurden): Die Stetigkeit von Addition und Skalarmultiplikation im Raum $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *bedeutet, dass* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *ein topologischer Vektorraum ist. Nach dem Satz von Weierstraß ist er sogar vollständig metrisierbar, d.h. ein F-Raum. Ferner besagt Aufgabe I.3.3, dass die Nullfunktion eine Umgebungsbasis aus konvexen Teilmengen besitzt, d.h.* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *ist lokalkonvex. Lokalkonvexe F-Räume nennt man Fréchetträume. Nun ist* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *auch eine komplexe Algebra und die Multiplikation ist stetig (Lemma I.3.12(3)). In diesem Sinne ist der Raum* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *eine Fréchet-Algebra.*

Wir kommen nun zu einem Satz, den man als eine Art "Heine-Borel" für den Raum $\mathrm{Hol}(\Omega)$ ansehen kann. Hierzu müssen wir erklären, was eine beschränkte Teilmenge von $\mathrm{Hol}(\Omega)$ sein soll.

Definition I.3.15. Eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega)$ heißt *beschränkt*, wenn $p_K(M)$ für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ beschränkt ist. ■

In der Literatur findet man auch die Bezeichnung *normale Menge* oder *normale Familie* für beschränkte Teilmengen von $\mathrm{Hol}(\Omega)$.

Theorem I.3.16. (Montel*) *Eine Teilmenge $M \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega)$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.*

Beweis. Ist $M \subseteq \mathrm{Hol}(\Omega)$ kompakt, so ist M abgeschlossen. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Da $p_K \colon \mathrm{Hol}(\Omega) \to \mathbb{R}$ stetig ist (Lemma I.3.12(4)), ist $p_K(M)$ kompakt, also beschränkt. Daher ist M beschränkt.

Sei umgekehrt M abgeschlossen und beschränkt. Da $\mathrm{Hol}(\Omega)$ ein metrischer Raum ist, haben wir zu zeigen, dass M folgenkompakt ist, d.h., dass jede Folge in M eine konvergente Teilfolge besitzt.

Wir behaupten, dass für jeden Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung U_a existiert, sodass jeder Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in M eine Teilfolge besitzt, die auf U_a gleichmäßig konvergiert. Sei dazu $\mathbf{r} > 0$ mit $K := \overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$, $\widetilde{\mathbf{r}} < \mathbf{r}$ und $U_a := P_{\widetilde{\mathbf{r}}}(a)$. Aus den Cauchyschen Ungleichungen (Satz I.3.4) erhalten wir für $h \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Beziehung

$$|D^\alpha h(a)| \leq p_K(h)\alpha!\mathbf{r}^{-\alpha}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist also

$$|D^\alpha f_k(a)| \leq \alpha!\mathbf{r}^{-\alpha} \sup p_K(M).$$

Mit dem Diagonalfolgenverfahren und dem eindimensionalen Satz von Bolzano-Weierstraß finden wir eine Teilfolge $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$, für die die Folgen $\big(D^\alpha f_{k_m}(a)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ konvergieren.

Wir behaupten, dass die Folge $(f_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ dann schon gleichmäßig auf U_a. Für $z \in U_a = P_{\widetilde{\mathbf{r}}}(a)$ erhalten wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ mit den Cauchy'schen Ungleichungen (Satz I.3.4(3)):

$$\begin{aligned}
&|f_{k_m}(z) - f_{k_l}(z)| \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f_{k_m}(a) - D^\alpha f_{k_l}(a)|\widetilde{\mathbf{r}}^\alpha + 2\cdot \sup p_K(M)\cdot \sum_{|\alpha|>N} \widetilde{\mathbf{r}}^\alpha \mathbf{r}^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

Wegen $\widetilde{\mathbf{r}} < \mathbf{r}$ konvergiert der zweite Term (geometrische Reihe!), sodass wir N so groß wählen können, dass er kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ wird. Für dieses N wird nun die erste Summe kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$, wenn m, l ausreichend groß sind. Dann ist $p_{U_a}(f_{k_m} - f_{k_l}) < \varepsilon$. Aus der Vollständigkeit von $\mathrm{Hol}(U_a)$ (Theorem I.3.13) schließen wir nun, dass die Folge (f_{k_m}) auf U_a gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion konvergiert.

Jetzt zeigen wir die Existenz einer konvergenten Teilfolge von (f_k). Da wir jede Menge K_m mit endlich vielen dieser Umgebungen U_a, $a \in K_m$, überdecken können, erhalten wir mit obiger Behauptung durch sukzessives Auswählen von Teilfolgen eine Teilfolge $(f_k^{(m)})_{k\in\mathbb{N}}$, die auf K_m gleichmäßig konvergiert. Die zugehörige Diagonalfolge $(f_m^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann auf jeder Menge K_m gleichmäßig, also auch im Raum $\mathrm{Hol}(\Omega)$ (Lemma I.3.12(3)), hat also einen Grenzwert in der abgeschlossenen Teilmenge M. ■

* Paul Montel (1876 – 1975(!)), französischer Mathematiker; der Satz befindet sich in seiner Dissertation von 1907; hat als erster die Bedeutung des Prinzips der Auswahlkonvergenz in der Funktionentheorie erkannt.

Folgerung I.3.17. *Jede beschränkte Folge* $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *in* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *besitzt eine konvergente Teilfolge.* ■

Funktionalanalytische Randbemerkung: In einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum V *nennt man eine Teilmenge* M *beschränkt, wenn jede stetige Halbnorm auf ihr beschränkt ist. Der Raum* V *heißt Montelraum, wenn in ihm jede abgeschlossene und beschränkte Menge kompakt ist. Dieser Begriff ist nach obigem Satz von Montel modelliert. Er besagt ja gerade, dass* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *ein Montelraum ist.*

Definition I.3.18. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *Eindeutigkeitsmenge*, wenn für $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ aus $f|_A = 0$ schon $f = 0$ folgt. ■

Das Prinzip der analytischen Fortsetzung besagt, dass in einem Gebiet Ω jede offene Teilmenge eine Eindeutigkeitsmenge ist. Für $n = 1$ ist jede Teilmenge A eines Gebiets Ω mit einem Häufungspunkt in Ω eine Eindeutigkeitsmenge.

Satz I.3.19. (Vitali*) *Sei* Ω *ein Gebiet und* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *sowie* A *eine Eindeutigkeitsmenge von* Ω. *Die Folge* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sei eine beschränkte Teilmenge von* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *und konvergiere auf jedem* $a \in A$. *Dann konvergiert die Folge in* $\mathrm{Hol}(\Omega)$ *gegen eine holomorphe Funktion* f.

Beweis. Da die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathrm{Hol}(\Omega)$ ist, ist $M := \overline{\{f_k : k \in \mathbb{N}\}}$ nach dem Satz von Montel (Theorem I.3.16) kompakt.

Da $\mathrm{Hol}(\Omega)$ ein metrischer Raum ist, gibt es ein $f \in M$ und eine konvergente Teilfolge $(f_k^{(1)})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit dem Grenzwert f. Ist $(f_k^{(2)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine andere konvergente Teilfolge mit dem Grenzwert $h \in M$, so gilt für $a \in A$:

$$h(a) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(2)}(a) = \lim_{k\to\infty} f_k(a) = \lim_{k\to\infty} f_k^{(1)}(a) = f(a).$$

Da A eine Eindeutigkeitsmenge ist, folgt hieraus $f = h$.

Konvergiert die Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nicht gegen f, so existiert eine Umgebung U von f und eine Teilfolge $(f_k^{(3)})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k^{(3)} \notin U$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass diese Folge ebenfalls eine konvergente Teilfolge hat, die auch gegen f konvergiert. Folglich ist $f = \lim_{k\to\infty} f_k$. ■

Aufgabe I.3.5. Hinter dem Beweis des Satzes von Vitali steckt ein allgemeines Prinzip: Ist M ein kompakter metrischer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M, die die Eigenschaft hat, dass jede konvergente Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert konvergiert, so ist die Folge selbst konvergent. ■

Aufgabe I.3.6. Wir versehen den Raum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vollkommen analog zu $\mathrm{Hol}(\Omega)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz. Man verwende zum Beispiel die kompakten Mengen $K_n = [-n, n]$. Sei

$$s_n(x) := \sin nx \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}.$$

---

* Giuseppe Vitali (1875–1932), italienischer Mathematiker, arbeitete vornehmlich in der Theorie der reellen Funktionen; gilt als Vorgänger von Lebesgue.

Man zeige, dass die Menge

$$M = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$$

zwar beschränkt ist, aber nicht relativ kompakt. Hinweis: Die Folge (s_n) hat keine kompakt konvergente Teilfolge. ∎

I.4. Ergänzungen

Lokal beschränkte partiell holomorphe Funktionen

Wir haben in Abschnitt I.2 gesehen, dass stetige partiell holomorphe Funktionen holomorph sind. Der Satz von Hartogs besagt, dass man hier die Forderung der Stetigkeit fallen lassen kann. Hierzu muss man allerdings einen beachtlichen Apparat aufbauen. Eine interessante Variante ist es, lediglich zu fordern, dass die Funktion *lokal beschränkt* ist, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, auf der sie beschränkt ist.

Für den Beweis benötigen wir das Schwarz'sche Lemma aus der Funktionentheorie einer Veränderlichen:

Lemma I.4.1. (Schwarz*) *Sei* $\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ *und* $f \in \mathrm{Hol}(\mathcal{D})$ *mit*

(1) $f(\mathcal{D}) \subseteq \overline{\mathcal{D}}$*, d.h.* $|f(z)| \le 1$ *für alle* $z \in \mathcal{D}$ *und*

(2) $f(0) = 0$.

Dann gilt $|f'(0)| \le 1$ *und* $|f(z)| \le |z|$ *für alle* $z \in \mathcal{D}$.

Beweis. Wegen $f(0) = 0$ existiert eine holomorphe Funktion g auf $\mathcal{D}$ mit $f(z) = zg(z)$ für $|z| < 1$. Für $|z_0| = 1$ haben wir

$$\limsup_{\zeta \to z_0} |g(\zeta)| = \limsup_{\zeta \to z_0} |f(\zeta)| \le 1.$$

Aus dem 2. Maximumprinzip folgt daher $|g(z)| \le 1$, d.h. $|f(z)| \le |z|$ für alle $z \in \mathcal{D}$. Insbesondere ist $|f'(0)| = |g(0)| \le 1$. ∎

Folgerung I.4.2. *Ist* $f : K_r(a) \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit*

$$f\big(K_r(a)\big) \subseteq \overline{K}_R\big(f(a)\big),$$

so gilt

$$|f(z) - f(a)| \le \frac{R}{r}|z - a|$$

---

* Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), deutscher Mathematiker in Halle, Göttingen und Berlin; Schüler von Weierstraß, Studienfreund von Georg Cantor in Berlin.

für alle $z \in K_r(a)$.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g\colon K_1(0) \to \mathbb{C}, \quad \zeta \mapsto \frac{f(a+r\zeta) - f(a)}{R}.$$

Dann gilt $g(0) = 0$ und $|g(\zeta)| \le 1$ für $|\zeta| < 1$, folglich $|g(\zeta)| \le |\zeta|$ nach Lemma I.4.1. Rücktransformation auf $K_r(a)$ liefert nun die Behauptung. ■

Satz I.4.3. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet und* $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ *lokal beschränkt und partiell holomorph. Dann ist* f *holomorph.*

Beweis. Mit Theorem I.2.14 ist nur noch die Stetigkeit von f in jedem Punkt $a \in \Omega$ zu zeigen. Hierzu dürfen wir o.B.d.A. $a = 0$ und $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \|z\|_\infty < r\}$ für ein $r > 0$ annehmen. Da f lokal beschränkt ist, dürfen wir annehmen, dass

$$M := \sup\{|f(z)|\colon z \in \Omega\}$$

endlich ist. Wir müssen zeigen, dass f in 0 stetig ist.

Für $z \in \Omega$ haben wir

$$f(z) - f(0) = \sum_{j=1}^{n} f(0,\ldots,0,z_j,\ldots,z_n) - f(0,\ldots,0,z_{j+1},\ldots,z_n).$$

Wir betrachten die Funktion

$$f_j\colon K_r(0) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(0,\ldots,0,z,z_{j+1},\ldots,z_n) - f(0,\ldots,0,z_{j+1},\ldots,z_n).$$

Aus $f_j(0) = 0$ und $|f_j(z)| \le 2M$ für $|z| \le r$ folgt aus Folgerung I.4.2 die Beziehung

$$|f_j(z)| \le \frac{2M}{r}|z|$$

für $|z| < r$. Wir schätzen hiermit obige Teleskopsumme ab:

$$|f(z) - f(0)| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(z_j)| \le \frac{2M}{r} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Hieraus folgt sofort die Stetigkeit von f in 0. ■

Mehr zu Eindeutigkeitsmengen

Im Beweis des folgenden Satz werden wir die Taylorentwicklung von reell differenzierbaren Funktionen mehrerer Veränderlicher benötigen. Für eine angemessene Diskussion der Taylorentwicklung und des Rechnens mit Jets verweisen wir auf:

[Br95] Bröcker, Th., „Analysis II“, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

Definition I.4.4. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \to \mathbb{R}^n$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Für $p \in U$ heißt das Polynom

$$j_p^m(f)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{D^\alpha f(p)}{\alpha!} x^\alpha$$

der *m-Jet von f im Punkt p*. Das Taylorpolynom m-ter Ordnung von f in p ist damit gegeben durch $x \mapsto j_p^m(f)(x-p)$. ■

Bemerkung I.4.5. Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$, so ist f insbesondere beliebig oft reell differenzierbar. Jeder Punkt $p \in \Omega$ hat eine Umgebung U, auf der

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha (z-p)^\alpha$$

gilt. Hieraus liest man sofort den m-Jet ab:

$$j_p^m(f)(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha z^\alpha.$$

Insbesondere sehen wir, dass für eine holomorphe Funktion f der m-Jet auch ein holomorphes Polynom ist. (Ein Beispiel für ein nichtholomorphes Polynom ist die Funktion $z \mapsto \overline{z} = x - iy$).

Ist $P_m(z) := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$, so ist P_m ein homogenes Polynom vom Grad m und es gilt:

$$j_p^m(f)(z) = \sum_{k=0}^m P_k(z) \quad \text{und} \quad f(z) = \sum_{k=0}^\infty P_k(z-p),$$

wobei die Reihe auf U kompakt konvergiert. ■

Der folgende Satz gibt uns die Möglichkeit, viele Teilmengen eines Gebietes als Eindeutigkeitsmengen zu erkennen. Er wird durch das Lemma vorbereitet.

Lemma I.4.6. *Ist $V \subseteq \mathbb{C}^n$ ein reeller Unterraum mit $V + iV = \mathbb{C}^n$ und $p: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ein holomorphes Polynom, das auf V verschwindet, so ist $p = 0$.*

Beweis. Da V den $\mathbb{C}^n$ als komplexen Vektorraum erzeugt, enthält V eine komplexe Basis. Wir dürfen also nach einer Basistransformation o.B.d.A. annehmen, dass V die kanonische Basis und damit $\mathbb{R}^n$ enthält. Dann haben wir in den kanonischen Koordinaten

$$p\Big(\sum_i z_i e_i\Big) = p(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$$

und $p(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt durch mehrfaches reelles partielles Ableiten $\frac{1}{\alpha!}(D^\alpha p)(0) = c_\alpha = 0$ für alle α und somit $p = 0$. ■

Der folgende Satz liefert eine Kriterium dafür, dass Mengen, die man als parametrisierte Untermannigfaltigkeiten beschreibt, Eindeutigkeitsmengen sind.

Satz I.4.7. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet,* $U \subseteq \mathbb{R}^m$ *eine Nullumgebung und* $F\colon U \to \Omega$ *eine beliebig oft reell differenzierbare Abbildung. Gilt für den reellen Unterraum* $V := dF(0)(\mathbb{R}^m)$ *von* $\mathbb{C}^n$ *die Beziehung* $V + iV = \mathbb{C}^n$*, so ist* $F(U)$ *eine Eindeutigkeitsmenge in* Ω*.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $0 \in \Omega$ und $F(0) = 0$ annehmen. Sei $f \in \mathrm{Hol}(\Omega)$ mit $f|F(U) = 0$, d.h. $f \circ F = 0$. Wir müssen $f = 0$ zeigen.

Wegen Folgerung I.3.2 genügt es einzusehen, dass $D^\alpha f(0)$ für jeden Multiindex α verschwindet (Bemerkung I.4.5). Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach $|\alpha|$.

Für $|\alpha| = 0$ haben wir $f(0) = f\big(F(0)\big) = 0$.

Sei nun $m := |\alpha| > 0$ und $D^\beta f(0) = 0$ für $|\beta| < m$. Wegen der Konvergenz der Taylorreihe von f in einer Umgebung von 0 bedeutet dies, dass der reelle $(m-1)$-Jet $j_0^{m-1}(f)$ verschwindet (Bemerkung I.4.5). Nach der allgemeinen Kettenregel für Jets ([Br95, S. 25]) ist

$$0 = j_0^m(f \circ F) = j_0^m\big(j_0^m(f) \circ j_0^m(F)\big).$$

Wegen $j_0^{m-1}(f) = 0$ ist $j_0^m(f)$ ein homogenes Polynom der Ordnung m. Also liefern hier nur die Terme erster Ordnung von $j_0^m(F)$ einen Beitrag. Somit haben wir

$$0 = j_0^m\big(j_0^m(f) \circ j_0^1(F)\big) = j_0^m(f) \circ j_0^1(F) = j_0^m(f) \circ dF(0).$$

Andererseits wissen wir aus Bemerkung I.4.5, dass $j_0^m(f)$ ein homogenes holomorphes Polynom m-ten Grades ist. Aus Lemma I.4.6 folgt jetzt, dass $j_0^m(f)$ verschwindet, da dieses Polynom auf dem Bild von $dF(0)$ verschwindet. Insbesondere ist $(D^\beta f)(0) = 0$ für $|\beta| = m$. Die Induktion liefert nun, dass $D^\beta f(0)$ für alle β verschwindet. ∎

Folgerung I.4.8. *Ist* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *ein Gebiet und* $z \in \Omega$*, so ist* $A := (z + \mathbb{R}^n) \cap \Omega$ *eine Eindeutigkeitsmenge.*

Beweis. Wir setzen in Satz I.4.7: $F(x) = z + x$, und $U := F^{-1}(\Omega)$. Dann ist $dF(0)(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, und dieser Raum spannt $\mathbb{C}^n$ auf. ∎

Aufgabe I.4.1. (a) Zeige, dass die Sphäre $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \|z\|_2 = 1\}$ eine Eindeutigkeitsmenge in $\Omega = \mathbb{C}^n$ ist.
(b) Für $n = 1$ ist jede Teilmenge $M \subseteq \Omega$, die in Ω einen Häufungspunkt hat, eine Eindeutigkeitsmenge. Dies wird für $n = 2$ falsch. Man finde hierzu ein Beispiel.
(c) (Hierzu benötigt man etwas Vertrautheit im Umgang mit Mannigfaltigkeiten) Eine *Hyperfläche in* $\mathbb{R}^m$ ist eine Untermannigfaltigkeit der Dimension $m - 1$. Zeige, dass jede reelle Hyperfläche $M \subseteq \Omega$, Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}^n$, eine Eindeutigkeitsmenge ist. ∎

II. Holomorphe Fortsetzung

In diesem Kapitel werden wir uns zwei Phänomenen widmen, deren Studium ein zentrales Anliegen der Funktionentheorie im $\mathbb{C}^n$ ist. Das erste Phänomen tritt in der eindimensionalen Funktionentheorie nicht auf: Für jedes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ existiert eine holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, die sich auf kein größeres Gebiet fortsetzen lässt. Solche Funktionen konstruiert man zum Beispiel dadurch, dass man eine diskrete Teilmenge von Ω, die sich in jedem Randpunkt häuft, als Nullstellenmenge vorgibt und dann den allgemeinen Produktansatz anwendet (siehe [Re95, II, S. 81, S. 99]). Im Mehrdimensionalen ist die Situation komplizierter. Schon in $\mathbb{C}^2$ existieren Paare von Gebieten $\Omega \subseteq \widehat{\Omega}$, für die sich jede holomorphe Funktion auf Ω zu einer holomorphen Funktion auf $\widehat{\Omega}$ fortsetzen lässt. Eine Technik, mit der man solche Gebiete konstruiert, ist die Methode der Laurententwicklung, die wir im ersten Abschnitt kennenlernen werden.

Das zweite Phänomen ist, dass durch das Prinzip der analytischen Fortsetzung jede holomorphe Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet Ω durch ihre Werte auf einer vorgegebenen kleinen offenen Teilmenge festgelegt ist und aus ihnen in diesem Sinn rekonstruiert werden kann. Daher stellt sich die Frage, ob das Gebiet Ω für die Funktion f in einem Sinne maximal ist, oder ob es noch größere Gebiete gibt, auf die sich die Funktion f fortsetzen lässt. Analoge Fragen stellen sich natürlich auch für Familien holomorpher Funktionen und insbesondere für die Familie $\mathcal{O}(\Omega)$ aller holomorpher Funktionen auf Ω, womit wir wieder bei dem ersten Phänomen wären. Schon in der eindimensionalen Funktionentheorie führt das zweite Phänomen auf den Begriff der Riemannschen Fläche, wenn man z.B. die Wurzelfunktion auf einer geschlitzten Ebene betrachtet. Wir werden im dritten Abschnitt einen Raum kennenlernen, der in dem Sinne universell ist, dass er uns für jede Funktion ein maximales Gebiet liefert. Diese Gebiete sind allerdings im allgemeinen nicht mehr Teilgebiete von $\mathbb{C}^n$, sondern sogenannte Riemannsche Gebiete über $\mathbb{C}^n$.

II.1. Reinhardt-Gebiete und Laurententwicklung

In diesem Abschnitt werden wir die mehrdimensionale Version der Laurententwicklung holomorpher Funktionen behandeln. Die mehrdimensionalen Verallgemeinerungen von Ringgebieten in $\mathbb{C}$ sind sogenannte Reinhardt-Gebiete

– Gebiete, die unter Multiplikation mit dem n-dimensionalen Torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}_{\mathbf{1}}(0)$ invariant sind.

Definition II.1.1. (a) Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Reinhardt-Gebiet*, wenn es unter dem Torus $\mathbb{T}^n$ invariant ist, d.h. wenn für $z \in \Omega$ und $t \in \mathbb{T}^n$ auch $tz = (t_1 z_1, \ldots, t_n z_n) \in \Omega$ ist.

Man beachte, dass jedes Reinhardt-Gebiet eindeutig durch seinen Schnitt mit $(\mathbb{R}^+)^n$ bestimmt ist, da

$$\Omega = \mathbb{T}^n.\Omega^+ \quad \text{mit} \quad \Omega^+ := \big(\Omega \cap (\mathbb{R}^+)^n\big)$$

gilt.
(b) Im Folgenden schreiben wir

$$K(r, R) := \{z \in \mathbb{C} \colon r < |z| < R\}$$

für offene Kreisringe um den Nullpunkt in $\mathbb{C}$.

Sind $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{R} > 0$ mit $\mathbf{r} < \mathbf{R}$, so schreiben wir

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) := \prod_{j=1}^{n} K(r_j, R_j) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \mathbf{r} < |z| < \mathbf{R}\}$$

für Produkte von Ringgebieten und $\overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ für die Abschlüsse solcher Gebiete. Dies sind besonders einfache Beispiele von Reinhardt-Gebieten. Sind einige der $r_j < 0$, so sind einige der Faktoren Kreisscheiben. Für $\mathbf{r} < 0$ erhalten wir den Polyzylinder $P_{\mathbf{R}}(0)$. ■

Beispiel II.1.2. Ist $P(Z)$ eine formale Potenzreihe und $\mathcal{D}_P$ ihr Konvergenzbereich, so ist sein Inneres $\mathcal{D}_P^0$ ein Reinhardt-Gebiet (siehe Satz I.2.6). (Warum ist $\mathcal{D}_P^0$ zusammenhängend?). ■

Aufgabe II.1.1. Sei (M, d) ein metrischer Raum.
(a) Ist $X \subseteq M$ eine Teilmenge, so ist

$$d_X \colon M \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto \inf\{d(z, x) \colon x \in X\}$$

eine stetige Funktion, für die $\overline{X} = \{z \in M \colon d_X(z) = 0\}$ gilt.
(b) Ist $\Omega \subseteq M$ offen und $K \subseteq \Omega$ kompakt, so existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$K_\delta := \{z \in M \colon d_K(z) < \delta\} \subseteq \Omega$$

gilt. Hinweis: Wähle $\delta < \inf d_{\Omega^c}|_K$, wobei $\Omega^c = M \setminus \Omega$ ist. ■

Lemma II.1.3. *Sei Ω ein Reinhardt-Gebiert und $z \in \Omega$. Dann existieren $\mathbf{r}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$z \in P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \Omega.$$

Jedes Reinhardt-Gebiert ist also eine Vereinigung von Produkten von Ringgebieten.

Beweis. Da Ω in $\mathbb{C}^n$ offen ist, ist auch die Menge $\Omega^+ := \Omega \cap (\mathbb{R}^+)^n$ offen in $(\mathbb{R}^+)^n$. Also existieren $\mathbf{r}, \mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$|z| \in \{x \in (\mathbb{R}^+)^n \colon (\forall j) r_j < x_j < R_j\} \subseteq \Omega^+$$

gilt, denn diese Menge ist der Schnitt eines offenen Quaders um $|z|$ mit $(\mathbb{R}^+)^n$. Dann folgt aus der $\mathbb{T}^n$-Invarianz von Ω weiter

$$z \in P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \{w \in \mathbb{C}^n \colon \mathbf{r} < |w| < \mathbf{R}\} \subseteq \Omega. \qquad \blacksquare$$

Lemma II.1.4. *Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Reinhardt-Gebiet, so ist auch $\Omega^\times := \Omega \cap (\mathbb{C}^\times)^n$ zusammenhängend, also ein Reinhardt-Gebiet.*

Beweis. Es ist klar, dass $\Omega^\times$ eine offene Teilmenge von Ω ist. Sei $\Omega^\times = U_1 \cup U_2$ eine disjunkte Zerlegung in offene Teilmengen und $\overline{U_j}$ der Abschluß von U_j in Ω. Wir zeigen, dass diese Teilmengen von Ω auch offen sind. Sei dazu $a \in \overline{U_j}$. Wir finden nun ein Gebiet der Gestalt $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, das a enthält und ganz in Ω enthalten ist. Da $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})^\times$ ein Produkt von Ringgebieten ist, ist diese Menge zusammenhängend. Andererseits schneidet sie U_j und ist daher ganz in U_j enthalten, denn sonst liefern die beiden Schnitte mit U_1 und U_2 eine offene disjunkte Zerlegung. Damit ist $P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \overline{P(\mathbf{r}, \mathbf{R})^\times}$ ganz in $\overline{U_j}$ enthalten, d.h. $\overline{U_j}$ ist eine Umgebung von a. Also sind beide $\overline{U_j}$ offen in Ω und somit eine dieser Mengen leer, d.h. $\Omega^\times$ ist zusammenhängend. $\blacksquare$

Bevor wir nun zur Laurententwicklung kommen, erinnern wir uns an einige Fakten aus der eindimensionalen Theorie. Sei also $f \colon K(r, R) \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann kann man f eindeutig als Summe von zwei holomorphen Funktionen schreiben:

$$f = f_+ + f_-, \quad f_+ \in \mathcal{O}\big(K_R(0)\big), \quad f_- \in \mathcal{O}\big(\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > r\}\big),$$

sodass $\lim_{|z| \to \infty} f_-(z) = 0$ gilt. Diese beiden Summanden erhält man durch eine Integralformel:

$$f_+(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = R_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta,$$

wobei $|z| < R_1 < R$ ist und

$$f_-(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = r_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta,$$

wobei $|z| > r_1 > r$ ist. Hierbei hängen die Werte der Integrale nicht von r_1 bzw. R_1 ab. Entwickelt man beide Integrale nach z, so ergibt sich die normal konvergente Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m, \quad f_+(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m, \quad f_-(z) = \sum_{m=-1}^{-\infty} c_m z^m.$$

Aus der normalen (lokal gleichmäßigen) Konvergenz der Reihe oder direkt aus der Formel für die Entwicklungskoeffizienten erhält man die Integralformel für die Koeffizienten:

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=r'} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{m+1}}\, d\zeta,$$

wobei $r' \in]r, R[$ beliebig ist (siehe [Re95, I, S. 275]).

Diese Sätze möchten wir nun auf das Mehrdimensionale verallgemeinern. Zuerst benötigen wir hierzu eine allgemeinere Version von Lemma I.2.13:

Lemma II.1.5. *Sei $\mathbf{r} > 0$, $h\colon T_{\mathbf{r}}(0) \to \mathbb{C}$ stetig und $\varepsilon \in \{0,1\}^n$. Wir betrachten das Gebiet*

$$\Omega(\varepsilon, \mathbf{r}) := \{z \in \mathbb{C}^n \colon (\forall j)\ (-1)^{\varepsilon_j}\big(r_j - |z_j|\big) > 0\},$$

das ein Produkt aus Kreisscheiben und Außengebieten von Kreisscheiben ist. Sei $|\varepsilon| := \sum_j \varepsilon_j$ die Anzahl der Außengebiete. Dann wird durch

$$f\colon \Omega(\varepsilon, \mathbf{r}) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto (-1)^{|\varepsilon|} \oint_{|\zeta|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta$$

eine holomorphe Funktion definiert. Sie hat auf $\Omega(\varepsilon, \mathbf{r})$ die normal konvergente Entwicklung

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} c_\alpha z^\alpha \quad \textit{mit} \quad c_\alpha = \oint_{|\zeta|=\mathbf{r}} \frac{h(\zeta)}{\zeta^{\alpha+\mathbf{1}}}\, d\zeta$$

und

$$\mathbb{Z}^n_\varepsilon = \{\alpha \in \mathbb{Z}^n \colon (\varepsilon_j = 0 \Rightarrow \alpha_j \geq 0), (\varepsilon_j = 1 \Rightarrow \alpha_j < 0)\}.$$

Beweis. Für $z \in \Omega(\varepsilon, \mathbf{r})$ verschwindet der Nenner des Integranden nirgends, sodass f wohldefiniert ist.

Im Beweis von Lemma I.2.13 haben wir gesehen, dass wir für $|z| < |\zeta|$ die Entwicklung

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^{-m-1} z^m$$

haben. Für $|z| > |\zeta|$ erhalten wir analog

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = z^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^m z^{-m} = \sum_{m<0} \zeta^{-m-1} z^m,$$

wobei die Reihe in $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > |\zeta|\}$ normal konvergiert. Jetzt verfährt man analog zum Beweis von Lemma I.2.13: Durch Produktbildung erhalten wir zunächst die normal konvergente Entwicklung

$$\frac{(-1)^{|\varepsilon|}}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} \zeta^{-\alpha - \mathbf{1}} z^\alpha.$$

Da h stetig auf $T_{\mathbf{r}}(0)$ und somit beschränkt ist, lassen sich die Summation und Integration wegen der gleichmäßigen Konvergenz bzgl. $\zeta \in T_{\mathbf{r}}(0)$ vertauschen, und wir erhalten:

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} \Big(\oint_{|\zeta| = \mathbf{r}} h(\zeta) \zeta^{-\alpha - \mathbf{1}} \, d\zeta \Big) z^\alpha.$$

Wegen der normalen Konvergenz der Reihe folgt die Holomorphie der Funktion f aus dem Satz von Weierstraß (Korollar I.3.14). Der Rest ist nun klar. ■

Man mache sich klar, dass

$$\bigcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \Omega(\varepsilon, \mathbf{r}) \subseteq \mathbb{C}^n \setminus T_{\mathbf{r}}(0)$$

eine disjunkte Vereinigung von 2^n Reinhardt-Gebieten ist. Ebenso ist $\mathbb{Z}^n = \bigcup_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} \mathbb{Z}^n_\varepsilon$ eine disjunkte Vereinigung. Auf jedem Bereich erhalten wir durch die Integrale eine holomorphe Funktion. Die Laurententwicklung einer allgemeinen Funktion in einem Reinhardt-Gebiet der Gestalt $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ besteht nun darin, dass man die Funktion als eine Summe von 2^n Summanden schreibt, die wie in Lemma II.1.5 entstehen.

Satz II.1.6. (Laurententwicklung*) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Reinhardt-Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt:*

(i) *Die Funktion f hat in Ω eine normal konvergente Laurententwicklung der Gestalt:*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

(ii) *Enthält Ω ein Element z mit $z_j = 0$, so verschwinden alle Koeffizienten c_α mit $\alpha_j < 0$, d.h. alle Funktionen z^α, die in der Entwicklung auftreten, sind auf ganz Ω definiert.*

(iii) *Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt durch die Integralformel:*

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta| = |w|} f(\zeta) \zeta^{-\alpha - \mathbf{1}} \, d\zeta, \tag{1.1}$$

wobei $w \in \Omega \cap (\mathbb{C}^\times)^n$ beliebig ist.

---

* Pierre Alphonse Laurent (1813 – 1854), Ingenieur in der französischen Armee.

Beweis. Sei $a \in \Omega$. Dann existieren $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ mit $a \in P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \Omega$ (Lemma II.1.3). Da a beliebig war, reicht es nun aus zu zeigen, dass f in dem Gebiet $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ die angegebene Entwicklung hat, und dass die Reihe dort normal konvergiert. Dann konvergiert sie nämlich lokal gleichmäßig und daher normal auf Ω (vgl. Aufgabe I.3.4).

Nachdem wir eine Permutation der Koordinaten vorgenommen haben, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $a_j = 0$ genau für $j > m$ gilt, und dass $r_j > 0$ für $j \leq m$ gilt.

Sei $\varepsilon \in \{0,1\}^m$ und $\mathbf{r}^\varepsilon$ definiert durch

$$r_j^\varepsilon := \begin{cases} R_j & \text{für } \varepsilon_j = 0 \text{ oder } j > m \\ r_j & \text{für } \varepsilon_j = 1. \end{cases}$$

Für $z \in P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ definieren wir

$$f_\varepsilon(z) := \frac{(-1)^{|\varepsilon|}}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta| = \mathbf{r}^\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta.$$

Nach Lemma II.1.5 ist f_ε auf $P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \Omega(\varepsilon, \mathbf{r})$ holomorph und hat die dort angegebene Entwicklung

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} c_\alpha z^\alpha \quad \text{mit} \quad c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta| = \mathbf{r}^\varepsilon} f(\zeta) \zeta^{-\alpha - \mathbf{1}}\, d\zeta.$$

Wir haben daher zu zeigen, dass

$$(1.2) \qquad f|_{P(\mathbf{r},\mathbf{R})} = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^m} f_\varepsilon, \quad \text{d.h.} \quad f(z) = \sum_\varepsilon \frac{(-1)^{|\varepsilon|}}{(2\pi i)^n} \oint_{|\zeta| = \mathbf{r}^\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta.$$

Für $n = 1$ ist dies gerade die Cauchy'sche Integralformel für Kreisringe: Für $r < |z| < R$ ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \Big(\oint_{|\zeta| = R} - \oint_{|\zeta| = r} \Big) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Wir deuten das Argument an: Schreibt man den Integranden als

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + f(z) \frac{1}{\zeta - z},$$

so ist der erste Summand durch $f'(z)$ in den ganzen Kreisring holomorph fortsetzbar, und die Behauptung reduziert sich auf die Beobachtung, dass der angegebene Weg (einmal gegen den Uhrzeigersinn auf der Kreislinie vom Radius R und einmal im Uhrzeigersinn auf der Kreislinie vom Radius r) in jedem Punkt z des Kreisrings die Umlaufzahl 1 hat:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \Big(\oint_{|\zeta| = R} - \oint_{|\zeta| = r} \Big) \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta = f(z)$$

(siehe [Re95, I, S. 274] für mehr Details).

Den allgemeinen Fall erhält man nun durch eine einfache Induktion: Wir nehmen an, dass die Behauptung für $n-1$ gilt und schreiben $z = (z_1, z')$ mit $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Für $r_1^0 := R_1$ und $r_1^1 := r_1$ ist dann

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\Big(\oint_{|\zeta_1|=R_1} - \oint_{|\zeta|=r_1}\Big)\frac{f(\zeta_1, z')}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1 \\ &= \sum_{\varepsilon_1\in\{0,1\}} \frac{(-1)^{\varepsilon_1}}{2\pi i}\oint_{|\zeta_1|=r_1^{\varepsilon}} \frac{f(\zeta_1, z')}{\zeta_1 - z_1}\, d\zeta_1. \end{aligned}$$

Nun wendet man die Induktionsannahme auf $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ an und setzt die entsprechenden 2^{m-1} Terme ein. Hierbei beachte man, dass die Nullkoordinaten von a zu einer Reduktion auf 2^{m-1} statt 2^{n-1} Terme führen. Hieraus ergibt sich (1.2). Damit ist gezeigt, dass f auf $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ die normal konvergente Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{\varepsilon\in\{0,1\}^m}\ \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_\varepsilon} c_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

hat, wobei wir $c_\alpha := 0$ für $\alpha \in \mathbb{Z}^n \setminus \bigcup_\varepsilon \mathbb{Z}^n_\varepsilon$ setzen. Wir halten fest, dass für $a_j = 0$ alle Koeffizienten c_α mit $\alpha_j < 0$ wegfallen, denn es kommt kein Summand f_ε vor, in dem dieser Koeffizient auftritt. Wegen der normalen Konvergenz der Reihe ist die Konvergenz auf jedem Torus $T_{\mathbf{r}}(0)$ gleichmäßig. Durch Vertauschen von Integration und Summation erhalten wir daher für $0 < \mathbf{r}' \in P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ die Formel:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta|=\mathbf{r}'} f(\zeta)\zeta^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_\beta \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta|=\mathbf{r}'} \zeta^{\beta-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta \\ &= \sum_{\beta\in\mathbb{Z}^n} c_\beta\delta_{\alpha,\beta}\frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta|=\mathbf{r}'} \zeta^{-\mathbf{1}}\, d\zeta = c_\alpha. \end{aligned}$$

Wir haben noch zu zeigen, dass die Koeffizienten c_α auf ganz Ω die gleichen sind. Aus obigem Argument entnehmen wir, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ die Funktion

$$c_\alpha\colon \Omega^\times = \Omega \cap (\mathbb{C}^\times)^n \to \mathbb{C}, \quad w \mapsto \frac{1}{(2\pi i)^n}\oint_{|\zeta|=|w|} f(\zeta)\zeta^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta$$

lokal konstant ist, d.h. in einer ausreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes. Die Mengen, auf denen diese Funktionen einen konstanten Wert annehmen, bilden daher eine offene Überdeckung aus paarweise disjunkten Mengen, die wegen des Zusammenhangs von $\Omega^\times$ (Lemma II.1.4) nur aus einer Menge bestehen kann. Daher liefert die Formel (1.1) für jedes $w \in \Omega^\times$ die Entwicklungskoeffizienten.

Damit sehen wir schließlich, dass die Laurentreihe der Funktion f nicht von der Wahl von a, $\mathbf{r}$ und $\mathbf{R}$ abhängt. Oben haben wir gesehen, dass sie auf der Umgebung $P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ von a normal konvergiert. Da a beliebig war, konvergiert sie nach Aufgabe I.3.4 normal auf Ω. ■

Aus Satz II.1.6(ii) können wir sofort eine wichtige Folgerung ableiten.

Theorem II.1.7. (Fortsetzungssatz für Reinhardt-Gebiete) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Reinhardt-Gebiet und $J := \{j \in \{1, \ldots, n\} : (\exists z \in \Omega) z_j = 0\}$. Wir definieren*

$$\mathbb{P}^J := \{z \in \mathbb{C}^n : (j \in J \Rightarrow |z_j| \leq 1), (j \notin J \Rightarrow z_j = 1)\}.$$

Dann gilt:

(i) *$\widehat{\Omega} := \mathbb{P}^J \cdot \Omega$ ist ein Reinhardt-Gebiet.*

(ii) *Jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ lässt sich eindeutig zu einer holomorphen Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\widehat{\Omega})$ fortsetzen.*

Beweis. (i) Sei $z \in \Omega$. Dann existieren $\mathbf{r} < \mathbf{R}$ mit $z \in \overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \Omega$. Nun ist

$$\mathbb{P}^J \cdot P(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \mathbb{P}^J \prod_{j=1}^{n} K(r_j, R_j) = \prod_{j \in J} K_{R_j}(0) \times \prod_{j \notin J} K(r_j, R_j)$$

wieder offen und zusammenhängend. Also liegt $\mathbb{P}^J.z$ im Innern von $\widehat{\Omega}$. Daher ist $\widehat{\Omega}$ offen. Der Zusammenhang von $\widehat{\Omega}$ folgt aus der Tatsache, dass $\mathbb{P}^J$ und Ω zusammenhängend sind, sowie aus der Stetigkeit und Surjektivität der Multiplikationsabbildung $\mathbb{P}^J \times \Omega \to \widehat{\Omega}$. Da $\widehat{\Omega}$ invariant unter $\mathbb{T}^n$ ist, ist es ein Reinhardt-Gebiet.

(ii) Für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ betrachten wir die Laurententwicklung $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$. Wir wissen aus Satz II.1.6, dass alle Koeffizienten c_α, für die $\alpha_j < 0$ für ein $j \in J$ gilt, verschwinden.

Für jedes $z \in \widehat{\Omega}$ konvergiert daher auch die Reihe

$$\widehat{f}(z) := \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha,$$

denn für $w \in \mathbb{P}^J$, $z' \in \Omega$ und alle auftretenden Summanden ist $|wz'|^\alpha \leq |z'|^\alpha$. Hierdurch wird eine Funktion $\widehat{f} : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ definiert, die auf Ω mit f übereinstimmt.

Um die Holomorphie von $\widehat{f}$ zu zeigen, reicht es aus, dies auf den offenen Mengen der Gestalt $\mathbb{P}^J \cdot P(\mathbf{r}, \mathbf{R})$, $\overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \subseteq \Omega$, zu tun, denn $\widehat{\Omega}$ ist eine Vereinigung von solchen offenen Mengen (Lemma II.1.3).

Da die Laurentreihe von f auf der kompakten Menge $\overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ gleichmäßig konvergiert, zeigt obige Abschätzung, dass sie ebenfalls auf $\mathbb{P}^J \cdot \overline{P}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ gleichmäßig gegen $\widehat{f}$ konvergiert. Nach dem Satz von Weierstraß ist $\widehat{f}$ daher auf dem Inneren dieser Menge holomorph (Korollar I.3.14). ∎

Bemerkung II.1.8. Man hätte für Theorem II.1.7 auch wie folgt argumentieren können. Wir verwenden die Notation aus dem Beweis von II.1.6. In diesem Beweis haben wir f als eine Summe

$$f = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^{J^c}} f_\varepsilon$$

geschrieben. Hierbei sind schon alle Summanden weggelassen, die wegen Satz II.1.6(ii) nicht auftreten. Die Integraldarstellung der Funktion f_ε zeigt, dass jeder der auftretenden Summanden f_ε auf dem Gebiet

$$\Omega_\varepsilon := \{wz\colon z \in \Omega, (\varepsilon_j = 0 \Rightarrow |w_j| \leq 1), (\varepsilon_j = 1 \Rightarrow |w_j| \geq 1)\}$$

eine holomorphe Funktion definiert (Lemma II.1.5). Damit hat $f = \sum_\varepsilon f_\varepsilon$ eine holomorphe Fortsetzung auf das Gebiet $\widehat{\Omega} = \bigcap_\varepsilon \Omega_\varepsilon$. ■

Fast alle Argumente über holomorphe Fortsetzungen, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, beruhen letztendlich auf Theorem II.1.7.

Darstellungstheoretische Interpretation der Laurententwicklung

Um die Resultate dieses Abschnitts besser einordnen zu können, geben wir eine darstellungstheoretische Interpretation der Laurententwicklung.

Wir betrachten die Gruppe $G := \mathbb{T}^n$, den n-dimensionalen Torus, und ein Reinhardt-Gebiet Ω. Wir erhalten durch die Multiplikation eine Rechtsoperation $\Omega \times G \to \Omega$ der Gruppe G auf Ω. Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung

$$\mu_g\colon \Omega \to \Omega, \quad z \mapsto zg = (z_1 g_1, \ldots, z_n g_n),$$

dann holomorph. Wir erhalten daher eine Darstellung $\pi\colon G \to \mathrm{End}\big(\mathcal{O}(\Omega)\big)$ von G auf dem Raum $\mathcal{O}(\Omega)$ der holomorphen Funktionen durch

$$\big(\pi(g).f\big)(z) := f(zg).$$

In der Tat rechnet man leicht nach, dass $\pi(g_1 g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$ und $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ gelten.

Hat man eine Darstellung einer abelschen Gruppe auf einem Vektorraum V, so interessiert man sich insbesondere für die *simultanen Eigenvektoren*, d.h. Vektoren $0 \neq v \in V$, für die eine Funktion $\chi\colon G \to \mathbb{C}$ derart existiert, dass

$$\pi(g).v = \chi(g)v$$

für alle $g \in G$ gilt. Aus der Tatsache, dass π eine Darstellung ist, folgt nun, dass $\chi\colon G \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Solche Gruppenhomomorphismen nennt man *Charaktere von G*. Für jedes $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ haben wir einen stetigen Gruppenhomomorphismus

$$\chi_\alpha\colon G \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto z^\alpha.$$

Satz II.1.9. (a) *Die Eigenvektoren der Darstellung von G auf $\mathcal{O}(\Omega)$ sind genau die Vielfachen derjenigen Monome z^α, $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, die sich auf ganz Ω fortsetzen lassen. Existiert ein $z \in \Omega$ mit $z_j = 0$, so treten also nur solche $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ auf, für die $\alpha_j \geq 0$ gilt.*

(b) *Für jedes* $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ *wird durch*

$$p_\alpha(f)(z) := \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\zeta \cdot z)\zeta^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta} \cdot z)e^{-i\langle\alpha,\theta\rangle}\, d\theta$$

eine stetige Projektion

$$p_\alpha\colon \mathcal{O}(\Omega) \to \mathcal{O}(\Omega)$$

auf den Eigenraum zum Charakter χ_α *gegeben.*
(c) *Für jedes* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *konvergiert die Reihe*

$$f = \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n} p_\alpha(f)$$

in $\mathcal{O}(\Omega)$ *gegen* f.
(d) *Die Eigenvektoren spannen einen dichten Unterraum von* $\mathcal{O}(\Omega)$ *auf.*

Beweis. (a) Ist $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine holomorphe Funktion mit der Laurententwicklung $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, so haben wir

$$\big(\pi(g).f\big)(z) = \sum_\alpha c_\alpha g^\alpha z^\alpha.$$

Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten lesen wir ab, dass f genau dann ein Eigenvektor ist, wenn ein $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ existiert mit $f(z) = c_\alpha z^\alpha$. Hierbei treten nach Satz II.1.6(ii) nur solche Monome z^α auf, die auf dem ganzen Gebiet definiert sind.
(b) Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Laurentreihe von f auf der kompakten Menge $\mathbb{T}^n \cdot z$ dürfen wir Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned}
p_\alpha(f)(z) &= \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} f(\zeta \cdot z)\zeta^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta \\
&= \sum_\beta c_\beta \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} z^\beta \zeta^\beta \zeta^{-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta \\
&= \sum_\beta c_\beta \frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{\mathbb{T}^n} z^\beta \zeta^{\beta-\alpha-\mathbf{1}}\, d\zeta \\
&= \sum_\beta c_\beta z^\beta \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} e^{i\langle\beta-\alpha,\theta\rangle}\, d\theta \\
&= \sum_\beta c_\beta z^\beta \delta_{\alpha,\beta} = c_\alpha z^\alpha.
\end{aligned}$$

Damit ist (b) gezeigt.
(c) folgt aus (b) und der normalen Konvergenz der Laurentreihen.
(d) ist eine unmittelbare Konsequenz von (c). ■

Satz II.1.9 ordnet die Ergebnisse über Laurententwicklung holomorpher Funktionen auf Reinhardt-Gebieten in einen darstellungstheoretischen Rahmen ein. In der Tat gibt es in diesem Rahmen viel allgemeinere Sätze, die uns andererseits erlaubt hätten, die Laurententwicklung holomorpher Funktionen vollständig aus dem allgemeinen darstellungstheoretischen Hintergrund zu bekommen. Hierzu benötigt man allerdings einen soliden funktionalanalytischen Hintergrund. Es sei hier nur erwähnt, dass es die Sätze von Peter–Weyl und Harish-Chandra über stetige Darstellungen kompakter Lie-Gruppen auf Fréchträumen und die Konvergenz der zugehörigen Fourierreihen sind, die man hier verwenden könnte.

Interpretation der Laurententwicklung als Fourierreihe

Um den Bereich abzurunden, erklären wir noch, was Laurententwicklungen mit Fourierreihen periodischer Funktionen zu tun haben.

Sei dazu $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ wieder ein Reinhardt-Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wir fixieren ein $z \in \Omega$ und betrachten die $2\pi\mathbb{Z}^n$-periodische Funktion

$$\widetilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto f(e^{i\theta} z).$$

Die *Fourier-Koeffizienten* von f sind für $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ gegeben durch

$$d_\alpha := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \widetilde{f}(\theta) e^{-i\langle \theta, \alpha \rangle}\, d\theta$$

und die Reihe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} d_\alpha e^{i\langle \alpha, \theta \rangle}$$

heißt *Fourierreihe der Funktion* $\widetilde{f}$.

Mit der Formel aus Satz II.1.9 können wir die Fourierkoeffizienten nun zu den Laurentkoeffizienten der Funktion f in Beziehung setzen. Aus

$$\begin{aligned} c_\alpha z^\alpha = p_\alpha(f)(z) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(e^{i\theta} \cdot z) e^{-i\langle \alpha, \theta \rangle}\, d\theta \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} \widetilde{f}(\theta) e^{-i\langle \alpha, \theta \rangle}\, d\theta = d_\alpha \end{aligned}$$

folgt, dass die Laurentreihe $\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ von f im Punkt z mit der Fourierreihe von $\widetilde{f}$ im Punkt 0 übereinstimmt.

In der Theorie der Fourierreihen zeigt man, dass Fourierreihen von stetig differenzierbaren Funktionen gleichmäßig konvergieren. In diesem Sinn folgt die Konvergenz der Laurentreihe von f in allen Punkten von Ω auch aus dem entsprechenden Satz über Fourierreihen.

II.2. Holomorphe Fortsetzungen auf größere Gebiete

In diesem Abschnitt setzen wir uns systematisch mit dem Phänomen auseinander, dass es für $n > 1$ Gebiete Ω in $\mathbb{C}^n$ gibt, für die alle holomorphen Funktionen auf Ω eine Fortsetzung auf ein größeres Gebiet erlauben. Die technische Vorarbeit hierzu haben wir schon in Abschnitt II.1 geleistet. Zuerst präzisieren wir die Begriffe.

Definition II.2.1. Seien $\Omega \subseteq \widehat{\Omega} \subseteq \mathbb{C}^n$ offene Mengen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann heißt $F \in \mathcal{O}(\widehat{\Omega})$ eine *holomorphe Fortsetzung* von f, wenn $F|_\Omega = f$ ist. ■

Bemerkung II.2.2. (a) Ist Ω zusammenhängend, d.h. ein Gebiet, so hat jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung höchstens eine holomorphe Fortsetzung auf ein größeres Gebiet $\widehat{\Omega}$.
(b) In Theorem II.1.7 haben wir eine Klasse von Beispielen für Paare von Gebieten $\Omega \subseteq \widehat{\Omega}$ kennengelernt, bei denen jede holomorphe Funktion auf Ω eine holomorphe Fortsetzung auf $\widehat{\Omega}$ hat.
(c) Ist $\Omega' := K_1(0) \cup K_1(2) \subseteq \mathbb{C}$, $\Omega = K_1(0)$ und $f = 1$ auf Ω, so sind die Funktionen 1 und

$$F(z) := \begin{cases} 1 & \text{für } z \in K_1(0) \\ 0 & \text{für } z \in K_1(2) \end{cases}$$

zwei verschieden holomorphe Fortsetzungen von f.
(d) Ist $\Omega = \mathbb{C}^\times \subseteq \Omega' = \mathbb{C}$, so ist die Funktion $f(z) = z^{-1}$ holomorph auf Ω, lässt sich aber nicht holomorph nach $\mathbb{C}$ fortsetzen. Wir werden unten sehen, dass sich für $\Omega = \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und $n > 1$ jede holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^n$ fortsetzen lässt (siehe Folgerung II.2.6). ■

Eine wichtige Methode, um holomorphe Funktionen auf größere Gebiete fortzusetzen, stammt von Hartogs*. Ein Beispiel hierzu lernen wir im folgenden Lemma kennen.

Lemma II.2.3. (Hartogs) *Sei $n > 1$ und $P_{\mathbf{1}}(0)$ der offene Einheitspolyzylinder um 0 sowie U eine offene Umgebung von $\partial P_{\mathbf{1}}(0)$, für die $U \cap P_{\mathbf{1}}(0)$ zusammenhängend ist. Dann existiert zu jedem $f \in \mathcal{O}(U)$ eine holomorphe Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{O}\big(P_{\mathbf{1}}(0) \cup U\big)$, die f fortsetzt.*

Beweis. Sei $0 < \varepsilon < \min d_{U^c}|_{\partial P_{\mathbf{1}}(0)}$, wobei $U^c := \mathbb{C}^n \setminus U$ das Komplement von U ist (vgl. Aufgabe II.1.1). Die Existenz von ε folgt aus der Stetigkeit der Funktion d_{U^c} und der Kompaktheit von $\partial P_{\mathbf{1}}(0)$.

Wir betrachten die Mengen

$$A := \{z \in \mathbb{C}^n \colon 1 - \varepsilon < |z_1| < 1, (\forall j > 1) |z_j| < 1\}$$

---

* Friedrich Hartogs (1874–1943)

und

$$B := \{z \in \mathbb{C}^n : 1 - \varepsilon < |z_2| < 1, (\forall j \neq 2) |z_j| < 1\}.$$

Beide sind jeweils Produkte eines Kreisringes der Gestalt $K(1-\varepsilon, 1)(0)$ und eines $(n-1)$-dimensionalen Polyzylinders. Aus der Wahl von ε folgt, dass das Reinhardt-Gebiet $\Omega := A \cup B$ ganz in U enthalten ist.

Die Menge A enthält Elemente der Gestalt $z = (z_1, 0, \ldots, 0)$ und B enthält Elemente der Gestalt $z = (0, z_2, 0, \ldots, 0)$. Aus Theorem II.1.7 folgt damit

$$\widehat{\Omega} = P_{\mathbf{1}}(0),$$

und dass sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ zu einer holomorphen Funktion auf $\widehat{\Omega} = P_{\mathbf{1}}(0)$ fortsetzen lässt.

Sei nun $f \in \mathcal{O}(U)$. Dann ist $f|_\Omega \in \mathcal{O}(\Omega)$ und es existiert eine holomorphe Fortsetzung $\widehat{f} \in \mathcal{O}\big(P_{\mathbf{1}}(0)\big)$. Auf Ω stimmen f und $\widehat{f}$ überein. Da $U \cap P_{\mathbf{1}}(0)$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist, folgt

$$f|_{\left(U \cap P_{\mathbf{1}}(0)\right)} = \widehat{f}|_{\left(U \cap P_{\mathbf{1}}(0)\right)}$$

aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung. Daher wird durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in U \\ \widehat{f}(z) & \text{für } z \in P_{\mathbf{1}}(0) \end{cases}$$

auf $P_{\mathbf{1}}(0) \cup U$ eine holomorphe Funktion definiert, die f fortsetzt. ∎

Der folgende Satz zeigt noch einmal ganz klar die Methode, die auch hinter Lemma II.2.3 und Theorem II.1.7 steckt.

Satz II.2.4. (Hartogs'scher Fortsetzungsatz) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet sowie $0 < r < R$ und $f \in \mathcal{O}\big(K(r,R) \times \Omega\big)$. Existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq \Omega$, sodass sich $f|_{\left(K(r,R) \times U\right)}$ auf das Gebiet $K_R(0) \times U$ holomorph fortsetzen lässt, so lässt sich f holomorph auf das Gebiet $K_R(0) \times \Omega$ fortsetzen.*

Beweis. Sei $s \in]r, R[$. Für $w \in \Omega$ und $|z| < s$ betrachten wir die Funktion

$$f_s : K_s(0) \times \Omega \to \mathbb{C}, \quad (z, w) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=s} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Wir behaupten, dass f_s holomorph ist. Sei hierzu $w_0 \in \Omega$ und $\overline{P}_{\mathbf{r}}(w_0) \subseteq \Omega$. Dann liefert die Cauchysche Integralformel für $z \in K_s(0)$ und $w \in \overline{P}_{\mathbf{r}}(w_0)$:

$$f_s(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^{n+1}} \oint_{|\zeta|=s} \oint_{|\zeta' - w_0| = \mathbf{r}} \frac{f(\zeta, \zeta')}{(\zeta - z)(\zeta' - w)^{\mathbf{1}}}\, d\zeta' d\zeta,$$

sodass die Holomorphie auf $K_s(0) \times P_{\mathbf{r}}(w_0)$ aus Lemma I.2.13 folgt. Da w_0 beliebig war, folgt hieraus die Holomorphie der Funktion f_s.

Sei $f_U\colon K_R(0) \times U \to \mathbb{C}$ die holomorphe Fortsetzung von $f\,|_{\left(K(r,R)\times U\right)}$. Wegen der Cauchyschen Integralformel ist dann

$$f_s\,|_{K_s(0)\times U} = f_U\,|_{K_s(0)\times U}.$$

Also stimmen f und f_s auf der offenen Menge $K(r,s) \times U$ überein. Mit dem Prinzip der analytischen Fortsetzung sehen wir ein, dass f und f_s sogar auf $K(r,s) \times \Omega$ übereinstimmen.

Ist $s < s' < R$, so erhalten wir eine holomorphe Funktion $f_{s'}$, die auf $K(r,s) \times \Omega$ mit f und daher auch mit f_s übereinstimmt. Wieder wenden wir das Prinzip der analytischen Fortsetzung an und sehen, dass f_s und $f_{s'}$ auf $K_s(0) \times \Omega$ übereinstimmen. Durch

$$F(z) := f_s(z) \quad \text{für} \quad z \in K_s(0) \times \Omega$$

wird daher auf $K_R(0)\times\Omega$ eine holomorphe Funktion definiert, die auf $K(r,R)\times\Omega$ mit f übereinstimmt, also f holomorph fortsetzt. ∎

Der Kontinuitätssatz

Ein Ziel der Hartogsschen Fortsetzungstheorie ist es natürlich, ein Kriterium zu finden, das zu entscheiden erlaubt, ob sich alle holomorphen Funktionen auf einem Gebiet Ω auf ein größeres Gebiet $\widehat{\Omega}$ fortsetzen lassen oder nicht. Das wesentliche Werkzeug hierzu ist der Hartogssche Kontinuitätssatz, den wir in diesem Abschnitt behandeln.

Definition II.2.5. Wir betrachten den offenen Einheitspolyzylinder $P := P_{\mathbf{1}}(0)$. Seien $q_1, \ldots, q_n \in]0,1[$ und

$$H := \{z \in P\colon |z_1| > q_1 \text{ oder } (\forall j > 1)|z_j| < q_j\}.$$

Das Paar (P, H) nennen wir eine *euklidische Hartogsfigur in* $\mathbb{C}^n$. ∎

Lemma II.2.6. *Sei (P,H) eine euklidische Hartogsfigur. Dann existiert zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(H)$ eine holomorphe Fortsetzung auf P.*

Beweis. Für $n = 1$ ist $H = P$ und nichts zu zeigen. Sei daher $n > 1$. Das Gebiet H ist ein Reinhardt-Gebiet, und zu jedem Index j existiert ein $z \in H$ mit $z_j = 0$. Daher ist

$$\widehat{H} = \mathbb{P}^n \cdot H \supseteq \mathbb{P}^n \cdot \left(\{z_1 \in \mathbb{C}\colon 1 > |z_1| > q_1\} \times P_{\mathbf{1}}^{(n-1)}(0)\right) = P_{\mathbf{1}}^{(n)}(0) = P.$$

Die Behauptung folgt daher aus Theorem II.1.7. ∎

Die Brauchbarkeit der Hartogsfiguren liegt weniger darin begründet, dass sie eine weitere Beispielklasse von Reinhardt-Gebieten sind, die echte holomorphe Fortsetzungen erlauben, sondern vielmehr darin, dass man sie auch in einem nichtlinearen Rahmen, sozusagen in krummlinigen Koordinaten, mit Erfolg verwenden kann.

Definition II.2.7. Seien $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Abbildung $\varphi: \Omega \to \Omega'$ heißt *biholomorph*, wenn φ holomorph und bijektiv ist sowie die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \Omega' \to \Omega$ holomorph. Man kann zeigen, dass letztere Bedingung redundant ist: Bijektive holomorphe Abbildungen sind automatisch biholomorph. Das ist der Satz von Osgood*. ■

Definition II.2.8. Sei (P, H) eine euklidische Hartogsfigur im $\mathbb{C}^n$ und $\varphi: P \to \widetilde{P} \subseteq \mathbb{C}^n$ eine biholomorphe Abbildung. Wir setzen $\widetilde{H} := \varphi(H)$. Dann heißt das Paar $(\widetilde{P}, \widetilde{H})$ eine *allgemeine Hartogsfigur*. ■

Mit dem Begriff der allgemeinen Hartogsfigur kann man nun eine "nichtlineare Version" von Lemma II.2.6 beweisen.

Lemma II.2.9. *Sei $(\widetilde{P}, \widetilde{H})$ eine allgemeine Hartogsfigur. Dann existiert zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(\widetilde{H})$ eine holomorphe Fortsetzung auf $\widetilde{P}$.*

Beweis. Sei (P, H) eine euklidische Hartogsfigur und $\varphi: P \to \widetilde{P}$ biholomorph. Ist nun $f \in \mathcal{O}(\widetilde{H})$, so ist $f \circ \varphi \in \mathcal{O}(H)$ und lässt sich daher zu einer holomorphen Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(P)$ fortsetzen (Lemma II.2.6). Dann ist $\widetilde{f} \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{O}(\widetilde{P})$ eine holomorphe Fortsetzung von f. ■

Satz II.2.10. (Hartogsscher Kontinuitätssatz) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $(\widetilde{P}, \widetilde{H})$ eine allgemeine Hartogsfigur mit $\widetilde{H} \subseteq \Omega$. Ist $\widetilde{P} \cap \Omega$ zusammenhängend, so lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf $\Omega \cup \widetilde{P}$ fortsetzen.*

Beweis. Gemäß Lemma II.2.9 hat die Einschränkung $f|_{\widetilde{H}}$ eine holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ auf $\widetilde{P}$. Auf der offenen Menge $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{P} \cap \Omega$ stimmen die Funktionen $\widetilde{f}$ und f überein, daher wegen dem Prinzip der analytischen Fortsetzung auch auf der Menge $\widetilde{P} \cap \Omega$, die nach Voraussetzung zusammenhängend ist. Nun wird durch

$$F(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in \Omega \\ \widetilde{f}(z) & \text{für } z \in \widetilde{P} \end{cases}$$

eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\Omega \cup \widetilde{P}$ definiert. ■

Der Hartogssche Kontinuitätssatz stellt in der komplexen Analysis das universelle Werkzeug dar, mit dem man Funktionen auf größere Gebiete holomorph fortsetzt. Im Prinzip könnte man sogar sagen, dass man in allen Fällen, in denen holomorphe Fortsetzungen existieren, dies mit dem Kontinuitätssatz beweisen kann – auch wenn es oft sehr technisch ist. Wir lassen die Diskussion dieses Satzes vorerst mit dieser eher „philosophischen" Bemerkung auf sich beruhen.

---

* William Fogg Osgood (1864 – 1943), amerikanischer Mathematiker, Professor in Harvard und Peking. Er promovierte 1890 in Erlangen bei Max Noether und schrieb das erste Lehrbuch zur Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher.

Hebbare Singularitäten

Eine andere wichtige Konsequenz von Theorem II.1.7 ist der folgende Satz:

Satz II.2.11. *Sei $n > 1$, $0 \leq r < R$ und $\Omega := \{z \in \mathbb{C}^n : r < \|z\|_2 < R\}$ eine Kugelschale. Dann lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf die Vollkugel*

$$\widehat{\Omega} := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_2 < R\}$$

fortsetzen.

Beweis. Da der Torus $\mathbb{T}^n$ auf $\mathbb{C}^n$ durch Isometrien bezüglich der euklidischen Norm operiert, ist Ω ein Reinhardt-Gebiet. Wegen $n > 1$ existiert zu jedem $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $z \in \Omega$ mit $z_j = 0$. Nach Theorem II.1.7 lässt sich daher jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf das Gebiet

$$\widehat{\Omega} = \mathbb{P}^n \cdot \Omega$$

fortsetzen, das mit der Vollkugel übereinstimmt. ■

Es ist klar, dass Satz II.2.11 sich nicht auf den Fall $n = 1$ übertragen lässt, denn dann ist die Kugelschale Ω ein Ringgebiet. Beispielsweise lässt sich die Funktion $f(z) = z^{-1}$ nicht auf die volle Kreisscheibe fortsetzen.

Ein großer Teil der eindimensionalen Funktionentheorie beschäftigt sich mit isolierten Singularitäten. Es ist eine Folgerung aus Satz II.2.11, dass es so etwas im Mehrdimensionalen nicht gibt.

Folgerung II.2.12. *Für $n > 1$ haben holomorphe Funktionen keine isolierten Singularitäten, d.h. ist $p \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$ ein isolierter Punkt, so lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorph auf $\widehat{\Omega} := \Omega \cup \{p\}$ fortsetzen.*

Beweis. Da p isoliert ist, existiert ein $R > 0$, sodass

$$\mathcal{D} := \{z \in \mathbb{C}^n : 0 < \|z - p\|_2 < R\} \subseteq \Omega$$

gilt. Nach Satz II.2.11 lässt sich f holomorph auf die Vollkugel $\widehat{\mathcal{D}} := \mathcal{D} \cup \{p\}$ fortsetzen. Wir erhalten somit eine Fortsetzung auf $\widehat{\Omega}$. ■

Satz II.2.11 ist ein Spezialfall des wesentlich tiefer liegenden folgenden Satzes, der besagt, dass holomorphe Funktionen im $\mathbb{C}^n$ für $n > 1$ auch keine "kompakten Singularitäten" haben können.

Theorem II.2.13. (Hartogsscher Kugelsatz) *Sei $n > 1$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $K \subseteq \Omega$ eine kompakte Teilmenge, für die $\Omega \backslash K$ zusammenhängend ist. Dann lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ auf Ω holomorph fortsetzen.*

Beweis. Einen gut lesbaren Beweis hierzu findet man in [RK82, S. 44–48]. ■

[RK82] Rothstein, W., und K. Kopfermann, "Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlicher", B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1982.

Analytische Mengen

Nachdem wir erkannt haben, dass isolierte Singularitäten bei holomorphen Funktionen nicht auftreten können, fragen wir uns, woran das liegt. Etwas salopp könnte man sagen, dass es daher kommt, dass keine holomorphe Funktion f eine isolierte Nullstelle haben kann, denn dann wäre diese Nullstelle eine isolierte Singularität der Funktion $\frac{1}{f}$. Wir verfolgen diese Idee im diesem Unterabschnitt weiter.

Definition II.2.14. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen. Eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ heißt *analytisch*, wenn es zu jedem Punkt $a \in \Omega$ eine Umgebung $U \subseteq \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ derart gibt, dass

$$A \cap U = \{z \in U \colon f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

Analytische Mengen sehen also lokal in Ω so aus wie Nullstellenmengen von Funktionen $F = (f_1, \ldots, f_k) \colon U \to \mathbb{C}^k$. ■

Satz II.2.15. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $A \subseteq \Omega$ eine analytische Menge. Dann gilt:*

(i) *A ist abgeschlossen in Ω.*

(ii) *Ist $A \neq \Omega$, so ist $\Omega \setminus A$ dicht in Ω.*

(iii) *$\Omega \setminus A$ ist zusammenhängend.*

Beweis. (i) Sei $a \notin A$. Es existiert eine Umgebung U von a in $\mathbb{C}^n$, $k \in \mathbb{N}$ und $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$A \cap U = \{z \in U \colon f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

Da $a \notin A \cap U$ ist, verschwindet eine der Funktionen f_j nicht in a. Also ist

$$\{z \in U \colon f_j(z) \neq 0\}$$

eine offene Umgebung von a in $\Omega \setminus A$. Folglich ist $a \notin \overline{A}$ und somit A abgeschlossen in Ω.

(ii) Wir nehmen an, dass $\Omega \setminus A$ nicht dicht in Ω ist, d.h., A hat nichtleeres Inneres $B := A^0$. Wir zeigen, dass B in Ω auch abgeschlossen ist. Sei dazu $b \in \overline{B}$. Wir finden nun eine zusammenhängende Umgebung U von b in Ω und $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(U)$ mit

$$A \cap U = \{z \in U \colon f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

Wegen $b \in \overline{B}$ schneidet B die Menge U, sodass die Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(U)$ auf der offenen Menge $U \cap B$ verschwinden. Da U zusammenhängend ist, folgt hieraus $f_1 = \ldots = f_k = 0$ und somit $U \subseteq A$, d.h. $b \in B$. Folglich ist

B eine offene abgeschlossene Teilmenge von Ω, die nicht leer ist. Aus dem Zusammenhang von Ω folgt daher $\Omega = B \subseteq A$. Damit ist (ii) bewiesen.
(iii) Wir zeigen zuerst, dass für jedes $a \in \Omega$ eine Umgebung U existiert, sodass für $A^c := \Omega \setminus A$ die Menge $A^c \cap U$ zusammenhängend ist.

Sei also $a \in \Omega$ und U eine konvexe offene Umgebung von a mit

$$A \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \ldots = f_k(z) = 0\}.$$

Sind $b, c \in A^c \cap U$, so betrachten wir die konvexe Menge

$$D := \{z \in \mathbb{C} : b + z(c - b) \in U\}$$

und die Abbildung $\varphi : D \to U, z \mapsto b + z(c - b)$. Dann sind $0, 1 \in D$ und es gilt

$$\varphi^{-1}(A \cap U) = \{z \in D : (\forall j) f_j \circ \varphi(z) = 0\}.$$

Wegen $b \notin A$ existiert ein j mit $f_j(b) \neq 0$. Daher verschwindet die holomorphe Funktion $f_j \circ \varphi$ nicht auf D, hat also eine diskrete Nullstellenmenge, die $\varphi^{-1}(A)$ enthält. Also ist $\varphi^{-1}(A)$ diskret ohne Häufungspunkte (d.h. abgeschlossen) und das Komplement dieser Menge daher zusammenhängend (Nachweis als Übung!). Damit ist $\varphi^{-1}(A^c) = \varphi^{-1}(A)^c$ auch wegzusammenhängend, und wir finden einen Weg γ in $\varphi^{-1}(A^c)$ von 0 nach 1. Der Weg $\varphi \circ \gamma$ verbindet dann $b = \varphi(0)$ und $c = \varphi(1)$ in $A^c \cap U$. Also ist $A^c \cap U$ wegzusammenhängend.

Ist A^c nicht zusammenhängend, so existieren zwei nichtleere disjunkte offene Teilmengen $U_1, U_2 \subseteq A^c$ mit $A^c = U_1 \cup U_2$. Wir behaupten, dass $\overline{U_1}$ auch in Ω offen ist. Sei dazu $a \in \overline{U_1} \cap A$. Dann existiert eine Umgebung U von a, sodass $A^c \cap U$ zusammenhängend ist. Da U_1 die Menge $A^c \cap U$ schneidet und $A^c \cap U = (U_1 \cap U) \cup (U_2 \cap U)$ gilt, folgt hieraus $A^c \cap U \subseteq U_1$. Da A^c in Ω wegen (ii) dicht ist, ist $U \subseteq \overline{U_1}$ eine Umgebung von a in $\overline{U_1}$, d.h. die Menge $\overline{U_1}$ ist offen in Ω. Ebenso ist $\overline{U_2}$ offen und wegen (ii) ist $\Omega = \overline{U_1} \cup \overline{U_2}$. Da U_1 in A^c relativ abgeschlossen ist, gilt $\overline{U_1} \cap U_2 = \emptyset$, somit auch $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, da $\overline{U_1}$ offen ist. Dies steht im Widerspruch zum Zusammenhang von Ω. ∎

Bemerkung II.2.16. Man kann natürlich auch im Reellen analytische Mengen definieren, wobei man sich auf reell analytische Funktionen stützt. Hier darf man allerdings nicht erwarten, dass das Komplement einer analytischen Menge zusammenhängend ist. Natürlich ist das für $n = 1$ eklatant falsch, aber auch im $\mathbb{R}^2$ ist das Komplement von

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

nicht zusammenhängend. ∎

Satz II.2.17. (Riemannscher Hebbarkeitssatz*) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, $A \subseteq \Omega$ eine analytische Menge mit $A \neq \Omega$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Existiert für*

---

* Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), Mathematiker in Göttingen. In seiner Habilitationsschrift über Fourierreihen entwickelte er das Riemann-Integral und mit seinem Habilitationsvortrag, in dem er das Konzept einer Riemannschen Mannigfaltigkeit entwickelte, begründete er die moderne Differentialgeometrie.

jedes $a \in A$ *eine Umgebung* U, *sodass* $f|_{U \setminus A}$ *beschränkt ist, so besitzt* f *eine holomorphe Fortsetzung auf* Ω.

Beweis. Ist $n = 1$, so ist jede analytische Menge diskret, und der Satz besagt, dass sich isolierte Singularitäten, in denen die Funktion beschränkt bleibt, heben lassen ([Re95, I, S. 240]).

Der Satz macht eine lokale Aussage, denn da $\Omega \setminus A$ in Ω dicht ist (Satz II.2.15), haben wir zu zeigen, dass sich die Funktion f stetig auf Ω fortsetzen lässt und dass diese Fortsetzung holomorph wird. Hierzu reicht es natürlich, beliebig kleine Umgebungen eines Punktes $a \in A$ zu betrachten.

Zuerst reduzieren wir die Situation auf eine einfachere. Durch Verkleinern von Ω dürfen wir annehmen, dass Ω konvex ist, f beschränkt, und dass holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$ existieren, sodass

$$A = \{z \in \Omega \colon (\forall j) f_j(z) = 0\}$$

gilt. Nun existiert ein j mit $f_j \neq 0$, und wir dürfen nach einer geeigneten Vergrößerung von A annehmen, dass eine nicht-konstante Funktion $f_1 \in \mathcal{O}(\Omega)$ existiert mit

$$A = \{z \in \Omega \colon f_1(z) = 0\}.$$

Weiter dürfen wir annehmen, dass $a = 0$ ist und nach Anwenden einer komplex linearen Abbildung sogar, dass $e_1 \in \Omega$ gilt mit $f_1(e_1) \neq 0$. Wir betrachten die konvexe Menge $D := \{z \in \mathbb{C} \colon ze_1 \in \Omega\}$ und die holomorphe Funktion

$$h \colon D \to \mathbb{C}, \quad z_1 \mapsto f_1(z_1, 0, \ldots, 0).$$

Da h wegen $0 = f_1(0) = h(0) \neq h(1) = f_1(e_1)$ nicht konstant ist, ist die Nullstellenmenge dieser Funktion diskret und es existiert eine Nullumgebung, die nur endlich viele Nullstellen enthält. Daher existiert ein $\delta > 0$, sodass h auf der Menge

$$S := \{z_1 \in \mathbb{C} \colon |z_1| = \delta\}$$

keine Nullstellen hat. Da S kompakt und f_1 stetig ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass f_1 auf der Menge

$$S_\varepsilon := \{(z_1, w) \in \mathbb{C}^n \colon |z_1| = \delta, \|w\|_\infty < \varepsilon\}$$

keine Nullstellen hat (vgl. Aufgabe II.1.1). Sei $\mathbf{r} = (\delta, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$. Wir betrachten nun die Funktion

$$g \colon P_{\mathbf{r}}(0) \to \mathbb{C}, \quad z = (z_1, w) \mapsto \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta_1| = \delta} \frac{f(\zeta_1, w)}{\zeta_1 - z_1} \, d\zeta_1.$$

Beachte, dass der Integrand definiert ist, da seine Argumente in $\Omega \setminus A$ liegen. Durch Anwenden der Cauchyschen Integralformel auf das w-Argument sieht man (wie schon so oft), dass g holomorph ist.

Wir zeigen, dass g eine holomorphe Fortsetzung der Funktion $f|_{P_{\mathbf{r}}(0)\setminus A}$ auf $P_{\mathbf{r}}(0)$ ist. Sei dazu $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ mit $\|w\|_\infty < \varepsilon$. Für $|z_1| < \delta$ mit $(z_1, w) \notin A$ haben wir $f(z_1, w) = g(z_1, w)$ zu zeigen. Wir betrachten hierzu die Menge

$$D_w := \{z_1 \in K_\delta(0) \colon (z_1, w) \notin A\} = \{z_1 \in K_\delta(0) \colon f_1(z_1, w) \neq 0\}.$$

Da $f_1(z_1, w)$ für $|z_1| = \delta$ von Null verschieden ist, ist D_w Komplement einer abgeschlossenen diskreten Teilmenge einer abgeschlossenen Kreisscheibe, also einer endlichen Menge. Die Funktion $z_1 \mapsto f(z_1, w)$ ist holomorph und beschränkt auf D_w. Daher lässt sich diese Funktion zu einer holomorphen Funktion auf der Kreisscheibe $K_\delta(0)$ fortsetzen (das ist der eindimensionale Fall des Satzes). Wenden wir die Cauchysche Integralformel auf diese Funktion an, so sehen wir, dass sie mit $z_1 \mapsto g(z_1, w)$ übereinstimmt.

Wir haben gesehen, dass sich f auf den Polyzylinder $P_{\mathbf{r}}(0)$ fortsetzen lässt. Hieraus folgt, dass sich f in jeden Punkt von A stetig fortsetzen lässt, und dass die Fortsetzung holomorph wird. ∎

Im Riemannschen Hebbarkeitssatz ist die Voraussetzung der lokalen Beschränktheit etwas unbequem. Der folgende Satz kommt ohne diese Voraussetzung aus, bezieht sich aber auch auf etwas speziellere analytische Mengen.

Satz II.2.18. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $A \subseteq \mathbb{C}^n$ ein affiner Unterraum der Kodimension mindestens 2. Dann lässt sich jede holomorphe Funktion $f \colon \Omega \setminus A \to \mathbb{C}$ holomorph auf Ω fortsetzen.*

Beweis. Unsere Voraussetzung besagt, dass es zwei linear unabhängige Funktionale $f_1, f_2 \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gibt, die auf A konstant sind. Nach einer affinen Koordinatentransformation dürfen wir also

$$A \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n \colon z_1 = z_2 = 0\}$$

annehmen, und es reicht natürlich den Fall

$$A = \{z \in \mathbb{C}^n \colon z_1 = z_2 = 0\}$$

zu betrachten.

Sei $a \in A \cap \Omega$. Dann ist $a = (0, 0, a')$ mit $a' \in \mathbb{C}^{n-2}$. Wir betrachten die offene Teilmenge $\Omega_a := \{w \in \mathbb{C}^2 \colon (w, a') \in \Omega\}$ von $\mathbb{C}^2$, die den Punkt $(0,0)$ enthält. Wir erhalten nun eine holomorphe Funktion

$$f_a \colon \Omega_a \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C}, \quad (w_1, w_2) \mapsto f(w_1, w_2, a'),$$

die sich nach Satz II.2.11 zu einer holomorphen Funktion $f_a \colon \Omega_a \to \mathbb{C}$ fortsetzen lässt.

Sei $\mathbf{r} > 0$ ein positiver Polyradius mit $\overline{P}_{\mathbf{r}}(a) \subseteq \Omega$. Dann erhalten wir aus der zweidimensionalen Cauchy'schen Integralformel für $|z_1| < r_1$ und $|z_2| < r_2$:

$$f(z_1, z_2, a') = f_a(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint_{|\zeta_1| = r_1} \oint_{|\zeta_2| = r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2, a')}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)}\, d\zeta_1\, d\zeta_2.$$

Insbesondere folgt aus den Cauchy'schen Ungleichungen (Satz I.3.4)

$$|f(z_1, z_2, a')| \leq \sup\{|f(\zeta_1, \zeta_2, a')| \colon |\zeta_1| = r_1, |\zeta_2| = r_2\}.$$

Für $\mathbf{r}' := (r_3, \ldots, r_n)$ und feste ζ_1, ζ_2 folgt aus der Holomorphie der Funktion

$$P_{\mathbf{r}'}(a') \to \mathbb{C}, w \mapsto f(\zeta_1, \zeta_2, w)$$

weiterhin

$$|f(\zeta_1, \zeta_2, a')| \leq \sup_{\zeta' \in T_{\mathbf{r}'}(a')} |f(\zeta_1, \zeta_2, \zeta')| \leq \sup_{\zeta \in T_{\mathbf{r}}(a)} |f(\zeta)|$$

und damit

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in T_{\mathbf{r}}(a)} |f(\zeta)|$$

für $z \in P_{\mathbf{r}}(a) \setminus \{a\}$. Also ist f lokal beschränkt, sodass sich der Riemannsche Hebbarkeitssatz anwenden lässt. ■

II.3. Riemannsche Gebiete und Garben

In diesem Abschnitt fragen wir uns, wie wir zu einer vorgegebenen holomorphen Funktion ein maximales Gebiet finden, auf das sich diese Funktion analytisch fortsetzen lässt. Natürlich ist jedes Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, für das sich alle holomorphen Funktionen auf ein größeres Gebiet $\widehat{\Omega}$ fortsetzen lassen, nie ein solches Gebiet. Das geeignete Hilfsmittel zur Behandlung von Fragen dieser Art ist die Garbentheorie. Wir werden zuerst die Garbe $\mathcal{O}$ der Keime holomorpher Funktionen auf $\mathbb{C}^n$ konstruieren und dann sehen, wie man diesen topologischen Raum benutzen kann, um zu gegebenen Funktionen maximale Definitionsbereiche zu finden.

Garben

Definition II.3.1. Sei $a \in \mathbb{C}^n$. Wir betrachten Paare (U, f), wobei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Umgebung von a und $f \in \mathcal{O}(U)$ ist. Auf der Menge dieser Paare definieren wir eine Äquivalenzrelation durch $(U, f) \sim (V, h)$, falls eine Umgebung W von a mit $W \subseteq U \cap V$ und $f|_W = h|_W$ existiert. Die Äquivalenzklassen heißen *Keime holomorpher Funktionen in* a.

Wir schreiben f_a für die Äquivalenzklasse des Paares (U, f) und beachten, dass sie nicht von U abhängt. Sie heißt *Keim der holomorphen Funktion* f *in* a. Die Menge aller Keime holomorpher Funktionen in a bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_a$. Man verifiziert leicht, dass auf $\mathcal{O}_a$ durch

$$f_a + g_a := (f + g)_a, \quad f_a \cdot g_a := (f \cdot g)_a$$

die Struktur einer komplexen Algebra definiert wird (Aufgabe II.3.2). Die Auswertung in dem Punkt a

$$\mathrm{ev}_a : \mathcal{O}_a \to \mathbb{C}, \quad f_a \mapsto f_a(a) := f(a)$$

ist wohldefiniert und ein Homomorphismus von Algebren. ■

Wir betrachten nun die disjunkte Vereinigung $\mathcal{O} := \bigcup_{a\in\mathbb{C}^n} \mathcal{O}_a$. Diese Menge heißt *Garbe der Keime holomorpher Funktionen auf* $\mathbb{C}^n$. Wir haben eine Projektionsabbildung

$$p = p_{\mathcal{O}}\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n, \quad f_a \mapsto a.$$

Lemma II.3.2. *Für $f \in \mathcal{O}(U)$, $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, sei*

$$N(U,f) := \{f_a\colon a \in U\} \subseteq \mathcal{O}.$$

Die Mengen $N(U,f)$ bilden die Basis einer Topologie auf $\mathcal{O}$, d.h. das System aller Vereinigungen solcher Mengen ist eine Topologie auf $\mathcal{O}$.

Beweis. Sei $\tau \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{O})$ das System der Vereinigungen von Mengen der Gestalt $N(U,f)$. Dann ist klar, dass $\emptyset, \mathcal{O} \in \tau$ gilt, da $f_a \in N(U,f)$ ist. Weiter sehen wir, dass dieses Mengensystem stabil unter beliebigen Vereinigungen ist. Es bleibt zu zeigen, dass der Durchschnitt zweier Mengen in τ wieder in τ ist. Da solch ein Durchschnitt eine Vereinigung von Durchschnitten von Mengen der Gestalt $N(U,f)$ ist, müssen wir sehen, dass $N(U,f) \cap N(V,h)$ eine Vereinigung von Mengen der Gestalt $N(U',f')$ ist.

Sei dazu $f_a \in N(U,f) \cap N(V,h)$. Dann ist $a \in U \cap V$ und $f_a = h_a$. Es existiert also eine offene Umgebung W von a in $U \cap V$, für die $f|_W = h|_W$ gilt. Damit ist

$$f_a \in N(W, f|_W) = N(W, h|_W) \subseteq N(U,f) \cap N(V,h),$$

und hieraus folgt die Behauptung. ■

Im Folgenden betrachten wir auf $\mathcal{O}$ immer die Topologie τ aus Lemma II.3.2. Wir studieren jetzt die topologischen Eigenschaften des Raumes $(\mathcal{O}, \tau)$.

Lemma II.3.3. *Der topologische Raum $(\mathcal{O}, \tau)$ hat folgende Eigenschaften:*

(1) *Die Abbildung $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n$ ist stetig und offen.*

(2) *Für jedes $f \in \mathcal{O}(U)$ ist die Abbildung $\sigma_f\colon U \to \mathcal{O}, a \mapsto f_a$ stetig mit $p \circ \sigma_f = \mathrm{id}_U$. Insbesondere ist σ_f ein Homöomorphismus auf die offene Teilmenge $N(U,f)$ von $\mathcal{O}$.*

(3) *p ist ein lokaler Homöomorphismus, d.h. jeder Punkt $f_a \in \mathcal{O}$ besitzt eine offene Umgebung U, die durch p homöomorph auf eine offene Teilmenge $p(U)$ von $\mathbb{C}^n$ abgebildet wird.*

(4) *$(\mathcal{O}, \tau)$ ist ein Hausdorffraum.*

Beweis. (1) Wir zeigen zuerst die Stetigkeit von p. Sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f_a \in p^{-1}(U)$. Wir müssen zeigen, dass $p^{-1}(U)$ eine Umgebung von f_a ist. Wegen $a = p(f_a) \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subseteq U$ und eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(V)$, sodass f_a der Keim von f in a ist. Dann ist $N(V,f)$ eine Umgebung von f_a in $\mathcal{O}$, die ganz in $p^{-1}(U)$ enthalten ist. Wir haben gezeigt, dass Urbilder offener Mengen unter p offen sind, also ist p stetig.

Die Offenheit von p folgt sofort aus der Offenheit der Bilder $U = p(N(U,f))$ der Basismengen der Topologie und $p(\bigcup_{j\in J} V_j) = \bigcup_{j\in J} p(V_j)$.

(2) Ist $V \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $g \in \mathcal{O}(V)$, so ist

$$\sigma_f^{-1}(N(V,g)) = \{u \in U \cap V : f_u = g_u\}.$$

Ist u ein Element dieser Menge, so folgt aus $f_u = g_u$, dass die beiden Funktionen $f, g \in \mathcal{O}(U \cap V)$ den gleichen Keim in u besitzen, also auf einer Umgebung von u übereinstimmen. Folglich ist $\sigma_f^{-1}(N(V,g))$ eine Umgebung von u, also eine offene Teilmenge von U. Da die Urbilder der Basismengen $N(V,g)$ der Topologie auf $\mathcal{O}$ offen sind, ist σ_f stetig.
(3) Für jede offene Menge der Form $N(U,f)$ ist $p \circ \sigma_f = \mathrm{id}_U$ und $\sigma_f \circ p|_{N(U,f)} = \mathrm{id}_{N(U,f)}$. Also ist $p|_{N(U,f)}$ ein Homöomorphismus, dessen Inverse σ_f ist.
(4) Seien $f_a \neq h_b$ zwei Punkte in $\mathcal{O}$. Ist $a \neq b$, so existieren disjunkte offene Mengen $U_a, U_b \subseteq \mathbb{C}^n$, die a bzw. b enthalten. Wegen der Stetigkeit von p sind $p^{-1}(U_a)$ und $p^{-1}(U_b)$ disjunkte offene Umgebungen von f_a und h_b.

Sei nun $a = b$ und seien (U_1, f) bzw. (U_2, h) Repräsentanten von f_a bzw. h_a. Sei $V \subseteq U_1 \cap U_2$ eine zusammenhängende Umgebung von a, z.B. eine Kugelumgebung. Wir behaupten, dass die Umgebungen $N(V,f)$ bzw. $N(V,h)$ von f_a bzw. h_a disjunkt sind. Ist $g_c \in N(V,f) \cap N(V,h)$, so ist $f_c = g_c = h_c$. Also existiert eine offene Umgebung W von c in V, auf der f und h übereinstimmen. Aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung und dem Zusammenhang von V folgt daher $f|_V = h|_V$, im Widerspruch zu $f_a \neq h_a$. Damit ist gezeigt, dass f_a und h_b disjunkte Umgebungen besitzen, d.h. $(\mathcal{O}, \tau)$ ist hausdorffsch. ∎

Riemannsche Gebiete über $\mathbb{C}^n$

Bevor wir mit dem Studium der Garbe $\mathcal{O}$ fortfahren, fixieren wir noch einige Begriffe.

Definition II.3.4. (a) Ein Hausdorffraum X heißt *(topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension* d, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von $\mathbb{R}^d$ homöomorph ist. Im Folgenden sprechen wir einfach von *Mannigfaltigkeiten*, wenn wir topologische Mannigfaltigkeiten meinen.
(b) Ist X eine Mannigfaltigkeit und X' ein Hausdorffraum, so heißt eine stetige Abbildung $p: X' \to X$ ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt $x \in X'$ eine offene Umgebung U besitzt, für die $p(U)$ offen und $p\,|_U : U \to p(U)$ ein Homöomorphismus ist.

Es ist klar, dass die Existenz eines lokalen Homöomorphismus $p: X' \to X$ impliziert, dass X' ebenfalls eine Mannigfaltigkeit ist. Man nennt (p, X') dann *ein Gebiet über* X. Ist klar, auf welche Abbildung p man sich bezieht, so spricht man auch von X' als einem Gebiet über X. Für $X = \mathbb{C}^n$ spricht man auch von *Riemannschen Gebieten über* $\mathbb{C}^n$ und für $n = 1$ von *Riemannschen Flächen über* $\mathbb{C}$. ∎

Beispiel II.3.5. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung

$$p_n \colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto z^n$$

ein lokaler Homöomorphismus (Satz über die Umkehrfunktion! vgl. Aufgabe II.3.6).
(b) Die Abbildung

$$\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times, \quad z \mapsto e^z$$

ist ebenfalls ein lokaler Homöomorphismus (Satz über die Umkehrfunktion!).
(c) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so ist der Graph

$$\Gamma(f) := \{(z, f(z)) \colon z \in \Omega\}$$

ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^n$ bzgl. der Abbildung

$$p \colon \Gamma(f) \to \mathbb{C}^n, \quad (z, w) \mapsto z.$$

In diesem Fall ist p sogar ein (globaler) Homöomorphismus auf Ω.
(d) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so betrachten wir die Menge

$$M := \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C} \colon w^m = f(z)\},$$

die man sich wie den Graphen der "mehrwertigen Funktion" $\sqrt[m]{f(z)}$ vorstellen kann. Die Abbildung

$$p \colon M \to \mathbb{C}^n, \quad (z, w) \mapsto z$$

definiert dann ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^n$: Sei $a \in \Omega$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ eine offene zusammenhängende Umgebung von $f(a)$, auf der eine m-te Wurzelfunktion $W_m \colon V \to \mathbb{C}$ existiert. Auf der offenen Umgebung $U := f^{-1}(V)$ erhalten wir dann eine stetige Abbildung

$$\sigma \colon U \to M, \quad z \mapsto (z, W_m(f(z)))$$

mit $p \circ \sigma = \mathrm{id}_U$. Also ist $p|_{\sigma(U)} \colon \sigma(U) \to U$ ein Homöomorphismus. Andererseits ist die Menge $\sigma(U)$ eine Umgebung jedes ihrer Punkte $(b, W_m(f(b)))$, denn aus $(z_k, w_k) \to (b, W_m(f(b)))$ folgt $z_k \to b$ und $w_k^m = f(z_k) \to f(b)$. Aus

$$W_m(f(z_k)) \cdot w_k^{-1} \subseteq C_m := \{x \in \mathbb{C} \colon x^m = 1\}$$

und der Konvergenz der Folgen (w_k) und $W_m(f(z_k))$ folgt nun, dass für ausreichend große k die Beziehung $w_k = W_m(f(z_k))$ gilt, also $(z_k, w_k) \in \sigma(U)$. Daher ist $\sigma(U)$ offen und p daher ein lokaler Homöomorphismus.
(e) Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in \Omega$, so betrachten wir die Menge

$$M := \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C} \colon e^w = f(z)\},$$

die man sich wie den Graphen der "mehrwertigen Funktion" $\log f(z)$ vorstellen kann. Man zeigt nun vollkommen analog zu (d), dass $p \colon M \to \mathbb{C}^n, (z, w) \mapsto z$ ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^n$ definiert. ∎

Definition II.3.6. (a) Sei (p, X) ein Gebiet über $\mathbb{C}^n$. Eine stetige Funktion $f: X \to \mathbb{C}^m$ heißt *holomorph*, wenn für jedes $a \in X$ eine offene Umgebung U so existiert, dass gilt:

(H1) $p|_U: U \to p(U)$ ist ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^n$.

(H2) Die Funktion $f \circ (p|_U)^{-1}: p(U) \to \mathbb{C}^m$ ist holomorph.

Die Holomorphie einer Funktion $f: X \to \mathbb{C}^m$ ist also eine "lokale Eigenschaft".

(b) Seien $p: X \to \mathbb{C}^n$ bzw. $p': X' \to \mathbb{C}^m$ Gebiete über $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$. Eine stetige Abbildung $\varphi: X \to X'$ heißt *holomorph*, wenn die Komposition $p' \circ \varphi: X \to \mathbb{C}^m$ holomorph ist. ■

Beispiel II.3.7. Ist $p: X \to \mathbb{C}^n$ ein Gebiet über $\mathbb{C}^n$, so ist die Funktion $p: X \to \mathbb{C}^n$ holomorph, denn für jede offenen Teilmenge $U \subseteq X$, für die $p|_U: U \to p(U)$ ein Homöomorphismus ist, ist $p \circ (p|_U)^{-1} = \mathrm{id}_U$ holomorph. ■

Lemma II.3.8. *Sei (p, X) ein Gebiet über $\mathbb{C}^n$, $f: X \to \mathbb{C}$ holomorph und $V \subseteq X$ offen, sodass $p|_V: V \to p(V)$ ein Homöomorphismus ist. Dann ist $f \circ (p|_V)^{-1}: p(V) \to \mathbb{C}$ holomorph.*

Beweis. Sei dazu $v \in V$. Dann existiert eine offene Teilmenge $U \subseteq X$, die v enthält, und für die (H1) und (H2) in Definition II.3.6 erfüllt sind. Die Funktion $f \circ (p|_V)^{-1}$ stimmt nun in der Umgebung $p(U \cap V)$ von $p(v)$ mit $f \circ (p|_U)^{-1}$ überein, ist also in $p(v)$ holomorph, d.h. $f \circ (p|_V)^{-1}$ ist holomorph. ■

Lemma II.3.9. *Sind (p_i, X_i) Gebiete über $\mathbb{C}^{n_i}$ für $i = 1, 2, 3$ und $f: X_1 \to X_2$, $g: X_2 \to X_3$ holomorph, so ist die Komposition $g \circ f: X_1 \to X_3$ holomorph.*

Beweis. Sei $a \in X_2$ und $U_2 \subseteq X_2$ eine offene Umgebung von a, auf der $p_2|_{U_2}$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist. Nach Lemma II.3.8 ist dann die Funktion

$$p_3 \circ g \circ (p_2|_{U_2})^{-1}: p_2(U_2) \to \mathbb{C}^{n_3}$$

holomorph, da $p_3 \circ g: X_2 \to \mathbb{C}^{n_3}$ holomorph ist.

Weiter sei $U_1 \subseteq f^{-1}(U_2) \subseteq X_1$ eine Umgebung von a, sodass $p_1|_{U_1}$ ein Homöomorphismus aufs Bild ist. Dann ist die Funktion

$$p_2 \circ f \circ (p_1|_{U_1})^{-1}: p_1(U_1) \to \mathbb{C}^{n_2}$$

holomorph und daher die Komposition

$$(p_3 \circ g \circ (p_2|_{U_2})^{-1}) \circ (p_2 \circ f \circ (p_1|_{U_1})^{-1}) = p_3 \circ g \circ f \circ (p_1|_{U_1})^{-1}: p_1(U_1) \to \mathbb{C}^{n_3}$$

holomorph. Also ist $p_3 \circ g \circ f$ holomorph, und das heisst, dass $g \circ f$ holomorph ist. ■

Konstruktion Riemannscher Gebiete durch Garben

Wir kombinieren nun die Garbenkonstruktion mit dem Begriff des Riemannschen Gebiets. Das folgende Lemma schafft eine Verbindung:

Lemma II.3.10. *Die Garbe $\mathcal{O}$ aller holomorphen Funktionskeime auf $\mathbb{C}^n$ hat folgende Eigenschaften:*
(1) *Die Abbildung $p: \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n, f_a \mapsto a$ definiert ein Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^n$.*
(2) *Die kanonische Funktion $\chi: \mathcal{O} \to \mathbb{C}, f_z \mapsto f(z)$ ist holomorph.*
(3) *Ist $U \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $f \in \mathcal{O}(U)$, so ist*

$$\sigma_f: U \to \mathcal{O}, \quad z \mapsto f_z$$

eine offene holomorphe Einbettung mit $\chi \circ \sigma_f = f$.

Beweis. (1) folgt aus Lemma II.3.3.
(2) Für jede offene Menge der Gestalt $N(U, f)$ und $z \in U$ ist

$$\chi \circ \left(p|_{N(U,f)}\right)^{-1}(z) = \chi(f_z) = f(z),$$

d.h. $\chi \circ \left(p|_{N(U,f)}\right)^{-1} = f$, und diese Funktion ist auf U holomorph.
(3) Aus Lemma II.3.3(2) wissen wir schon, dass σ_f ein Homöomorphismus $U \to N(U, f)$ ist. Da $p \circ \sigma_f = \mathrm{id}_U$ holomorph ist, ist σ_f holomorph. ■

Das folgende Lemma verallgemeinert (3) auf Gebiete über $\mathbb{C}^n$.

Lemma II.3.11. *Sei $p: X \to \mathbb{C}^n$ ein Gebiet über $\mathbb{C}^n$ und $f: X \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann erhalten wir eine offene holomorphe Funktion*

$$\eta_f: X \to \mathcal{O}, \quad z \mapsto \left(f \circ (p|_U)^{-1}\right)_{p(z)},$$

wobei U eine offene Umgebung von $z \in X$ ist, für die $p|_U: U \to p(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Homöomorphismus ist. Es gilt

$$\chi \circ \eta_f = f.$$

Beweis. Wir haben zu zeigen, dass η_f wohldefiniert ist.

Sei dazu $z \in X$ und U, V offene Umgebungen von $z \in X$, für die $p|_U: U \to p(U)$ und $p|_V: V \to p(V) \subseteq \mathbb{C}^n$ Homöomorphismen sind. Dann stimmen die beiden holomorphen Funktionen $f \circ (p|_U)^{-1}$ und $f \circ (p|_V)^{-1}$ auf der offenen Menge $p(U \cap V)$ überein (Lemma II.3.3(1)), haben also den gleichen Keim in $p(z)$, d.h.

$$(f \circ (p|_U)^{-1})_{p(z)} = (f \circ (p|_V)^{-1})_{p(z)}.$$

Also ist η_f wohldefiniert.

Sei $p_{\mathcal{O}}\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n, f_a \mapsto a$. Aus der Holomorphie von $p_{\mathcal{O}} \circ \eta_f = p\colon X \to \mathbb{C}^n$ (Beispiel II.3.7) folgt, dass η_f holomorph ist. Aus Lemma II.3.10 folgt, dass η_f eine offene Abbildung ist, da dies für alle Funktionen $\sigma_{f\circ(p|_U)^{-1}}\colon p(U) \to \mathcal{O}$ gilt. Weiter ist $\chi \circ \eta_f = f$, da in der obigen Situation für $z \in U$ die Beziehung

$$\chi\big(\eta_f(z)\big) = \big(f \circ (p|_U)^{-1}\big)\big(p(z)\big) = f(z)$$

gilt. Die Funktion f faktorisiert also über die Abbildung η_f. ■

Bemerkung II.3.12. Ist $X = \Omega$ ein Gebiet in $\mathbb{C}^n$, so kann man die Inklusion $\Omega \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ auch als Gebiet über $\mathbb{C}^n$ auffassen. Die Funktion η_f aus Lemma II.3.10 entspricht dann der Einbettung $\sigma_f\colon \Omega \to \mathcal{O}, z \mapsto f_z$ aus Lemma II.3.10. ■

Das Ziel dieser Konstruktionen ist es, zu einer holomorphen Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet in $\mathbb{C}^n$ eine maximale Fortsetzung, d.h. ein Gebiet zu konstruieren, auf dem eine maximale Fortsetzung existiert. Wegen der Mehrdeutigkeiten, die hierbei schon im Eindimensionalen auftreten, ist nicht zu erwarten, dass ein solches Gebiet *in* $\mathbb{C}^n$ existiert. Daher suchen wir nach Gebieten *über* $\mathbb{C}^n$ mit dieser Eigenschaft. Zuerst müssen wir den Begriff der holomorphen Fortsetzung in diesem Rahmen präzisieren.

Definition II.3.13. Sei $p\colon X \to \mathbb{C}^n$ ein Gebiet über $\mathbb{C}^n$ und $f \in \mathcal{O}(X)$. Ist $p'\colon X' \to \mathbb{C}^n$ ein zusammenhängendes Gebiet über $\mathbb{C}^n$, so nennen wir ein Paar (g, u) bestehend aus einer holomorphen Einbettung $g \in \mathcal{O}(X')$ und einer injektiven holomorphen Abbildung $u\colon X \to X'$ eine *holomorphe Fortsetzung von* f, wenn
(1) $p' \circ u = p$ und
(2) $g \circ u = f$.

Da p und p' ein lokale Homömorphismen sind, gilt dies daher auch für u. Daher ist $u(X) \subseteq X'$ offen, und wir können X wegen $p' \circ u = p$ mit der offenen Teilmenge $u(X) \subseteq X'$ identifizieren. ■

Bemerkung II.3.14. (a) Es seien $\Omega \subseteq \Omega'$ Gebiete in $\mathbb{C}^n$ sowie $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $g \in \mathcal{O}(\Omega')$ mit $g|_\Omega = f$. Ist $u\colon \Omega \to \Omega'$ die kanonische Inklusion, so ist das Paar (g, u) eine holomorphe Fortsetzung von f.
(b) Ist u gegeben, so folgt die Eindeutigkeit der Funktion g aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung für Gebiete über $\mathbb{C}^n$ (Satz II.3.16 unten). ■

Bemerkung II.3.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

(a) Seien $p\colon X \to \mathbb{C}^n$ und $p'\colon X' \to \mathbb{C}^n$ zusammenhängende Gebiete über $\mathbb{C}^n$, $\Omega \subseteq X$ offen und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Wir nennen eine holomorphe Fortsetzung (g, u) von f *redundant*, wenn eine holomorphe Funktion $\widehat{f} \in \mathcal{O}(X)$ existiert mit $\widehat{f}|_\Omega = f$ und eine holomorphe Abbildung $q\colon X' \to X$ mit $q \circ u = \mathrm{id}_\Omega$, so dass

$$g = \widehat{f} \circ q$$

ist. Wegen $(\widehat{f} \circ q) \circ u = f|_\Omega$ und $p' \circ u = p|_\Omega$ sind alle Paare der Gestalt $(\widehat{f} \circ q, u)$ holomorphe Fortsetzungen von f.

Die Redundanz solcher Fortsetzungen beruht darauf, dass das Gebiet X' keine neue Information über f liefert und wir es einfach durch das Gebiet $q(X') \subseteq X$ ersetzen dürfen.

(b) Sind $u_1, u_2 \colon \Omega \to X$ zwei verschiedene holomorphe Abbildungen mit $q \circ u_j = \mathrm{id}_\Omega$, so erhalten wir mit der Methode aus (a) zwei verschiedene holomorphe Fortsetzungen (g_1, u_1) und (g_2, u_2) von f.

Ein einfaches Beispiel erhält man wie folgt. Sei $\Omega = K_1(1) \subseteq X := \mathbb{C}$ die offene Einheitskreisscheibe um 1, $X' = \mathbb{C}$ und $g := q := \exp \colon X' \to X = \mathbb{C}$ (Beispiel II.3.5(b)). Wir definieren

$$u_1 \colon \Omega \to X', \quad z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

und $u_2(z) := u_1(z) + 2\pi i$. Dann sind $u_1, u_2 \colon \Omega \to X'$ zwei verschiedene holomorphe Abbildungen mit $q \circ u_j = \mathrm{id}_\Omega$, $j = 1, 2$. Insbesondere sind (g, u_j), $j = 1, 2$, verschiedene holomorphe Fortsetzungen der identischen Abbildung $\Omega \hookrightarrow \mathbb{C}$.

(c) Wir wollen uns veranschaulichen, warum der obige Begriff der holomorphen Fortsetzung genau das Richtige modelliert. Wir haben in Lemma II.3.10 gesehen, wie man Ω durch die Abbildung $\sigma_f \colon \Omega \to \mathcal{O}$ in die Garbe $\mathcal{O}$ einbetten kann. Ist $Y \subseteq \mathcal{O}$ eine offene zusammenhängende Teilmenge, die $\sigma_f(\Omega)$ enthält, so ist $(\chi|_Y, \sigma_f)$ wegen $(p_{\mathcal{O}}|_Y) \circ \sigma_f = \mathrm{id}_\Omega$ und $\chi \circ \sigma_f = f$ eine holomorphe Fortsetzung von f.

Sei nun (g, u) eine holomorphe Fortsetzung von $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf das Gebiet X über $\mathbb{C}^n$, d.h. $u \in \mathcal{O}(\Omega, X)$ mit $g \circ u = f$ und $p \circ u = \mathrm{id}_\Omega$. Gemäß Lemma II.3.11 haben wir eine offene holomorphe Abbildung $\eta_g \colon X \to \mathcal{O}$, sodass wir X als ein Gebiet über dem Gebiet $Y := \eta_g(X) \subseteq \mathcal{O}$ auffassen können. Für $z \in \Omega$ gilt nun $\eta_g\big(u(z)\big) = (g \circ u)_z = f_z = \sigma_f(z)$, d.h. $\eta_g \circ u = \sigma_f$. Daher ist

$$\sigma_f(\Omega) = \eta_g(u(\Omega)) \subseteq \eta_g(X) \subseteq \mathcal{O}.$$

Die holomorphe Fortsetzung (g, u) von f auf X entsteht also in zwei Schritten. Zunächst haben wir die holomorphe Fortsetzung $\big(\chi|_{\eta_g(X)}, \sigma_f\big)$ von f auf das Gebiet $\eta_g(X) \subseteq \mathcal{O}$, und dann entsteht g durch eine redundante holomorphe Fortsetzung $(\chi|_{\eta_g(X)} \circ \eta_g, u \circ p_{\mathcal{O}})$ der Funktion $\chi|_{\eta_g(X)}$ auf das Gebiet X über $\eta_g(X)$. Lassen wir redundante holomorphe Fortsetzungen außer acht, so dürfen wir uns daher auf Gebiete beschränken, die in $\mathcal{O}$ liegen. ∎

Satz II.3.16. (Prinzip der analytischen Fortsetzung) *Seien $p \colon X \to \mathbb{C}^n$ bzw. $p' \colon X' \to \mathbb{C}^m$ Gebiete über $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{C}^m$ und X zusammenhängend. Sind $f, g \colon X \to X'$ holomorph und stimmen auf einer offenen Teilmenge von X überein, so ist $f = g$.*

Beweis. Sei $E \subseteq X$ die Menge der Punkte $x \in X$, für die f und g auf einer Umgebung von x übereinstimmen. Dann ist E offen und nach Voraussetzung nicht leer. Wir zeigen, dass E abgeschlossen ist.

Sei dazu $a \in \overline{E}$. Da f und g stetig sind und X' hausdorffsch ist, gilt $f|_{\overline{E}} = g|_{\overline{E}}$ (Übung). Sei $y := f(a) = g(a)$ und V eine Umgebung von y, für die $p'|_V: V \to p'(V)$ ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}^m$ ist. Weiter sei $U \subseteq f^{-1}(V) \cap g^{-1}(V)$ eine zusammenhängende offene Umgebung von a, für die $p|_U: U \to p(U)$ ein Homöomorphismus auf eine Umgebung $p(U)$ von $p(a)$ ist. Dann sind

$$p' \circ f \circ (p|_U)^{-1}: p(U) \to p'(V) \quad \text{und} \quad p' \circ g \circ (p|_U)^{-1}: p(U) \to p'(V)$$

holomorphe Abbildungen, die auf der offenen Menge $p(E \cap U)$ übereinstimmen, die wegen $a \in \overline{E}$ nicht leer ist. Wir wenden nun das Prinzip der analytischen Fortsetzung (Satz I.3.1) auf die Komponenten dieser Funktionen an, und sehen, dass beide Funktionen auf der zusammenhängenden Menge $p(U)$ übereinstimmen. Da $p'|_V$ injektiv ist, folgt hieraus $f|_U = g|_U$, also $U \subseteq E$, d.h. $a \in E$ und damit ist E abgeschlossen. Also ist E nicht leer, offen und abgeschlossen und stimmt daher mit X überein, sodass $f = g$ gilt. ∎

Theorem II.3.17. (Existenz universeller holomorpher Fortsetzungen) *Für jede holomorphe Funktion $f: \Omega \to \mathbb{C}$ auf einem Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ existiert ein zusammenhängendes Gebiet $p_f: \mathcal{O}_f \to \mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}^n$ und eine holomorphe Fortsetzung $(\widehat{f}, \sigma_f)$ von f auf $\mathcal{O}_f$ mit der folgenden universellen Eigenschaft:*

Für jedes zusammenhängende Gebiet $p_X: X \to \mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}^n$ und jede holomorphe Fortsetzung (g, u) von f auf X existiert genau eine holomorphe Abbildung $\varphi: X \to \mathcal{O}_f$, sodass $\varphi \circ u = \sigma_f$ gilt. Dies hat $p_f \circ \varphi = p_X$ und $\widehat{f} \circ \varphi = g$ zur Folge. In diesem Sinn ist die Fortsetzung $(\widehat{f}, \sigma_f)$ maximal/universell.

Beweis. Sei $a \in \Omega$ und $\mathcal{O}_f$ die Zusammenhangskomponente von f_a in der Garbe $\mathcal{O}$. Wir definieren $p_f := p|_{\mathcal{O}_f}$ und $\widehat{f} := \chi|_{\mathcal{O}_f}$. Da χ auf $\mathcal{O}$ holomorph ist, ist $\widehat{f}$ auf $\mathcal{O}_f$ eine holomorphe Funktion.

Weiter ist $\sigma_f(\Omega) \subseteq \mathcal{O}$ zusammenhängend, da σ_f stetig ist (Lemma II.3.10). Da f_a in $\sigma_f(\Omega)$ enthalten ist, folgt $\sigma_f(\Omega) \subseteq \mathcal{O}_f$ aus der Definition von $\mathcal{O}_f$. Damit ist die Abbildung $\sigma_f: \Omega \to \mathcal{O}_f, z \mapsto \sigma_f(z)$ eine holomorphe Abbildung mit $\widehat{f} \circ \sigma_f = \chi \circ \sigma_f = f$ und $p_f \circ \sigma_f = \mathrm{id}_\Omega$, d.h. $(\widehat{f}, \sigma_f)$ ist eine holomorphe Fortsetzung von f.

Sei nun (g, u) eine holomorphe Fortsetzung von f auf ein zusammenhängendes Gebiet X über $\mathbb{C}^n$. Dann existiert eine holomorphe Abbildung $\eta_g: X \to \mathcal{O}$ mit $\eta_g \circ u = \sigma_f$, da $g \circ u = f$ ist (siehe Lemma II.3.11). Da X zusammenhängend ist, ist auch $\eta_g(X)$ zusammenhängend, und da diese Teilmenge das Bild von σ_f enthält, ist $\eta_g(X) \subseteq \mathcal{O}_f$. Ist $\varphi: X \to \mathcal{O}_f$ die entsprechende Korestriktion, so ist dies eine holomorphe Abbildung mit $\varphi \circ u = \sigma_f$. Da $u(\Omega) \subseteq X$ offen ist (Bem. II.3.15(a)), ist φ durch diese Eigenschaft wegen des Prinzips der analytischen Fortsetzung eindeutig bestimmt (Satz II.3.16).

Weiter ist $\widehat{f} \circ \varphi \circ u = \widehat{f} \circ \sigma_f = f = g \circ u$, sodass $\widehat{f} \circ \varphi = g$ ebenfalls aus Satz II.3.16 folgt. Ebenso folgt $p_f \circ \varphi = p_X$ aus $p_f \circ \varphi \circ u = p_f \circ \sigma_f = \mathrm{id}_\Omega = p_X \circ u$. Damit ist alles gezeigt. ∎

Wir fassen zusammen, was wir in diesem Abschnitt gesehen haben. Zunächst haben wir die Garbe $\mathcal{O}$ als die Menge aller Funktionskeime f_a, $a \in \mathbb{C}^n$, f in einer Umgebung von a holomorph, konstruiert. Diese Garbe haben wir derart mit einer Topologie versehen, dass sie mit der kanonischen Projektion $p\colon \mathcal{O} \to \mathbb{C}^n$ zu einem Gebiet über $\mathbb{C}^n$ wird. Natürlich ist $\mathcal{O}$ ein riesiger Raum und weit davon entfernt, zusammenhängend zu sein. Man kann sich $\mathcal{O}$ als ein universelles Riemannsches Gebiet über $\mathbb{C}^n$ vorstellen.

Ist nun $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so haben wir eine zugehörige Einbettung $\sigma_f\colon \Omega \to \mathcal{O}, z \mapsto f_z$. Man stellt sich nun vor, dass wir die Funktion f dadurch fortsetzen, dass man an das Bild $\sigma_f(\Omega)$, das wir uns als eine Kopie von Ω vorstellen, in $\mathcal{O}$ kleine zusammenhängende Umgebungen der Gestalt $N(U, h)$ anbaut, sofern sie $\sigma_f(\Omega)$ schneiden. Man bekommt so immer größere Gebiete, auf denen eine Fortsetzung von f durch die universelle Funktion χ gegeben ist. Dieser Prozeß stößt an seine natürliche Grenze, wenn wir die gesamte Zusammenhangskomponente $\mathcal{O}_f$ von $\mathcal{O}$, die $\sigma_f(\Omega)$ enthält, ausgeschöpft haben.

Ist $U \subseteq \mathcal{O}_f$ eine offene zusammenhängende Teilmenge, die $\sigma_f(\Omega)$ enthält und auf der p injektiv ist, so ist $\widehat{\Omega} := p(U) \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet, auf das sich f durch $f\big(p(z)\big) := \chi(z)$ holomorph fortsetzen lässt. Läßt man redundante holomorphe Fortsetzungen außer acht, so hat jedes Gebiet in $\mathbb{C}^n$, das eine holomorphe Fortsetzung von f trägt, diese Gestalt.

Beispiel II.3.18. Für $\Omega = \mathbb{C} \setminus -\mathbb{R}^+$ und $f(re^{it}) := \sqrt{r}e^{\frac{it}{2}}$ für $|t| < \pi$ (ein Zweig der Quadratwurzel) ist das Gebiet Ω in $\mathbb{C}$ natürlich maximal, da die Werte auf beiden Seiten der Halbgerade $-\mathbb{R}^+$ nicht zusammenpassen. Man muss sich nun vorstellen, dass man Ω durch σ_f in $\mathcal{O}$ hinein liftet und dort an beiden Rändern weiter anbauen kann. Für die maximale holomorphe Fortsetzung $(\widehat{f}, \sigma_f)$ gilt nun $\widehat{f}^{\,2} \circ \sigma_f = \mathrm{id}_\Omega = p_f \circ \sigma_f$ und daher wegen des Prinzips der analytischen Fortsetzung

$$p_f = p|_{\mathcal{O}_f} = \widehat{f}^{\,2}.$$

Wir verschaffen uns nun eine konkrete Realisierung von $\mathcal{O}_f$. Ist

$$q\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^2$$

die Quadratabbildung, so definiert q ein Gebiet über $\mathbb{C}$. Die Funktion $g := \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ wollen wir als eine Fortsetzung der Wurzelfunktion f deuten (siehe Definition II.3.13). Dass g eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}^\times$ im Sinne von Riemannschen Flächen ist, folgt aus der Holomorphie von $q \circ g = q$. Wir betrachten die Abbildung $u := f\colon \Omega \to \mathbb{C}^\times$. Dann gilt $q \circ u = f^2 = \mathrm{id}_\Omega$ und $g \circ u = u = f$. Also ist (g, u) eine holomorphe Fortsetzung von f. Aus der universellen Eigenschaft von $\mathcal{O}_f$ folgt nun die Existenz einer holomorphen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathcal{O}_f$ mit $\widehat{f} \circ \varphi = g = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times}$ und $p_f \circ \varphi = q$. Auf der offenen Menge $\mathrm{im}(\varphi)$ ist daher $\varphi \circ \widehat{f} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_f}$, nach dem Identitätssatz also

$$\widehat{f} \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^\times} \quad \text{und} \quad \varphi \circ \widehat{f} = \mathrm{id}_{\mathcal{O}_f}.$$

Also ist $\widehat{f}: \mathcal{O}_f \to \mathbb{C}^\times$ biholomorph $p_f = \widehat{f}^2: \mathcal{O}_f \to \mathbb{C}^\times$ entspricht der Quadratabbildung $q: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$.

Insbesondere sehen wir also, dass die Abbildung

$$\widehat{f}^{\,2}: \mathcal{O}_f \to \mathbb{C}^\times$$

eine zweiblättrige Überlagerung ist. Das Urbild eines jeden Punktes sind die beiden Keime der Wurzelfunktion in diesem Punkt. ■

Im allgemeinen ist die Faser von p_f in einem Punkt $z \in \mathbb{C}^n$ immer die Menge der Funktionskeime in diesem Punkt, die man durch analytische Fortsetzung von f entlang irgendeines Weges erhalten kann.

Aufgabe II.3.1. Wir betrachten die Algebra $A := \mathbb{C}[[Z_1, \ldots, Z_n]]$ der Potenzreihen in n Unbestimmten $Z_1, \ldots, Z_n$. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ sei

$$A_U := \{P \in A: U \subseteq \mathcal{D}_P\}$$

die Menge derjenigen Potenzreihen, die auf U absolut summierbar sind. Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathbb{C}^n$ definieren wir

$$A_S := \bigcap_{U \supseteq S} A_U,$$

wobei wir über alle offenen Umgebungen von S schneiden. Zeige:
(1) Für jede offene Teilmenge U ist A_U eine komplexe Unteralgebra von A.
(2) Für jede Teilmenge S ist A_S eine komplexe Unteralgebra von A.
(3) $A_0 := A_{\{0\}} = \{\sum_\alpha c_\alpha Z^\alpha: (\exists \mathbf{r} > 0)(\exists M > 0)(\forall \alpha)|c_\alpha| \leq M\mathbf{r}^{-\alpha}\}$. Hinweis: Cauchy'sche Ungleichungen. ■

Aufgabe II.3.2. Sei $a \in \Omega$ und Ω ein Gebiet in $\mathbb{C}^n$. Zeige:
(1) Durch

$$f_a + g_a := (f+g)_a, \quad f_a \cdot g_a := (f \cdot g)_a$$

etc. wird auf der Menge $\mathcal{O}_a$ der Keime holomorpher Funktionen in a die Struktur einer komplexen Algebra definiert.
(2) Die Keime f_a und g_a stimmen genau dann überein, wenn für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ die Gleichheit

$$(D^\alpha f)(a) = (D^\alpha g)(a)$$

gilt.
(3) Sei A_0 wie in Aufgabe II.3.1. Die Abbildung

$$\mathcal{O}_a \to A_0, \quad f_a \mapsto \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D^\alpha f)(a) Z^\alpha$$

ist wohldefiniert und ein Isomorphismus komplexer Algebren. Wir können uns die Elemente von $\mathcal{O}_a$ also durch in einer Umgebung von a konvergente Potenzreihen beschrieben denken. ■

Aufgabe II.3.3. Für $n = 1$ betrachten wir die Potenzreihe

$$L(Z) := \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha} Z^\alpha$$

und den zugehörigen Funktionskeim $L_1 \in \mathcal{O}_1$ für $\Omega = \mathbb{C}$.
(1) Bestimme den absoluten Konvergenzbereich $\mathcal{D}_L$ der Potenzreihe L.
(2) Finde Repräsentanten $f: U \to \mathbb{C}$ des Keims L_1 mit möglichst großen offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{C}$, die 1 enthalten. ∎

Aufgabe II.3.4. Diskutiere die Riemannsche Fläche $\mathcal{O}_{\log} \to \mathbb{C}^\times$ der Logarithmusfunktion analog zur Wurzelfunktion in Beispiel II.3.5. ∎

Aufgabe II.3.5. Seien X und Y topologische Räume und $p: X \to Y$ eine stetige Abbildung.
(1) Sei p ein lokaler Homöomorphismus, d.h., jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung U_x, sodass $p(U_x)$ eine Umgebung von $p(x)$ ist und die Einschränkung $p|_{U_x}: U_x \to p(U_x)$ ein Homöomorphismus. Dann ist p stetig und offen.
(2) Ist p stetig und offen, so ist p genau dann ein lokaler Homöomorphismus, wenn p lokal injektiv ist, wenn also jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass $p|_U$ injektiv ist. ∎

Aufgabe II.3.6. Führe den komplexen Satz über die Umkehrfunktion auf den reellen Satz zurück: Ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen, $a \in \Omega$ und $f: \Omega \to \mathbb{C}^n$ holomorph, sodass $df(a)$ invertierbar ist, so existieren offene Umgebungen U von a und V von $f(a)$, sodass

$$f|_U: U \to V$$

biholomorph ist, d.h. bijektiv mit holomorpher Umkehrabbildung. Hinweis: Kettenregel. ∎

Aufgabe II.3.7. Sei $p: X' \to X$ eine stetige Abbildung. Zeige: p ist genau dann ein lokaler Homöomorphismus, wenn zu jedem $a \in X'$ eine offene Umgebung V von $p(a)$ und eine stetige Abbildung $\sigma: V \to X'$ mit offenem Bild und $p \circ \sigma = \mathrm{id}_V$ existiert. ∎

Um mit den universellen Riemannschen Gebieten $\mathcal{O}_f$ umgehen zu können, ist es wichtig zu wissen, dass ihre Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Satz II.3.19. (Poincaré* –Volterra**) *Sei X ein Hausdorffraum mit einer*

---

* Henri Poincaré (1854 – 1912), frz. Math. und Physiker in Paris; lieferte fundamentale Beiträge zur Algebra, Analysis, Geometrie und Zahlentheorie. Sein math. Werk steht in enger Verbindung zur Physik. Poincaré-Gruppe (spezielle Relativitätstheorie), Poincaré-Reihen (Theorie der automorphen Funktionen, Zahlentheorie), Erfinder der Fundamentalgruppe (die Bez. π steht für Poincaré), Rückkehrtheorem für dynamische Systeme; er benutzte zuerst die einhüllende assoziative Algebra einer Lie-Algebra (PBW-Theorem).

** Vito Volterra (1860 – 1940), ital. Math. in Pisa; Schüler von Betti; Begründer der Operatortheorie (Volterrasche Integralgleichungen).

abzählbaren Basis der Topologie und Y eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit, für die eine stetige Abbildung $f: Y \to X$ existiert, sodass alle Fasern $f^{-1}(x)$ diskret sind, d.h. für jedes $a \in f^{-1}(x)$ existiert eine Umgebung U mit $U \cap f^{-1}(x) = \{a\}$. Dann hat die Topologie auf Y ebenfalls eine abzählbare Basis.

Beweis. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf X. Wir betrachten die Menge $\mathcal{U}$ aller nichtleeren offenen Teilmengen U von Y, die relativ kompakt und eine Zusammenhangskomponente einer Menge der Gestalt $f^{-1}(X_n)$ sind. Wir zeigen, dass $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf Y ist.

$\mathcal{U}$ ist eine Basis der Topologie: Sei dazu $a \in Y$ und $V \subseteq Y$ eine offene Umgebung von a. Da die Faser $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr)$ diskret ist und Y eine Mannigfaltigkeit, existiert eine kompakte Umgebung W von a mit $f^{-1}\bigl(f(a)\bigr) \cap W = \{a\}$ und $W \subseteq V$. Dann ist $f(\partial W)$ eine kompakte Menge, die $f(a)$ nicht enthält, da ∂W kompakt und f stetig ist. Nun existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(a) \in X_n \subseteq X \setminus f(\partial W)$. Wir schreiben U für die Zusammenhangskomponente von $f^{-1}(X_n)$, die a enthält. Wegen $U \cap \partial W = \emptyset$ gilt jetzt $U \subseteq W$, denn sonst wäre $U = (U \cap W) \cup (U \cap W^c)$ eine disjunkte Zerlegung in offene Teilmengen. Wegen $U \subseteq W$ ist U relativ kompakt und daher eine Menge in $\mathcal{U}$ mit $a \in U \subseteq V$.

$\mathcal{U}$ ist abzählbar: Sei $U \in \mathcal{U}$. Da U relativ kompakt ist und Y eine Mannigfaltigkeit, existieren endlich viele offene Mengen $V_1, \ldots, V_k$, die U überdecken und homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sind. Wir schließen wie folgt, dass jede Familie $(W_j)_{j\in J}$ von nichtleeren paarweise disjunkten offenen Teilmengen von U abzählbar sein muss: Ist dies nicht der Fall, so existiert ein m, für das die Familie $(W_j \cap V_m)_{j\in J}$ eine überabzählbare Familie paarweise disjunkter nichtleerer offener Teilmengen von V_m enthält, im Widerspruch dazu, dass die Topologie von $\mathbb{R}^n$ und damit die von V_m eine abzählbare Basis besitzt.

Mit dem gleichen Argument sehen wir, dass für jede abzählbare Familie $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von Mengen in $\mathcal{U}$ gilt, dass jede Familie $(W_j)_{j\in J}$ von nichtleeren paarweise disjunkten offenen Teilmengen von $\bigcup_m U_m$ abzählbar sein muss.

Sei $U_0 \in \mathcal{U}$. Wir definieren nun induktiv folgende Mengenfamilien.

$$\mathcal{U}_0 := \{U_0\}, \quad \mathcal{U}_k := \{U \in \mathcal{U}: (\exists V \in \mathcal{U}_{k-1}) U \cap V \neq \emptyset\}, k \in \mathbb{N}.$$

Wir behaupten, dass alle $\mathcal{U}_k$ abzählbar sind, und dass $\mathcal{U} = \bigcup_k \mathcal{U}_k$ gilt.

Sei dazu

$$\Omega := \bigcup \Bigl(\bigcup_k \mathcal{U}_k\Bigr) \quad \text{und} \quad \Omega' := \bigcup \Bigl(\mathcal{U} \setminus \bigcup_k \mathcal{U}_k\Bigr).$$

Dann sind Ω und Ω' offene Teilmengen von Y mit $\Omega \cap \Omega' = \emptyset$ (wegen der Definition der $\mathcal{U}_k$) und $Y = \Omega \cup \Omega'$. Aus dem Zusammenhang von Y folgt daher $\Omega' = \emptyset$. Also ist $\bigcup_k \mathcal{U}_k = \mathcal{U}$, da $\mathcal{U}$ keine leeren Mengen enthält.

Die Abzählbarkeit der $\mathcal{U}_k$ zeigen wir durch Induktion. Es ist klar, dass $\mathcal{U}_0$ abzählbar ist. Sei $\mathcal{U}_{k-1}$ abzählbar. Wir betrachten die Menge

$$\widetilde{\Omega} := \bigcup \mathcal{U}_{k-1} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_{k-1}} U.$$

Wir haben oben schon gesehen, dass jede Familie paarweiser disjunkter nichtleerer offener Teilmengen von $\widetilde{\Omega}$ höchstens abzählbar sein kann. Daher ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Familie $\mathcal{F}_n$ der Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(X_n)$, die $\widetilde{\Omega}$ schneiden, abzählbar. Da jedes Element $V \in \mathcal{U}_k$ eine dieser Zusammenhangskomponenten ist, ist $\mathcal{U}_k$ abzählbar. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{U}$ eine abzählbare Basis der Topologie auf Y ist. ■

Folgerung II.3.20. *Die Topologie der Riemannschen Gebiete $\mathcal{O}_f$ besitzt eine abzählbare Basis.*

Beweis. Da $p_f : \mathcal{O}_f \to \mathbb{C}^n$ eine Abbildung mit diskreten Fasern ist (Übung) und die Topologie auf $\mathbb{C}^n$ eine abzählbare Basis hat, folgt die Behauptung aus Satz II.3.19. ■

II.4. Der Satz von Bochner über Röhrengebiete

Besonders schöne und wichtige Gebiete in $\mathbb{C}^n$ sind *Röhrengebiete*, also Gebiete der Form $\Omega := \omega + i\mathbb{R}^n$, wobei $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist. Man nennt dann Ω ein *Röhrengebiet mit der Basis ω*. Ziel dieses Abschnitts ist der Bochner'sche Fortsetzungssatz* für Röhrengebiete: Jede holomorphe Funktion auf einem Röhrengebiet lässt sich auf dessen konvexe Hülle holomorph fortsetzen.

Holomorphiehüllen

Definition II.4.1. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ offen und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Wir definieren die *Holomorphiehülle von K bzgl. Ω* durch

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega \colon \big(\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)\big) |f(z)| \leq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|\}. \qquad ■$$

Die Holomorphiehülle ist der maximale Bereich in Ω, für den ein Maximumprinzip für holomorphe Funktionen auf Ω bzgl. K gilt.

Wir erinnern uns daran, dass die *konvexe Hülle* $\operatorname{conv}(C)$ einer Teilmenge C eines reellen Vektorraums die kleinste konvexe Menge ist, die C enthält, also der Durchschnitt aller konvexen Obermengen.

Lemma II.4.2. (Lemma von Carathéodory**) *Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$, so ist die konvexe*

---

* Salomon Bochner (1899 – 1982), poln. Mathematiker; lehrte von 1924 bis 1933 in München und trat nach der Vertreibung eine Stelle in Princeton an. Er leistete wichtige Beiträge zur harmonischen Analysis und zur Theorie der Distributionen.

** Constantin Carathéodory (1873 – 1950), Schüler von Frobenius und Schwarz in Berlin; Promotion 1904 bei Minkowski in Göttingen; ab 1924 Prof. in München. Er leistete zentrale Beiträge zur Variationsrechnung und der Theorie der reellen Funktionen.

Hülle von C gegeben durch

$$\operatorname{conv}(C) = \Big\{ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j c_j \colon 0 \leq \lambda_j, \sum_j \lambda_j = 1, c_j \in C \Big\},$$

d.h. die konvexe Hülle entsteht durch Vereinigung aller Simplizes, die von maximal $n+1$ Elementen von C aufgespannt werden.

Beweis. "$\supseteq$": Seien $c_0, \ldots, c_m \in C$ und $\lambda_j \geq 0$ mit $\sum_{j=0}^m \lambda_j = 1$. Wir zeigen durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$, dass $\sum_j \lambda_j c_j \in \operatorname{conv}(C)$ ist. Für $m = 1$ folgt dies unmittelbar aus der Konvexität von $\operatorname{conv}(C)$. Wir nehmen an, die Behauptung gelte für $m-1$. Wir dürfen $\lambda_m < 1$ annehmen, denn sonst verschwinden alle anderen λ_j, $j < m$. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{m} \lambda_j c_j &= \lambda_m c_m + (1-\lambda_m) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} c_j \\ &\in \lambda_m C + (1-\lambda_m) \operatorname{conv}(C) \subseteq \operatorname{conv}(C),\end{aligned}$$

da

$$\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} = \frac{\sum_{j=0}^{m-1} \lambda_j}{1-\lambda_m} = 1.$$

"$\subseteq$": Das ist der interessante Teil. Mit dem ersten Teil sieht man leicht, dass

$$\operatorname{conv}(C) = \Big\{ \sum_{j=0}^{m} \lambda_j c_j \colon m \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda_j, \sum_j \lambda_j = 1, c_j \in C \Big\}$$

gilt. Wir haben noch zu zeigen, dass man jeweils mit $n+1$ Summanden auskommt. Wir müssen also einsehen, dass wir für $m > n$ eine Konvexkombination $\sum_{j=0}^m \lambda_j c_j$, $c_j \in C$, auch als Konvexkombination $\sum_{j=0}^{m-1} \mu_j c_j$ schreiben können.

Hierzu dürfen wir annehmen, dass $\lambda_j > 0$ für alle j gilt, denn sonst lassen wir den entsprechenden Summanden einfach weg und sind fertig. Wegen $m > n$ sind die Vektoren $c_j - c_0$, $j = 1, \ldots, m$, linear abhängig. Also existiert ein $a \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ mit

$$\sum_{j=1}^{m} a_j (c_j - c_0) = 0. \tag{4.1}$$

Setzen wir $a_0 := -\sum_{j=1}^m a_j$, so können wir (4.1) schreiben als

$$\sum_{j=0}^{m} a_j c_j = 0 \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^{m} a_j = 0.$$

Nach Umsortieren dürfen wir weiter annehmen, dass $\frac{|a_j|}{\lambda_j} \leq \frac{|a_0|}{\lambda_0}$ für alle $j > 0$ gilt. Insbesondere folgt hieraus $a_0 \neq 0$. Nun setzen wir

$$\mu_j := \lambda_j - \frac{a_j \lambda_0}{a_0}.$$

Dann gilt $\mu_0 = 0$, $\mu_j \geq 0$ für alle $j > 0$ und

$$\sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{j=0}^m \mu_j = \sum_{j=0}^m \lambda_j - \frac{\lambda_0}{a_0} \sum_{j=0}^m a_j = 1 - 0 = 1.$$

Schließlich ist

$$\sum_{j=1}^m \mu_j c_j = \sum_{j=0}^m \lambda_j c_j - \frac{\lambda_0}{a_0} \sum_{j=0}^m a_j c_j = \sum_{j=0}^m \lambda_j c_j. \qquad \blacksquare$$

Lemma II.4.3. *Sei $K \subseteq \mathbb{C}^n$ kompakt. Dann ist die konvexe Hülle* $\mathrm{conv}(K)$ *kompakt und gegeben durch*

$$\mathrm{conv}(K) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \big(\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})\big) \ \mathrm{Re}\, f(z) \leq \sup\nolimits_{\zeta \in K} \mathrm{Re}\, f(\zeta)\},$$

wobei $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ *für den Vektorraum der komplex-linearen Abbildungen* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *steht.*

Beweis. Sei $S := \{\lambda \in \mathbb{R}^{2n+1} \colon \lambda_j \geq 0, \sum_j \lambda_j = 1\}$ das $2n$-dimensionale Einheitssimplex. Nach Lemma II.4.2 ist $\mathrm{conv}(K)$ das Bild der stetigen Abbildung

$$K^{2n+1} \times S \to \mathbb{C}^n, \quad (k_0, \ldots, k_{2n}, \lambda_0, \ldots, \lambda_{2n}) \mapsto \sum_{j=0}^{2n} \lambda_j k_j.$$

Da S und K^{2n+1} kompakt sind, folgt hieraus die Kompaktheit von $\mathrm{conv}(K)$.

Da für jede lineare Abbildung $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ die Funktion $\mathrm{Re}\, f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ reell linear ist, ist die Menge

$$\widetilde{K} := \{z \in \mathbb{C}^n \colon \big(\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})\big) \ \mathrm{Re}\, f(z) \leq \sup\nolimits_{\zeta \in K} \mathrm{Re}\, f(\zeta)\}$$

konvex und enthält K, also auch $\mathrm{conv}(K)$. Ist $p \notin \mathrm{conv}(K)$, so finden wir mit dem Trennungssatz von Hahn-Banach ein reell lineares Funktional $\gamma \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(p) > \gamma(w)$ für alle $w \in \mathrm{conv}(K)$. Wir setzen γ durch

$$f(z) := \gamma(z) - i\gamma(iz)$$

zu einer komplex linearen Abbildung $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fort (nachrechnen!). Damit ist $\mathrm{Re}\, f(p) = \gamma(p) > \sup \gamma(K) = \sup_{\zeta \in K} \mathrm{Re}\, f(\zeta)$. Hieraus folgt die Behauptung. $\blacksquare$

Lemma II.4.4. (a) *Die Holomorphiehülle* $\widehat{K}_\Omega$ *ist in der konvexen Hülle* $\mathrm{conv}(K)$ *enthalten. Insbesondere ist sie eine beschränkte Teilmenge von* Ω.
(b) *Ist* $M \subseteq \Omega \setminus K$ *eine in* Ω *relativ kompakte Zusammenhangskomponente, so ist* $M \subseteq \widehat{K}_\Omega$.
(c) *Ist* $\Omega_1 \subseteq \Omega$ *eine Zusammenhangskomponente und* $K \subseteq \Omega_1$, *so ist* $\widehat{K}_\Omega \subseteq \Omega_1$.
(d) *Die Teilmenge* $\widehat{K}_\omega$ *ist genau dann kompakt, wenn sie in* $\mathbb{C}^n$ *abgeschlossen ist, also wenn es keine Folge in* $\widehat{K}_\Omega$ *gibt, die gegen einen Randpunkt von* Ω *konvergiert.*

Beweis. (a) Sei $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ linear. Wir betrachten die Funktion $\widetilde{f} := e^f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann ist $|\widetilde{f}(z)| = e^{\mathrm{Re}\, f(z)}$ und daher

$$\widehat{K}_\Omega \subseteq \{z \in \mathbb{C}^n \colon (\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}))\, \mathrm{Re}\, f(z) \leq \sup_{\zeta \in K} \mathrm{Re}\, f(\zeta)\} = \mathrm{conv}(K)$$

(Lemma II.4.3).
(b) Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Da $M \subseteq \Omega \setminus K$ eine relativ kompakte Zusammenhangskomponente ist, gilt $\partial M \subseteq \Omega$ und somit $\partial M \subseteq K$. Nach dem 2. Maximum-Prinzip (Korollar I.3.8) gilt daher für $z \in M$:

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \partial M} |f(\zeta)| \leq \sup_{\zeta \in K} |f(\zeta)|,$$

also $z \in \widehat{K}_\Omega$.
(c) Auf Ω betrachten wir die lokal kontante Funktion f, die auf Ω_1 den Wert 0 und auf $\Omega \setminus \Omega_1$ den Wert 1 annimmt. Dann ist $\sup |f||_K = 0$ und

$$\widehat{K}_\Omega \subseteq \{z \in \Omega \colon |f(z)| \leq 0\} = \Omega_1.$$

(d) Da $\widehat{K}_\Omega$ nach (a) beschränkt ist, ist diese Menge nach dem Satz von Heine-Borel genau dann kompakt, wenn sie in $\mathbb{C}^n$ abgeschlossen ist. Da sie in Ω relativ abgeschlossen ist, bedeutet dies, dass sie sich in keinem Randpunkt von Ω häuft. ∎

Man kann zeigen, dass für $n = 1$ die Menge $\widehat{K}_\Omega$ die Vereinigung von K mit allen relativ kompakten Zusammenhangskomponenten von $\Omega \setminus K$ ist (siehe [Re95, II, S. 264, §13.3]).

Wir erinnern uns an die folgende Konstruktion (vgl. Aufgabe II.1.1). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ eine echte Teilmenge. Dann wird durch

$$d_{\Omega^c}(z) = \mathrm{dist}_\infty(\Omega^c, z) := \inf\{\|z - w\|_\infty \colon w \in \Omega^c\}$$

eine stetige Funktion $\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ definiert, deren Nullstellenmenge mit Ω^c übereinstimmt. Für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{C}^n$ setzen wir

$$\mathrm{dist}(A, \Omega^c) := \inf_{z \in A} d_{\Omega^c}(z).$$

Lemma II.4.5. *Sei* $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ *eine echte offene Teilmenge sowie* $K \subseteq \Omega$ *kompakt. Existiert eine holomorphe Funktion* $u \in \mathcal{O}(\Omega)$ *mit*

$$|u(z)| \leq d_{\Omega^c}(z) \quad \textit{für alle } z \in K,$$

so konvergiert für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *und* $a \in \widehat{K}_\Omega$ *die Taylorreihe*

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha \tag{4.2}$$

für $\|z-a\|_\infty < |u(a)|$ *gegen* $f(z)$.

Wenden wir das Lemma auf die konstante Funktion $u = \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$ an, so sehen wir, dass für $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $a \in \widehat{K}_\Omega$ die Taylorreihe für

$$\|z-a\|_\infty < \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$$

konvergiert. Für $\|z-a\|_\infty < \operatorname{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c)$ folgt dies aus der Cauchy'schen Integralformel I.1.8, aber wegen

$$\operatorname{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c) \leq \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$$

ist dies schwächer.

Beweis. Wir behaupten zuerst, dass für jedes $t \in]0,1[$ die Menge

$$M_t := \{z \in \Omega \colon (\exists w \in K)\|z-w\|_\infty \leq t|u(w)|\}$$

kompakt ist. Für $z \in M_t$ ist $\|z\|_\infty \leq \|w\|_\infty + |u(w)|$ für ein $w \in K$, also ist M_t beschränkt, da K kompakt und die stetige Funktion $u\,|_K$ beschränkt ist. Um zu sehen, dass M_t abgeschlossen ist, nehmen wir eine Folge $z_n \in M_t$ mit $z_n \to z \in \overline{M_t}$. Dann existieren $w_n \in K$ mit $\|z_n - w_n\|_\infty \leq t|u(w_n)|$. Da K kompakt ist, dürfen wir nach Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass die Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $w \in K$ konvergiert. Ist $w = z$, so ist $z \in M_t$; falls nicht, so gilt

$$0 < \|z-w\|_\infty \leq t|u(w)| < |u(w)| \leq d_{\Omega^c}(w).$$

Die zweite Ungleichung folgt hierbei aus

$$\|z-w\|_\infty \leq \|z-z_n\|_\infty + \|z_n - w_n\|_\infty + \|w_n - w\|_\infty$$

nach dem Grenzübergang $n \to \infty$. Gemäß der Definition von d_{Ω^c} ist nun $z \in \Omega$ und somit in M_t, d.h. M_t is kompakt.

Sei nun $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Da M_t kompakt ist, existiert ein $C_t > 0$ mit

$$|f(z)| \leq C_t \quad \text{für alle} \quad z \in M_t.$$

Mit der Cauchyschen Ungleichung I.3.4(1) erhalten wir wegen $T_{t|u(w)|\mathbf{1}}(w) \subseteq M_t$ für jeden Multiindex α:

$$\frac{|D^\alpha f(w)|}{\alpha!} t^{|\alpha|} |u(w)|^{|\alpha|} \leq C_t$$

für alle $w \in K$. Da die Funktion $D^\alpha f \cdot u^{|\alpha|}$ auf Ω holomorph ist, gelten die gleichen Abschätzungen für $w \in \widehat{K}_\Omega$. Für $w = a$ ergibt sich hieraus mit Satz I.3.4(3) die Konvergenz von (4.2) für $\|z-a\|_\infty < |u(a)|$. ■

Der Satz von Bochner

Bevor wir den Satz von Bochner beweisen können, müssen wir uns zuerst einige Werkzeuge verschaffen.

Theorem II.4.6. (Satz über implizite Funktionen) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ offen, $F\colon \Omega \to \mathbb{C}^m$ holomorph und $(a,b) \in \Omega$ mit $F(a,b) = 0$. Wir nehmen an, dass die lineare Abbildung*

$$\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m, \quad v \mapsto d_2F(a,b)(v) := dF(a,b)(0,v)$$

bijektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von (a,b), eine offene Umgebung V von a in $\mathbb{C}^n$ und eine holomorphe Funktion $\gamma\colon V \to \mathbb{C}^m$, sodass

$$\gamma(a) = b \quad \text{und} \quad \{(z,w) \in U\colon F(z,w) = 0\} = \{\big(z,\gamma(z)\big)\colon z \in V\}$$

gilt.

Beweis. (vgl. [Hö73, Th. 2.1.2]) Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ und $\mathbb{C}^m$ mit $\mathbb{R}^{2m}$ und möchten den reellen Satz über implizite Funktionen anwenden. In diesem Sinn interpretieren wir F als eine Funktion eines Gebietes in $\mathbb{R}^{2m+2n}$ nach $\mathbb{R}^{2m}$. Aus der Voraussetzung, dass die lineare Abbildung

$$\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m, \quad v \mapsto dF(a,b)(0,v)$$

bijektiv ist, folgt natürlich auch die Bijektivität der reell linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}, \quad v \mapsto dF(a,b)(0,v).$$

Der reelle Satz über implizite Funktionen liefert uns damit alles außer der Holomorphie von γ. Wir wissen lediglich, dass $\gamma\colon V \to \mathbb{R}^{2m}$ beliebig oft differenzierbar ist.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass für alle $v \in V$ die reell lineare Abbildung

$$d\gamma(v)\colon \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$$

auch komplex linear ist. Hierzu erinnern wir uns daran, dass der Satz über implizite Funktionen eine Formel für $d\gamma(v)$ liefert: Schreiben wir

$$d_1F(z,w)(x) = dF(z,w)(x,0) \quad \text{und} \quad d_2F(z,w)(x) = dF(z,w)(0,x),$$

so folgt aus $F\big(v,\gamma(v)\big) = 0$ für $v \in V$ mit der Kettenregel die Identität

$$d_1F\big(v,\gamma(v)\big) + d_2F\big(v,\gamma(v)\big) \circ d\gamma(v) = 0$$

und somit

$$d\gamma(v) = -d_2F\big(v,\gamma(v)\big)^{-1} \circ d_1F\big(v,\gamma(v)\big).$$

Da diese Abbildung als Komposition komplex linearer Abbildungen komplex linear ist, ist $d\gamma(v)$ für alle $v \in V$ komplex linear und γ somit holomorph. ■

Lemma II.4.7. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Röhrengebiet, dessen Basis die konvexe Hülle von*

$$\Delta := [0,1]e_1 \cup [0,1]e_2$$

enthält (ein zweidimensionales Dreieck). Für $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ setzen wir

$$Q_\varepsilon := \{x_1e_1 + x_2e_2 \colon 0 \leq x_1, x_2,\ x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) \leq 1 - \varepsilon\}$$

sowie

$$\Delta_\varepsilon := \{x + iy \colon x \in \Delta, y_1^2 + y_2^2 \leq \tfrac{1}{\varepsilon}, y_3 = \ldots = y_n = 0\}.$$

Dann gilt

$$(\Delta_\varepsilon + i\eta)\widehat{}_\Omega \supseteq Q_\varepsilon + i\eta \quad \textit{für alle} \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Die Menge Q_ε entsteht aus dem Dreieck $\mathrm{conv}(\Delta)$ durch kreisförmiges Einbeulen der Verbindungsstrecke von e_1 und e_2.

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $\eta = 0$ annehmen, da $\Omega + i\eta = \Omega$ gilt, so dass man die allgemeine Behauptung durch Verschieben mit $i\eta$ erhält.

Wir betrachten nun die Menge

$$M_\varepsilon := \{(z_1, z_2, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n \colon 0 \leq \operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2,\ \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 \leq 1,$$
$$z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2) = 1 - \varepsilon\}.$$

Mit $z_j = x_j + iy_j$ gilt nun für $z \in M_\varepsilon$:

$$x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \varepsilon, \quad 0 \leq x_1, x_2, \quad x_1 + x_2 \leq 1.$$

Für $z \in M_\varepsilon$ ist $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 + x_2 \leq 1$ und

$$\varepsilon\big(1 - (x_1^2 + x_2^2)\big) + \varepsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - x_1 - x_2 \leq 1. \tag{4.3}$$

Folglich ist $y_1^2 + y_2^2 \leq \frac{1}{\varepsilon}$, also M_ε kompakt. Wegen $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\big(z_1 + z_2 - \varepsilon(z_1^2 + z_2^2)\big) = 1 - 2\varepsilon z_1 \neq 0$$

für $z \in M_\varepsilon$. Der Satz über implizite Funktionen (Theorem II.4.6) zeigt, dass z_1 lokal eine holomorphe Funktion von z_2 ist. Aus dem gleichen Grund ist z_2 lokal eine holomorphe Funktion von z_1. Hieraus folgt, dass eine nichtkonstante holomorphe Funktion auf M_ε ihr Betragsmaximum auf der Menge

$$\widetilde{\partial} M_\varepsilon := \{z \in M_\varepsilon \colon \operatorname{Re} z_1 = 0, \operatorname{Re} z_2 = 0 \text{ oder } \operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 = 1\}$$

annehmen muss. Für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und jedes $z \in M_\varepsilon$ gilt daher

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \widetilde{\partial} M_\varepsilon} |f(\zeta)|.$$

Gilt $\operatorname{Re} z_1 + \operatorname{Re} z_2 = 1$ für $z \in M_\varepsilon$, so folgt aus (4.3) $y_1 = y_2 = 0$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$, also $z = e_1$ oder $z = e_2$. Damit ist $\widetilde{\partial} M_\varepsilon \subseteq \Delta_\varepsilon$ und somit

$$|f(z)| \leq \sup_{\zeta \in \Delta_\varepsilon} |f(\zeta)|,$$

d.h. $M_\varepsilon \subseteq \widehat{\Delta}_{\varepsilon,\Omega}$. Insbesondere enthält $\widehat{\Delta}_{\varepsilon,\Omega}$ die Menge

$$Q'_\varepsilon := \{x_1 e_1 + x_2 e_2 \colon 0 \leq x_1, x_2,\ x_1 + x_2 \leq 1,\ x_1 + x_2 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) = 1 - \varepsilon\}.$$

Aus $\lambda \Delta_\varepsilon \subseteq \Delta_\varepsilon$ für $\lambda \in [0,1]$ folgt damit

$$Q_\varepsilon = \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \lambda Q'_\varepsilon \subseteq \widehat{\Delta}_{\varepsilon,\Omega}. \qquad \blacksquare$$

Theorem II.4.8. (Fortsetzungssatz von Bochner) *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Röhrengebiet mit der Basis ω. Dann lässt sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorph auf das Gebiet $\operatorname{conv}(\Omega) = \operatorname{conv}(\omega) + i\mathbb{R}^n$ fortsetzen.*

Beweis. (a) Wir nehmen zuerst an, dass die Basis ω von Ω sternförmig bzgl. einem Punkt $p \in \omega$ ist, d.h. für alle $t \in [0,1]$ gilt $p + t(\omega - p) \subseteq \omega$. Hierbei dürfen wir o.B.d.A. $p = 0$ annehmen. Wir beachten, dass ω insbesondere zusammenhängend ist.

Sind Ω_1 und Ω_2 zwei Röhrengebiete, auf die sich alle holomorphen Funktionen auf Ω holomorph fortsetzen lassen und deren Basen ω_1 und ω_2 bzgl. 0 sternförmig sind, so ist $\Omega_1 \cap \Omega_2$ ein Röhrengebiet mit der Basis $\omega_1 \cap \omega_2$. Insbesondere ist $\Omega_1 \cap \Omega_2$ zusammenhängend und schneidet Ω. Sind $f_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, holomorphe Fortsetzungen von $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, so stimmen beide auf $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega$ und somit auf $\Omega_1 \cap \Omega_2$ überein (Prinzip der analytischen Fortsetzung). Wir erhalten daher eine holomorphe Fortsetzung von f auf das Röhrengebiet $\Omega_1 \cup \Omega_2$, das ebenfalls bzgl. 0 sternförmig ist. Die Menge aller Röhrengebiete, auf die sich alle holomorphen Funktionen auf Ω holomorph fortsetzen lassen und deren Basen bzgl. 0 sternförmig sind, ist also gerichtet, ihre Vereinigung $\widetilde{\Omega}$ ist somit ein Röhrengebiet mit diesen Eigenschaften und natürlich maximal. Insbesondere ist Ω in $\widetilde{\Omega}$ enthalten.

Wir müssen zeigen, dass die Basis $\widetilde{\omega}$ von $\widetilde{\Omega}$ konvex ist. Sind x_1, x_2 linear abhängige Elemente in $\widetilde{\omega}$, so folgt aus der Sternförmigkeit von $\widetilde{\omega}$, dass die Verbindungsstrecke zwischen den beiden in $\widetilde{\omega}$ verläuft. Sind $x_1, x_2 \in \widetilde{\omega}$ linear unabhängig, so dürfen wir nach einer geeigneten linearen Koordinatentransformation mit einer reellen Matrix $x_1 = e_1$ und $x_2 = e_2$ annehmen. Man beachte hierbei, dass eine lineare Abbildung mit einer reellen Matrix das Röhrengebiet Ω in ein Röhrengebiet überführt, dessen Basis bzgl. 0 sternförmig ist.

Wir dürfen $\Omega \neq \mathbb{C}^n$ annehmen, denn sonst ist nichts zu zeigen. Sei $\Delta = [0,1]e_1 \cup [0,1]e_2 \subseteq \omega$ nun wie in Lemma II.4.7 und $0 < \delta < \inf_{z \in \Delta} d_{\Omega^c}(z)$ (siehe Lemma II.4.5 für die Notation). Wir betrachten die Menge

$$E := \{a \in [0,1] \colon a \operatorname{conv}(\Delta) \subseteq \widetilde{\omega}\}.$$

Aus der Offenheit von $\widetilde{\omega}$ und der Kompaktheit von $\mathrm{conv}(\Delta)$ folgt, dass E in $[0,1]$ offen ist, und $0 \in E$ ist klar. Für $a \in E$ und $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ folgt aus Lemma II.4.7, dass eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, sodass die Holomorphiehülle bzgl. $\widetilde{\Omega}$ von $a\Delta + iK$ die Menge $L_{a,\varepsilon} := (1-\varepsilon)a\,\mathrm{conv}(\Delta)$ enthält. Daher konvergiert die Taylorreihe jeder Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ an einem Punkt ζ mit $\mathrm{Re}\,\zeta \in L_{a,\varepsilon}$ für $\|z-\zeta\|_\infty < \delta$, d.h. $z \in \zeta + \delta P_{\mathbf{1}}(0)$ (Lemma II.4.5 mit $u = \mathrm{dist}(a\Delta + iK, \widetilde{\Omega}^c)$ konstant). Ist ζ' ein weiterer Punkt mit $\mathrm{Re}\,\zeta' \in L_{a,\varepsilon}$, so ist

$$\big(\zeta + \delta P_{\mathbf{1}}(0)\big) \cap \big(\zeta' + \delta P_{\mathbf{1}}(0)\big)$$

eine konvexe Menge, insbesondere also zusammenhängend. Ist dieser Schnitt nicht leer, so enthält er sogar ein Element ζ'' auf der Verbindungsstrecke zwischen ζ und ζ'. Dann ist $\mathrm{Re}\,\zeta'' \in L_{a,\varepsilon}$, also $\zeta'' \in \widetilde{\Omega}$. Hieraus folgt, dass die beiden holomorphen Fortsetzungen von $\widetilde{f}$ auf $\zeta + \delta P_{\mathbf{1}}(0)$ und $\zeta' + \delta P_{\mathbf{1}}(0)$ übereinstimmen. Wir erhalten so eine holomorphe Fortsetzung auf dem bzgl. 0 sternförmigen Röhrengebiet $L_{a,\varepsilon} + \delta P_{\mathbf{1}}(0) + i\mathbb{R}^n$. Aus der Maximalität von $\widetilde{\Omega}$ folgt nun $L_{a,\varepsilon} + \delta P_{\mathbf{1}}(0) \subseteq \widetilde{\Omega}$. Diese Menge enthält $\widetilde{a}\,\mathrm{conv}(\Delta)$ für $\widetilde{a} = (1-\varepsilon)a + \delta$. Machen wir ε beliebig klein, so folgt $\widetilde{a}\,\mathrm{conv}(\Delta) \subseteq \widetilde{\Omega}$ für jedes $\widetilde{a} < a + \delta$. Hieraus folgt $\sup E = 1$, also $E = [0,1]$. Damit ist $\mathrm{conv}(\Delta) \subseteq \widetilde{\omega}$, d.h. $\widetilde{\omega}$ ist konvex, da $\mathrm{conv}(\Delta)$ die Verbindungsstrecke der Punkte e_1 und e_2 enthält.

(b) Sei $\omega \subseteq \mathbb{R}^n$ nun ein beliebiges Gebiet. Wir dürfen o.B.d.A. $0 \in \omega$ annehmen. Sei $\widetilde{\Omega}$ das maximale Röhrengebiet, das bzgl. 0 sternförmig ist und für das zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ ein $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ so existiert, dass beide Funktionen auf einer Nullumgebung übereinstimmen. Aus (a) folgt, dass $\widetilde{\Omega}$ konvex ist. Wir haben daher nur zu zeigen, dass Ω in $\widetilde{\Omega}$ enthalten ist. Sei dazu $x_0 \in \omega \setminus \widetilde{\omega}$. Da ω zusammenhängend ist, existiert ein Weg $\gamma\colon [0,1] \to \omega$ mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = x_0$. Sei $t_0 := \sup\{t \in [0,1] \colon \gamma([0,t]) \subseteq \widetilde{\omega}\}$ und $x_1 = \gamma(t_0)$. Aus der Offenheit von $\widetilde{\omega}$ folgt $x_1 \notin \widetilde{\omega}$, da sonst $t_0 = 1$ und $x_0 = x_1 \in \widetilde{\omega}$ wäre.

Sei ω_1 eine offene konvexe Umgebung von x_1 in ω. Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega})$ eine holomorphe Funktion, die in einer Nullumgebung mit f übereinstimmt. Wir betrachten nun die Menge F alle Elemente $s \in [0, t_0]$ für die f und $\widetilde{f}$ auf einer Umgebung der Menge $\gamma([0,s])$ übereinstimmen. Dann ist $F \subseteq [0,1]$ ein offenes Intervall, das die 0 enthält. Sei $s_0 := \sup F$. Gilt $s_0 < t_0$, so ist $\gamma(s_0) \in \widetilde{\omega}$. Ist U eine offene zusammenhängende Umgebung von $\gamma(s_0)$, die in $\Omega \cap \widetilde{\Omega}$ enthalten ist, so existiert ein $s_1 < s_0$ mit $s_1 \in F$ und $\gamma(s_1) \in U$. Also stimmen f und $\widetilde{f}$ auf einer Umgebung von $\gamma(s_1)$ und daher auf ganz U überein (Prinzip der analytischen Fortsetzung), im Widerspruch zur Definition von s_0. Also ist $s_0 = t_0$ und wir finden ein $s_1 < t_0$ mit $\gamma(s_1) \in \omega_1$. Wie oben folgt, dass f und $\widetilde{f}$ auf einer offenen Teilmenge von $\Omega_1 := \omega_1 + i\mathbb{R}^n$ übereinstimmen, folglich auch auf dem ganzen konvexen Gebiet $\Omega_1 \cap \widetilde{\Omega}$. Sie definieren daher eine holomorphe Fortsetzung von $\widetilde{f}$ auf $\Omega_1 \cup \widetilde{\Omega}$. Wegen (a) ist das maximale bzgl. x_1 sternförmige Gebiet, auf das sich alle holomorphen Funktionen von $\widetilde{\Omega} \cup \Omega_1$ fortsetzen lassen, konvex. Dieses Gebiet ist daher auch bzgl. 0 sternförmig, also wegen der Maximalität von $\widetilde{\Omega}$ in $\widetilde{\Omega}$ enthalten. Hieraus schließen wir $\Omega_1 \subseteq \widetilde{\Omega}$, im Widerspruch zur Wahl von x_1. Damit ist gezeigt, dass Ω in $\widetilde{\Omega}$ liegt, und folglich, dass sich jede holomorphe Funktion auf Ω auf $\mathrm{conv}(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$ fortsetzen lässt. ■

Folgerung II.4.9. *Ist $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ eine ganze Funktion, so sind die Zusammenhangskomponenten der Menge*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon (\forall y \in \mathbb{R}^n) f(x+iy) \neq 0\}^0$$

konvex.

Beweis. Ist ω eine Zusammenhangskomponente und $\Omega := \omega + i\mathbb{R}^n$, so hat die Funktion $\frac{1}{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ eine holomorphe Fortsetzung auf das Gebiet $\mathrm{conv}(\Omega)$. Daher kann f in diesem Gebiet keine Nullstellen haben und somit ist ω konvex.■

II.5. Holomorphiegebiete und Holomorphiekonvexität

Inzwischen haben wir mehrere Methoden gesehen, mit denen man Fragen der holomorphen Fortsetzung behandeln kann. Insbesondere haben wir Reinhardt-Gebiete genauer betrachtet. In diesem Abschnitt lernen wir nun diejenigen Gebiete in $\mathbb{C}^n$ kennen, die die natürlichen Gebiete für die Funktionentheorie von mehreren Veränderlichen sind: die Holomorphiegebiete. Wir werden sogleich sehen, dass konvexe Gebiete immer Holomorphiegebiete sind, und dass Reinhardt-Gebiete genau dann Holomorphiegebiete sind, wenn sie logarithmisch konvex und vollständig sind. Für allgemeine Gebiete werden wir eine intrinsische Charakterisierung der Eigenschaft, Holomorphiegebiet zu sein, kennenlernen, die auch im Kontext allgemeiner komplexer Mannigfaltigkeiten wichtig ist.

Definition II.5.1. Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *Holomorphiegebiet*, wenn keine zwei offenen Mengen Ω_1, Ω_2 in $\mathbb{C}^n$ mit den folgenden Eigenschaften existieren:

(1) $\emptyset \neq \Omega_1 \subseteq \Omega_2 \cap \Omega$.

(2) Ω_2 ist ein Gebiet und nicht in Ω enthalten.

(3) Zu jeder holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ existiert eine holomorphe Funktion $\widetilde{f} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ mit $\widetilde{f}|_{\Omega_1} = f|_{\Omega_1}$. ■

Anschaulich bedeutet die Bedingung in Definition II.5.1, dass es keinen Teil des Rands von Ω gibt, über den sich alle holomorphen Funktionen $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorph fortsetzen lassen. Existiert eine allgemeine Hartogsfigur mit $\widetilde{H} \subseteq \Omega$, $\widetilde{P} \not\subseteq \Omega$, so folgt aus Lemma II.2.9, dass die beiden Gebiete $\Omega_1 := \widetilde{H}$ und $\Omega_2 := \widetilde{P}$ die Bedingungen (1)-(3) aus Definition II.5.1 erfüllen, d.h. Ω ist kein Holomorphiegebiet. Man beachte, dass hieraus noch nicht folgt, dass sich jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ auf $\Omega \cup \widetilde{P}$ holomorph fortsetzen lässt, denn hierzu müßten wir noch wissen, dass $\widetilde{P} \cap \Omega$ zusammenhängend ist (siehe Hartogsscher Kontinuitätssatz II.2.10).

Satz II.5.2. *Jedes konvexe Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ist ein Holomorphiegebiet.*

Beweis. Sei $p \notin \Omega$. Da Ω konvex ist, finden wir mit dem Trennungssatz von Hahn–Banach ein reell lineares Funktional $\gamma\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ mit $\gamma(p) < \gamma(w)$ für alle $w \in \Omega$. Wir setzen γ durch

$$\widetilde{\gamma}(z) := \gamma(z) - i\gamma(iz)$$

zu einer komplex linearen Abbildung $\widetilde{\gamma}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ fort (nachrechnen!) und betrachten die holomorphe Funktion

$$f\colon \Omega \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{\widetilde{\gamma}(z) - \widetilde{\gamma}(p)}.$$

Wegen $\gamma(p) = \operatorname{Re}\widetilde{\gamma}(p) \neq \operatorname{Re}\widetilde{\gamma}(w) = \gamma(w)$ für alle $w \in \Omega$ ist f auf ganz Ω definiert. Es ist klar, dass f in p eine Singularität hat und daher nicht in den Punkt p fortgesetzt werden kann. Da $p \notin \Omega$ beliebig war, ist Ω ein Holomorphiegebiet. ■

Mit dem Satz von Bochner können wir sofort die Holomorphiegebiete unter den Röhrengebieten beschreiben:

Folgerung II.5.3. *Ein Röhrengebiet ist genau dann ein Holomorphiegebiet, wenn es konvex ist.*

Beweis. Wegen Satz II.5.2 haben wir nur zu zeigen, dass ein nichtkonvexes Gebiet Ω kein Holomorphiegebiet ist. Dazu setzen wir $\Omega_1 := \Omega$ und $\Omega_2 := \operatorname{conv}(\Omega)$. Aus dem Satz von Bochner II.4.8 folgt nun, dass die Bedingungen (1)-(3) aus Definition II.5.1 erfüllt sind. Also ist Ω kein Holomorphiegebiet. ■

Satz II.5.4. (Cartan*–Thullen) *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Holomorphiegebiet und $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$(\forall z \in K)|f(z)| \leq d_{\Omega^c}(z) \Rightarrow (\forall z \in \widehat{K}_\Omega)|f(z)| \leq d_{\Omega^c}(z).$$

Ist $f \equiv \operatorname{dist}(K, \Omega^c)$ konstant, so ergibt sich

$$\operatorname{dist}(K, \Omega^c) = \operatorname{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c)$$

und $\widehat{K}_\Omega$ ist kompakt.

Beweis. Sei $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ und $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit $|f(z)| \leq d_{\Omega^c}(z)$ für alle $z \in K$. Nach Lemma II.4.5 konvergiert die Taylorreihe von h für jedes $a \in \widehat{K}_\Omega$ auf der Menge

$$\Omega_2 := \{z \in \mathbb{C}^n \colon \|z - a\|_\infty < |f(a)|\},$$

* Henri Cartan (geb. 1904), frz. Math. in Lille, Strasbourg, Paris und Orsay. Er leistete wichtige Beiträge zu homologischer Algebra, algebraischer Topologie und der mehrdimensionalen Funktionentheorie. Mitglied der Bourbaki-Gruppe.

der $\|\cdot\|_\infty$-Kugel vom Radius $|f(a)|$ um a. Wir setzen $\Omega_1 := \Omega_2 \cap \Omega$. Zunächst wird durch die konvergente Taylorreihe von h auf Ω_2 eine holomorphe Funktion

$$\widehat{h}(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^\alpha h(a)}{\alpha!}(z-a)^\alpha$$

auf Ω_2 definiert (Lemma I.2.10), die auf Ω_1 mit h übereinstimmt. Da Ω nach Voraussetzung ein Holomorphiegebiet ist, folgt aus Definition II.5.1, dass Ω_2 in Ω enthalten ist, d.h. $|f(a)| \leq d_{\Omega^c}(a)$. Also gilt $|f(z)| \leq d_{\Omega^c}(z)$ für alle $z \in \widehat{K}_\Omega$.

Wenden wir dies auf die konstante Funktion $f = \mathrm{dist}(K, \Omega^c)$ an, so ergibt sich $d_{\Omega^c}(z) \geq \mathrm{dist}(K, \Omega^c)$ für alle $z \in \widehat{K}_\Omega$, also $\mathrm{dist}(K, \Omega^c) = \mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c)$. Damit ist $\overline{\widehat{K}_\Omega} \subseteq \Omega$. Da $\widehat{K}_\Omega$ beschränkt (Lemma II.4.4(a)) und in Ω abgeschlossen ist, folgt hieraus die Kompaktheit von $\widehat{K}_\Omega$. ■

Definition II.5.5. Eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ heißt *holomorphiekonvex*, wenn für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ die Holomorphiehülle $\widehat{K}_\Omega$ kompakt ist. ■

Da die Menge $\widehat{K}_\Omega$ beschränkt (Lemma II.4.5) und in Ω abgeschlossen ist, ist sie genau dann kompakt, wenn ihr Abschluß in $\mathbb{C}^n$ keine Randpunkte von Ω enthält, also ganz in Ω enthalten ist.

Theorem II.5.6. (Charakterisierung von Holomorphiegebieten) *Für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(1) *Ω ist ein Holomorphiegebiet.*

(2) *Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, so gilt für jede holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ die Beziehung*
$$\sup_{z \in K} \frac{|f(z)|}{d_{\Omega^c}(z)} = \sup_{z \in \widehat{K}_\Omega} \frac{|f(z)|}{d_{\Omega^c}(z)}.$$

(3) *Ω ist holomorphiekonvex.*

(4) *Es existiert eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, die sich nicht über Ω hinweg holomorph fortsetzen lässt, d.h. ist Ω_2 ein Gebiet, das Ω schneidet, und $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ eine holomorphe Funktion, die auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von $\Omega \cap \Omega_2$ mit f übereinstimmt, so ist $\Omega_2 \subseteq \Omega$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) folgt direkt aus dem Satz von Cartan–Thullen (Satz II.5.4).
(2) $\Rightarrow$ (3): Wir wenden (2) auf die konstante Funktion $f = 1$ an und erhalten

$$\frac{1}{\mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c)} = \sup_{z \in \widehat{K}_\Omega} \frac{1}{d_{\Omega^c}(z)} = \sup_{z \in K} \frac{1}{d_{\Omega^c}(z)} = \frac{1}{\mathrm{dist}(K, \Omega^c)} > 0.$$

Also ist die beschränkte Menge $\widehat{K}_\Omega$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}^n$ und somit kompakt.
(4) $\Rightarrow$ (1) folgt sofort aus Definition II.5.1, denn für jedes Paar von Gebieten, das die dort angegebenen Eigenschaften (1) und (3) hat, folgt aus (4) sofort $\Omega_2 \subseteq \Omega$.

(3) $\Rightarrow$ (4): Für eine Teilmenge $Q \subseteq \Omega$ schreiben wir einfacher $\widehat{Q} := \widehat{Q}_\Omega$, und für $z \in \Omega$ sei $P_z := \{w \in \Omega : \|z - w\|_\infty < d_{\Omega^c}(z)\}$ die größte $\| \cdot \|_\infty$-Kugel um z (ein Polyzylinder), die in Ω enthalten ist. Sei M eine abzählbare dichte Teilmenge von Ω. Wir betrachten eine Folge $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$, die jeden Punkt von M unendlich oft enthält. Weiter sei $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge kompakter Teilmengen von Ω, so dass für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ ein m mit $K \subseteq K_m$ existiert (Lemma I.3.11).

Da $\widehat{K}_m$ kompakt ist, gilt $\mathrm{dist}(\widehat{K}_m, \Omega^c) > 0$. Da andererseits $\mathrm{dist}(P_{w_m}, \Omega^c) = 0$ ist, existiert ein $z_m \in P_{w_m} \setminus \widehat{K}_m$. Also existiert eine holomorphe Funktion $f_m \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit

$$f_m(z_m) = 1 > \sup_{z\in K_m} |f_m(z)|.$$

Indem wir f_m durch eine ausreichend hohe Potenz von f_m ersetzen, dürfen wir sogar

$$\sup_{z\in K_m} |f_m(z)| < \frac{1}{2^m}$$

annehmen. Wir betrachten nun das Produkt

$$f := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - f_j)^j.$$

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und $z \in K_m$ haben wir

$$\sum_{j=m}^{\infty} j|f_j(z)| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{j}{2^j} < \infty.$$

Also konvergiert das Produkt auf jeder kompakten Teilmenge von Ω (jede solche ist ja in einem K_m enthalten) gleichmäßig gegen f (Aufgabe II.5.1). Nach dem Satz von Weierstraß ist f holomorph (Theorem I.3.13).

Da die Funktion $1 - f_j$ für $j \geq m$ auf der Menge K_m keine Nullstellen hat, gilt $f(z) = 0$ für $z \in K_m$ genau dann, wenn ein $j < m$ mit $f_j(z) = 1$ existiert. Da keine der Funktionen f_j konstant ist, ist zunächst $f_1^{-1}(1)$ eine Menge ohne innere Punkte. Nun ist f_2 auch auf der offenen Menge $\Omega \setminus f_1^{-1}(1)$ nicht konstant, sodass auch $f_1^{-1}(1) \cup f_2^{-1}(1)$ keine innere Punkte hat. Induktiv folgt, dass

$$\{z \in \Omega : (\exists j < m) f_j(z) = 1\} = \bigcup_{j=1}^{m-1} f_j^{-1}(1)$$

keine inneren Punkte hat, also nicht dicht ist. Also verschwindet f auf keiner der Mengen K_m, die innere Punkte hat (was wir o.B.d.A. annehmen dürfen). Insbesondere ist f nicht konstant 0 auf Ω, aber in jedem Punkt z_m verschwinden alle Ableitungen der Ordnung $< m$ (Produktregel).

Sei nun Ω_2 ein Gebiet, das Ω schneidet, und $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ eine holomorphe Funktion, die auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von $\Omega \cap \Omega_2$ mit f übereinstimmt. Wir nehmen an, dass Ω_2 nicht in Ω enthalten ist. Sei U eine

Zusammenhangskomponente von $\Omega_2 \cap \Omega$, auf der f und $\widehat{f}$ übereinstimmen (Prinzip der analytischen Fortsetzung). Dann ist U offen in $\mathbb{C}^n$ und nicht abgeschlossen in Ω_2, da Ω_2 zusammenhängend und nicht in Ω enthalten ist. Also enthält $\overline{U} \cap \Omega_2$ einen Randpunkt a von Ω.

Sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, dass

$$B_{2\varepsilon}(a) := \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\|_\infty < 2\varepsilon\} \subseteq \Omega_2$$

ist. Da M in Ω dicht ist, existiert ein m mit $w_m \in U$ und $\|w_m - a\|_\infty < \varepsilon$. Insbesondere ist dann $d_{\Omega^c}(w_m) < \varepsilon$ und folglich

$$\overline{P_{w_m}} \subseteq B_{2\varepsilon}(a).$$

Da f und $\widehat{f}$ auf einer Umgebung von w_m übereinstimmen, stimmen sie auch auf dem ganzen Polyzylinder P_{w_m} überein (Prinzip der analytischen Fortsetzung). Nach Voraussetzung existiert eine unendliche Menge $\{m_k : k \in \mathbb{N}\}$ mit $w_m = w_{m_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Für jedes k ist $z_{m_k} \in P_{w_m}$ ein Punkt, in dem die Funktion f, und damit auch $\widehat{f}$, eine Nullstelle hat, in der alle Ableitungen der Ordnung $< m_k$ verschwinden. Wegen der Kompaktheit von $\overline{P_{w_m}}$ existiert ein Häufungspunkt z der Folge $(z_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Wegen der Stetigkeit der Ableitungen von $\widehat{f}$ verschwinden nun alle Ableitungen von $\widehat{f}$ in dem Punkt z. Somit verschwindet $\widehat{f}$ auf einer Umgebung von z, also auch auf P_{w_m}, im Widerspruch dazu, dass f nicht verschwindet. Damit ist $\Omega_2 \subseteq \Omega$, und der Beweis ist vollständig. ■

Folgerung II.5.7. *Ist $(\Omega_j)_{j\in J}$ eine Familie von Holomorphiegebieten in $\mathbb{C}^n$ und Ω das Innere des Durchschnitts $\bigcap_{j\in J} \Omega_j$, so ist Ω holomorphiekonvex, also jede Zusammenhangskomponente ein Holomorphiegebiet.*

Beweis. Sei $K \subseteq \Omega$ kompakt. Dann ist für jedes $j \in J$

$$\mathrm{dist}(K, \Omega_j^c) \geq \mathrm{dist}(K, \Omega^c) > 0.$$

Aus $\widehat{K}_\Omega \subseteq \widehat{K}_{\Omega_j}$ und

$$\mathrm{dist}(K, \Omega_j^c) = \mathrm{dist}(\widehat{K}_{\Omega_j}, \Omega_j^c)$$

(Satz II.5.4 von Cartan-Thullen) folgt daher

$$\mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega_j^c) \geq \mathrm{dist}(\widehat{K}_{\Omega_j}, \Omega_j^c) = \mathrm{dist}(K, \Omega_j^c) \geq \mathrm{dist}(K, \Omega^c) > 0$$

für alle $j \in J$. Damit ist auch

$$\mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega^c) = \inf_{j\in J} \mathrm{dist}(\widehat{K}_\Omega, \Omega_j^c) \geq \mathrm{dist}(K, \Omega^c) > 0.$$

Also ist der Abschluß von $\widehat{K}_\Omega$ ganz in Ω enthalten und $\widehat{K}_\Omega$ daher kompakt. Aus Theorem II.5.6 folgt daher, dass Ω ein Holomorphiegebiet ist. ■

Folgerung II.5.8. *Ist Ω ein Holomorphiegebiet und sind $f_1, \ldots, f_k \in \mathcal{O}(\Omega)$, so ist*

$$\Omega_1 := \{z \in \Omega \colon (\forall j) f_j(z) \neq 0\}$$

ein Holomorphiegebiet.

Beweis. Sei $K \subseteq \Omega_1$ kompakt. Ist $\widehat{K}_{\Omega_1}$ nicht kompakt, so existiert eine Folge $k_n \in \widehat{K}_{\Omega_1}$ mit $k_n \to k \in \partial\Omega_1$. Wegen $\widehat{K}_{\Omega_1} \subseteq \widehat{K}_\Omega$ und der Kompaktheit von $\widehat{K}_\Omega$ ist $k \in \Omega$ somit $k \in \Omega \setminus \Omega_1$. Also existiert ein j mit $f_j(k) = 0$. Andererseits ist die Funktion $\frac{1}{f_j}$ auf Ω_1 holomorph, sodass

$$\frac{1}{|f_j(k_n)|} \leq \sup_{z \in K} \frac{1}{|f_j(z)|} < \infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ein Widerspruch zu $f_j(k_n) \to f_j(k) = 0$. ■

Holomorphiekonvexe Reinhardt-Gebiete

Definition II.5.9. Wir nennen eine offene $\mathbb{T}^n$-invariante Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ einen *vollständigen Bereich*, wenn für

$$J_\Omega := \{j \in \{1, \ldots, n\} \colon (\exists z \in \Omega) z_j = 0\}$$

aus $z \in \Omega$ und $w \in \mathbb{C}^n$ mit $w_j = z_j$ für $j \notin J_\Omega$ und $|w_j| \leq |z_j|$ für alle $j \in J_\Omega$ schon $w \in \Omega$ folgt, d.h. $\mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \Omega \subseteq \Omega$ (in der Terminologie von Theorem II.1.7). Einen zusammenhängenden vollständigen Bereich nennen wir auch *vollständiges Reinhardt-Gebiet.* ■

Lemma II.5.10. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein vollständiger Bereich. Dann gilt:*

(i) $\Omega^\times := \Omega \cap (\mathbb{C}^\times)^n$ *ist dicht in* Ω.

(ii) *Für* $J_\Omega = \{j \colon (\exists z \in \Omega) z_j = 0\}$ *gilt* $\Omega = \mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \Omega^\times$.

(iii) *Ist* $\Omega^\times$ *zusammenhängend, so auch* Ω.

Beweis. (i),(ii) Sei $z \in \Omega$ und $J_z := \{j \colon z_j = 0\}$ die Menge der Nullindizes von z. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \Omega$ von z von der Gestalt

$$U = \prod_{j \in J_z} K_{r_j}(0) \times \prod_{j \notin J_z} K(r_j, R_j)$$

mit $r_j < |z_j| < R_j$ für $j \notin J_z$. Da Ω ein vollständiger Bereich ist, folgt hieraus sofort $z \in \mathbb{P}^{J_z} \cdot \Omega^\times \subseteq \mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \Omega^\times$. Also gilt

$$\Omega = \mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \Omega^\times,$$

d.h. Ω ist durch $\Omega^\times$ und J_Ω eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $\Omega^\times$ dicht in Ω.

(iii) folgt aus (i) und der allgemeinen Tatsache, dass Abschlüsse zusammenhängender Teilmengen zusammenhängend sind. ■

Im Folgenden nennen wir ein vollständiges Reinhardt-Gebiet Ω *logarithmisch konvex*, wenn $\exp^{-1}(\Omega)$ konvex ist.

Lemma II.5.11. *Sei $L(Z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha Z^\alpha$ eine formale Laurentreihe und*

$$J_L := \{j \in \{1, \ldots, n\} : (\exists \alpha) c_\alpha \neq 0,\ \alpha_j < 0\}.$$

Wir betrachten den Konvergenzbereich

$$B := \Big\{ z \in \mathbb{C}^n \colon \big((\forall j \in J_L) z_j \neq 0, \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |c_\alpha||z^\alpha| < \infty \Big\}.$$

Dann ist das Innere B^0 ein vollständiges logarithmisch konvexes Reinhardt-Gebiet. Durch

$$f(z) := \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$$

für $z \in B$ wird auf B^0 eine holomorphe Funktion definiert.

Beweis. Es ist klar, dass B und damit auch B^0 unter dem Torus $\mathbb{T}^n$ invariant ist. Sei $J_B := J_{B^0} := \{j \colon (\exists z \in B^0) z_j = 0\}$. Dann ist $J_B \subseteq J_L$. Für jedes $j \in J_B$ gilt dann $c_\alpha = 0$ falls $\alpha_j < 0$. Ist jetzt $w \in \mathbb{C}^n$ und $z \in B$ mit $|w_j| \leq |z_j|$ für alle $j \in J_B$ und $z_j = w_j$ für $j \notin J_B$, so ist

$$\sum_\alpha |c_\alpha||w|^\alpha \leq \sum_\alpha |c_\alpha||z|^\alpha < \infty.$$

Also ist $\mathbb{P}^{J_B} \cdot B \subseteq B$, und hieraus schließt man leicht, dass auch $\mathbb{P}^{J_B} \cdot B^0 \subseteq B^0$ gilt (Nachweis!), d.h. B^0 ist ein vollständiger Bereich.

Die Laurentreihe von f konvergiert genau dann absolut in $\exp(z)$, wenn

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |c_\alpha| e^{\alpha_1 \operatorname{Re} z_1 + \ldots + \alpha_n \operatorname{Re} z_n} < \infty$$

gilt. Mit der Konvexität der Exponentialfunktion $\exp \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sieht man nun leicht ein, dass $\exp^{-1}(B)$ konvex ist (Übung). Also ist auch

$$\exp^{-1}(B^0) = \big(\exp^{-1}(B)\big)^0$$

konvex. Hierbei folgt obige Gleichheit aus der Tatsache, dass exp eine offene Abbildung ist (Nachweis!).

Insbesondere ist $(B^0)^\times := B^0 \cap (\mathbb{C}^\times)^n = \exp(\exp^{-1}(B^0))$, folglich B^0 zusammenhängend (Lemma II.5.10) und somit ein Reinhardt-Gebiet.

Wir definieren auf B eine Funktion durch

$$f(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha.$$

Wie in Abschnitt II.1 schreiben wir

$$f = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^n} f_\varepsilon \quad \text{mit} \quad f_\varepsilon(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} c_\alpha z^\alpha.$$

Um einzusehen, dass f auf B^0 holomorph ist, reicht es aus, dies für die einzelnen Summanden f_ε einzusehen. Hierzu beachten wir, dass nur dann in f_ε ein nichttrivialer Summand vorkommt, wenn für $\varepsilon_j = 1$ immer $z_j \neq 0$ gilt. Damit ist

$$z \mapsto f_\varepsilon(z_1^{1-2\varepsilon_1}, \ldots, z_n^{1-2\varepsilon_n}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon} c_\alpha z^{(\mathbf{1}-2\varepsilon)\alpha}$$

wegen $(\mathbf{1} - 2\varepsilon)\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{Z}^n_\varepsilon$ eine konvergente Potenzreihe auf B^0, also nach Lemma I.2.10 und Theorem I.2.14 holomorph. Folglich ist auch f_ε holomorph. ■

Lemma II.5.12. *Für $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist das Gebiet*

$$\Omega_{a,c} := \{z \in \mathbb{C}^n : (a_j < 0 \Rightarrow z_j \neq 0), |z_1|^{a_1} \cdots |z_n|^{a_n} < c\}$$

ein vollständiges logarithmisch konvexes Reinhardt-Gebiet.

Beweis. Da für jedes a die Funktion

$$f_a : \{z \in \mathbb{C}^n : (a_j < 0) \Rightarrow (z_j \neq 0)\} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto |z|^a = |z_1|^{a_1} \cdots |z_n|^{a_n}$$

stetig ist, ist jedes $\Omega_{a,c}$ eine offene $\mathbb{T}^n$-invariante Menge mit

$$\exp^{-1}(\Omega_{a,c}) = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n) < \log c\}.$$

Insbesondere ist $\exp^{-1}(\Omega_{a,c})$ konvex. Also ist

$$\Omega^\times_{a,c} = \Omega_{a,c} \cap (\mathbb{C}^\times)^n = \exp(\exp^{-1}(\Omega_{a,c}))$$

eine nichtleere zusammenhängende Menge.

Ist $z \in \Omega_{a,c}$ mit $z_j = 0$, so ist $a_j \geq 0$. Ist umgekehrt $a_j \geq 0$ und $z \in \Omega_{a,c}$, so ist auch

$$(z_1, \ldots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \ldots, z_n) \in \Omega_{a,c}.$$

Also ist

$$J_a := \{j : a_j \geq 0\} = \{j : (\exists z \in \Omega_{a,c}) z_j = 0\} = J_{\Omega_{a,c}}.$$

Damit sieht man ein, dass $\Omega_{a,c}$ ein vollständiger Bereich ist. Aus Lemma II.5.10 folgt schließlich, dass $\Omega_{a,c}$ zusammenhängend, also ein Reinhardt-Gebiet ist. ■

Lemma II.5.13. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein vollständiges logarithmisch konvexes Reinhardt-Gebiet. Dann ist*

$$\widetilde{\Omega} := \Big(\bigcap_{\Omega_{a,c} \supseteq \Omega} \Omega_{a,c} \Big)^0$$

ein vollständiges Reinhardt-Gebiet mit

$$\Omega \subseteq \widetilde{\Omega} \quad \textit{und} \quad \Omega^\times = (\widetilde{\Omega})^\times.$$

Weiter gilt für $J_\Omega := \{j \in \{1,\ldots,n\} \colon (\exists z \in \Omega) z_j = 0\}$

$$\Omega = \{z \in \widetilde{\Omega} \colon (\forall j \not\in J_\Omega) z_j \neq 0\}.$$

Beweis. Die Inklusion $\Omega \subseteq \widetilde{\Omega}$ ist trivial. Wir haben also $\widetilde{\Omega}^\times \subseteq \Omega$ zu zeigen. Da beide Mengen $\mathbb{T}^n$-invariant sind, reicht es Elemente $z \in \mathbb{C}^n$ mit $z = |z|$ zu betrachten. Sei also $z = |z| \in (\mathbb{C}^\times)^n \backslash \Omega$. Wir schreiben $z = \exp(w)$ mit $w \in \mathbb{R}^n$. Dann ist w nicht in der offenen konvexen Menge $\exp^{-1}(\Omega) \cap \mathbb{R}^n$ enthalten. Nach dem Hahn–Banachschen Trennungssatz existiert daher ein $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit

$$\log(c) := \sum_{j=1}^n a_j w_j > \sum_{j=1}^n a_j u_j$$

für alle $u \in \exp^{-1}(\Omega) \cap \mathbb{R}^n$. Damit ist

$$z \not\in \Omega_{a,c} \quad \text{und} \quad \Omega^\times \subseteq \Omega_{a,c}.$$

Für die offene $\mathbb{T}^n$-invariante Menge

$$\widetilde{\Omega} = \Big(\bigcap_{\Omega_{a,c} \supseteq \Omega} \Omega_{a,c} \Big)^0$$

gilt daher

$$(\widetilde{\Omega})^\times = \Omega^\times \quad \text{und} \quad \Omega \subseteq \widetilde{\Omega}.$$

Weiter ist $\widetilde{\Omega}$ ein $\mathbb{T}^n$-invarianter vollständiger Bereich, denn diese Eigenschaft erbt $\widetilde{\Omega}$ von den Gebieten $\Omega_{a,c}$.

Die Inklusion

$$\Omega \subseteq \{z \in \widetilde{\Omega} \colon (\forall j \not\in J_\Omega) z_j \neq 0\}$$

folgt aus der Definition von J_Ω. Ist umgekehrt $z \in \widetilde{\Omega}$ mit $J_z \subseteq J_\Omega$, d.h. $z_j \neq 0$ für $j \not\in J_\Omega$, so folgt aus dem Beweis von Lemma II.5.10:

$$z \in \mathbb{P}^{J_z} \cdot \widetilde{\Omega}^\times \subseteq \mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \widetilde{\Omega}^\times = \mathbb{P}^{J_\Omega} \cdot \Omega^\times = \Omega. \qquad \blacksquare$$

Theorem II.5.14. *Für ein Reinhardt-Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ sind äquivalent:*

(1) Ω *ist ein Holomorphiegebiet.*

(2) Ω *ist das Innere des Konvergenzbereichs einer formalen Laurentreihe* $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha Z^\alpha$.

(3) Ω *ist vollständig und logarithmisch konvex.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gemäß Theorem II.5.6(4). Nach Satz II.1.6 hat f eine in Ω konvergente Laurententwicklung

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha,$$

wobei $c_\alpha \neq 0$ und $\alpha_j < 0$ nur gilt, falls $j \not\in J_\Omega$ ist.

Sei Ω_2 das Innere des Konvergenzbereichs der Laurentreihe von f. Insbesondere ist dann $\Omega \subseteq \Omega_2$. Weiter ist Ω_2 nach Lemma II.5.11 zusammenhängend und die Funktion

$$z \mapsto \widehat{f}(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} c_\alpha z^\alpha$$

auf Ω_2 holomorph. Da $\widehat{f}$ eine holomorphe Fortsetzung von f ist, gilt $\Omega_2 \subseteq \Omega$ und damit Gleichheit.
(2) $\Rightarrow$ (3) folgt aus Lemma II.5.11.
(3) $\Rightarrow$ (1): Wir werden zeigen, dass die Gebiete $\Omega_{a,c}$ Holomorphiegebiete sind. Aus Folgerung II.5.7 folgt hieraus zunächst, dass

$$\widetilde{\Omega} := \Big(\bigcap_{\Omega \subseteq \Omega_{a,c}} \Omega_{a,c} \Big)^0$$

ein Holomorphiegebiet ist. Andererseits haben wir in Lemma II.5.13 gesehen, dass

$$\Omega = \{z \in \widetilde{\Omega} \colon (\forall j \notin J_\Omega) z_j \neq 0\},$$

sodass aus Folgerung II.5.8 folgt, dass Ω ein Holomorphiegebiet ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass die Gebiete $\Omega_{a,c}$ Holomorphiegebiete sind. Sei also o.B.d.A. $\Omega = \Omega_{a,c}$ für $c > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$ und $K \subseteq \Omega_{a,c}$ kompakt. Für jedes $p \in \Omega^\times$ ist die Menge

$$V_p := \{z \in \Omega \colon (a_j \geq 0 \Rightarrow |z_j| < |p_j|), (a_j < 0 \Rightarrow |z_j| > |p_j|)\}$$

offen, und man sieht leicht, dass jeder Punkt $z \in \Omega$ in einer dieser Mengen V_p liegt. Wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Menge $E \subseteq \Omega^\times$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{p \in E} V_p.$$

Ist nun $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ mit $\mathrm{sgn}(\alpha_j) = \mathrm{sgn}(a_j)$ für alle j, so gilt für jeden Punkt $z \in \widehat{K}_\Omega$:

$$|z^\alpha| \leq \sup\nolimits_{w \in K} |w^\alpha| \leq \sup\{|p^\alpha| \colon p \in E\}.$$

Ist nun $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ mit $\mathrm{sgn}(\alpha_j) = \mathrm{sgn}(a_j)$ für alle j, so exponentieren wir mit dem Hauptnenner der α_j und sehen, dass $|z|^\alpha \leq |p^\alpha|$ für alle $p \in E$ gilt. Lassen wir $\alpha \in \mathbb{Q}^n$ unter Beibehaltung der Vorzeichen gegen a gehen, so führt dies zu

$$f_a(z) = |z|^a \leq \sup\nolimits_{p \in E} f_a(p) < c.$$

Andererseits ist für $a_j < 0$ die Funktion $z \mapsto z_j^{-1}$ auf Ω holomorph. Damit sehen wir, dass der Abschluß der Menge $\widehat{K}_\Omega$ ganz in Ω enthalten ist, denn

$$\sup\nolimits_{z \in \widehat{K}_\Omega} |z_j^{-1}| = \sup\nolimits_{z \in K} |z_j^{-1}| < \infty.$$

Folglich ist $\widehat{K}_\Omega$ kompakt und nach Theorem II.5.6 ist Ω daher ein Holomorphiegebiet. ∎

Einschub über konvexe Mengen und Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass viele der Konstruktionen und Sätze aus diesem Kapitel ihre direkten, nicht evidenten, Entsprechungen für Gebiete in normierten Räumen haben. Der Begriff der Holomorphiekonvexität entspricht hierbei dem der Konvexität. Auf der Ebene der Funktionen zeigt sich hier der Begriff der lokal konvexen Funktion als zentral. Ihm entspricht im Bereich der Funktionentheorie das Konzept der plurisubharmonischen Funktion, das wir hier aus Zeitgründen leider nicht behandeln können.

In diesem Unterabschnitt sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und V^* der Dualraum, d.h. der Raum der stetigen linearen Funktionale auf V.

Wir betrachten eine zusammenhängende offene Teilmenge $\Omega \subset V$. Wir definieren

$$d_{\Omega^c} : V \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \inf\{\|x - y\| : y \in \Omega^c\}$$

und beachten, dass dies eine stetige nichtnegative Funktion ist, deren Nullstellenmenge Ω^c ist. Für eine Teilmenge $A \subseteq \Omega$ setzen wir

$$\mathrm{dist}(A, \Omega^c) := \inf_{a \in A} d_{\Omega^c}(a).$$

Für $v, w \in V$ schreiben wir

$$[v, w] := \{\lambda v + (1 - \lambda)w : \lambda \in [0, 1]\}$$

für deren Verbindungsstrecke.

Wir nennen eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ *lokal konvex*, wenn jeder Punkt $a \in \Omega$ eine konvexe Umgebung U hat, sodass $f|_U$ konvex ist. Die Menge der stetigen lokal konvexen Funktionen auf Ω bildet einen konvexen Kegel, den wir mit $\mathrm{Con}(\Omega)$ bezeichnen. (Ist V endlichdimensional, so kann man zeigen, dass jede lokal konvexe Funktion automatisch stetig ist! Nachweis als Übung!)

Lemma II.5.15. *Ist Ω konvex, so ist eine Funktion $f: \Omega \to \mathbb{R}$ genau dann lokal konvex, wenn f konvex ist.*

Beweis. Es reicht, die Behauptung für den Fall $\Omega =]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ zu zeigen, da in der Forderung der Konvexität der Funktion nur das Verhalten auf einem Intervall eingeht.

Für $\Omega =]a, b[$ ist die Behauptung leicht elementar zu verifizieren: Ist f lokal konvex und nicht konvex, so existieren zwei Punkte $x, y \in]a, b[$ und ein Punkt $z \in]x, y[$, sodass

$$f(z) > \frac{z - x}{y - x} f(x) + \frac{y - z}{y - x} f(y).$$

Wegen der Kompaktheit von $[x, y]$ finden wir nun eine Unterteilung

$$x_0 = x < x_1 < \ldots < x_j = z < \ldots < x_n = y,$$

sodass f auf jedem Intervall $[x_j, x_{j+1}]$ konvex ist. Hieraus folgt leicht, dass der Polygonzug, der die Punkte $\big(x_j, f(x_j)\big)$ verbindet, Graph einer konvexen Funktion g ist, für die $f \leq g$ gilt. Damit ist

$$f(z) = g(z) \leq \frac{z-x}{y-x}g(x) + \frac{y-z}{y-x}g(y) = \frac{z-x}{y-x}f(x) + \frac{y-z}{y-x}f(y),$$

im Widerspruch zur Wahl von x, y, z. ∎

Für eine Teilmenge $K \subseteq V$ definieren wir zunächst die *linearkonvexe Hülle*:

$$\widehat{K} := \{v \in V : (\forall f \in V^*) f(v) \leq \sup_{x \in K} f(x)\}.$$

Aus dem Trennungssatz von Hahn–Banach folgt direkt, dass

$$\widehat{K} = \overline{\mathrm{conv}(K)}$$

gilt, d.h. $\widehat{K}$ stimmt mit der abgeschlossenen konvexen Hülle von K überein.

Für $K \subseteq \Omega$ definieren wir nun analog zur Holomorphiehülle die *Konvexitätshülle von K bzgl. Ω* wie folgt:

$$\widehat{K}_\Omega := \{v \in \Omega : \big(\forall f \in \mathrm{Con}(\Omega)\big) f(v) \leq \sup_{x \in K} f(x)\}.$$

Da für jedes stetige lineare Funktional $f \in V^*$ die Funktion $f\,|_\Omega$ eine stetige lokal konvexe Funktion ist, gilt

$$\widehat{K}_\Omega \subseteq \widehat{K} \cap \Omega.$$

Wir wollen nun sehen, wie sich die Konvexität eines Gebietes $\Omega \subseteq V$ durch das Verhalten der Konvexitätshüllen von Teilmengen beschreiben lässt.

Lemma II.5.16. *Die Menge Ω ist genau dann konvex, wenn mit drei Punkten $x, y, z \in \Omega$, für die $[x, y] \cup [y, z] \subseteq \Omega$ gilt, auch das Dreieck* $\mathrm{conv}(x, y, z)$ *in Ω enthalten ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar.

Wir nehmen also an, sie sei erfüllt und zeigen, dass Ω konvex ist. Ist dies nicht der Fall, so existieren zwei Punkte $a, b \in \Omega$, deren Verbindungsstrecke $[a, b]$ nicht in Ω enthalten ist. Da Ω offen und zusammenhängend ist, existiert ein Polygonzug mit den Ecken

$$x_0 = a, x_1, \ldots, x_k = b,$$

sodass k minimal ist (Nachweis!). Dann ist $k > 1$, und da man x_1 nicht weglassen darf, ist $[x_0, x_2] \not\subseteq \Omega$. Dies steht wegen $[x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \subseteq \Omega$ im Widerspruch zur Annahme. ∎

Lemma II.5.17. *Ist Ω konvex, so ist $\frac{1}{d_{\Omega^c}}$ eine konvexe Funktion.*

Beweis. Sei B die offene Einheitskugel in V. Für $x, y \subset \Omega$ gilt dann

$$(x + d_{\Omega^c}(x)B) \cup (y + d_{\Omega^c}(y)B) \subseteq \Omega.$$

Für $\lambda \in]0,1[$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, und $v \in V$ mit

$$0 < \|v\| < s := \lambda d_{\Omega^c}(x) + (1-\lambda) d_{\Omega^c}(y)$$

sowie $v_0 := \frac{1}{s}v$ ist damit $\|v_0\| < 1$ und weiter

$$\begin{aligned} z + v &= \lambda x + (1-\lambda)y + \big(\lambda d_{\Omega^c}(x) + (1-\lambda)d_{\Omega^c}(y)\big)v_0 \\ &\in \lambda\big(x + d_{\Omega^c}(x)B\big) + (1-\lambda)\big(y + d_{\Omega^c}(y)B\big) \subseteq \Omega. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $d_{\Omega^c}(z) \geq \lambda d_{\Omega^c}(x) + (1-\lambda)d_{\Omega^c}(y)$. Aus der Konvexität und der Antitonie der Funktion $]0,\infty[\to \mathbb{R}, r \mapsto \frac{1}{r}$ folgt nun, dass $\frac{1}{d_{\Omega^c}}$ eine konvexe Funktion ist. ■

Theorem II.5.18. *Für ein Gebiet $\Omega \subseteq V$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.*

(1) *Ω ist konvex.*

(2) *Für jede Teilmenge $K \subseteq \Omega$ mit $\mathrm{dist}(K, \Omega^c) > 0$ ist $\widehat{K}_\Omega$ in V abgeschlossen.*

(3) *Für jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \Omega$ ist $\widehat{K}_\Omega$ in V abgeschlossen.*

(4) *Für jede dreielementige Teilmenge $K \subseteq \Omega$ ist $\widehat{K}_\Omega$ in V abgeschlossen.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Da Ω konvex ist, ist die Funktion $f := \frac{1}{d_{\Omega^c}}$ auf Ω nach Lemma II.5.17 konvex und stetig mit $f(x_n) \to \infty$ für $x_n \to x \in \partial\Omega$. Also ist für jedes $\delta > 0$ die Menge

$$f^{-1}(]-\infty, \delta])$$

eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V. Insbesondere ist

$$\widehat{K}_\Omega \subseteq \overline{\mathrm{conv}(K)} \subseteq f^{-1}(]-\infty, \mathrm{dist}(K, \Omega^c)^{-1}]).$$

Somit ist der Abschluß von $\widehat{K}_\Omega$ in Ω enthalten.

(2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) ist trivial.

(4) $\Rightarrow$ (1): Um zu zeigen, dass Ω konvex ist, haben wir wegen Lemma III.5.16 nachzuweisen, dass mit drei Punkten $x, y, z \in \Omega$, für die $[x,y] \cup [y,z] \subseteq \Omega$ gilt, auch das Dreieck $\mathrm{conv}(x,y,z)$ in Ω enthalten ist.

Wir betrachten nun die Mengen

$$\Delta_\varepsilon := \mathrm{conv}\{y, y + \varepsilon(x-y), y + \varepsilon(z-y)\}.$$

Da die konvexe Hülle dreier Elemente kompakt ist, sehen wir, dass die Menge

$$F := \{s \in [0,1] \colon \Delta_s \subseteq \Omega\}$$

in $[0,1]$ offen ist. Sei $s_0 := \sup F$.

Wir zeigen, dass für $s < s_0$ das Dreieck Δ_s für $K = \{x,y,z\}$ in $\widehat{K}_\Omega$ enthalten ist. Sei dazu $f \in \mathrm{Con}(\Omega)$. Dann ist f auf den Strecken $[x,y]$ und $[y,z]$ konvex und daher $[x,y] \cup [y,z] \subseteq \widehat{K}_\Omega$. Für $s < s_0$ folgt aus der Konvexität der Funktion f auf dem Dreieck

$$\Delta_s = \mathrm{conv}\{y, y + s(x-y), y + s(z-y)\}$$

daher $\Delta_s \subseteq \widehat{K}_\Omega$. Also ist Δ_{s_0} im Abschluß von $\widehat{K}_\Omega$ enthalten, also auch in Ω. Da F ein in $[0,1]$ offenes Intervall ist, erhalten wir $F = [0,1]$. ∎

Folgerung II.5.19. *Das Gebiet Ω ist genau dann konvex, wenn*

$$\frac{1}{d_{\Omega^c}} \colon \Omega \to \mathbb{R}$$

eine lokal konvexe Funktion ist.

Beweis. Wegen Lemma II.5.17 haben wir nur zu zeigen, dass aus der lokalen Konvexität von $f := \frac{1}{d_{\Omega^c}}$ die Konvexität von Ω folgt.

Seien dazu $x, y, z \in \Omega$ mit $[x,y] \cup [y,z] \subseteq \Omega$. Für $K := \{x,y,z\}$ gilt dann

$$\sup\nolimits_{z \in \widehat{K}_\Omega} f(z) \leq \sup\nolimits_{z \in K} f(z) = \max\{f(x), f(y), f(z)\} < \infty.$$

Also hat $\widehat{K}_\Omega$ keine Häufungspunkte im Rand von Ω, ist also in V abgeschlossen. Aus Theorem II.5.18 folgt nun, dass Ω konvex ist. ∎

Wir können sogar Theorem II.5.6(2) auf unsere Situation übertragen. Da Produkte konvexer Funktionen in der Regel nicht wieder konvex sind (das Produkt der Funktionen $f = -1$ und $h = \exp$ ist auf $\mathbb{R}$ nicht konvex), müssen wir uns tieferliegende Information verschaffen.

Lemma II.5.20. *Für ein konvexes Gebiet Ω ist die Funktion $\frac{1}{d_{\Omega^c}}$ logarithmisch konvex, d.h. $\log(\frac{1}{d_{\Omega^c}}) = -\log d_{\Omega^c}$ ist eine konvexe Funktion.*

Beweis. Wir verwenden den Satz von Hahn–Banach, um Ω als

$$\Omega = \bigcap_{\Omega_{f,c} \supseteq \Omega} \Omega_{f,c}$$

darzustellen, wobei $\Omega_{f,c} = \{v \in V \colon f(v) < c\}$ und $f \colon V \to \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional auf V ist. Nun ist

$$-\log d_{\Omega^c} = \sup\{-\log d_{\Omega_{f,c}} \colon \Omega_{f,c} \supseteq \Omega\}.$$

Es reicht also aus nachzuweisen, dass die Funktionen $-\log d_{\Omega_{f,c}}$ konvex sind. Man verifiziert nun, dass für $f \neq 0$ gilt

$$d_{\Omega_{f,c}}(v) = \frac{c - f(v)}{\|f\|} \qquad \text{für } v \in \Omega_{f,c}.$$

Für $v \in \Omega_{f,c}$ ist also

$$-\log d_{\Omega_{f,c}}(v) = -\log\big(c - f(v)\big) - \log\|f\|,$$

sodass die Konvexität dieser Funktion auf $\Omega_{f,c}$ aus der Konvexität der Funktion $x \mapsto -\log(-x)$ auf dem offenen Intervall $]-\infty, 0[$ folgt. ∎

Satz II.5.21. *Ist Ω ein konvexes Gebiet und $K \subseteq \Omega$, so gilt für jede logarithmisch konvexe Funktion $f\colon \Omega \to]0,\infty[$ das Maximumprinzip*

$$\sup_{z\in K} \frac{f(z)}{d_{\Omega^c}(z)} = \sup_{z\in \widehat{K}_\Omega} \frac{f(z)}{d_{\Omega^c}(z)} = \sup_{z\in \overline{\mathrm{conv}\, K}} \frac{f(z)}{d_{\Omega^c}(z)}.$$

Beweis. Aus Lemma II.5.20 folgt, dass $-\log d_{\Omega^c}$ eine konvexe Funktion ist. Damit ist auch $\log(\frac{f}{d_{\Omega^c}}) = \log f - \log d_{\Omega^c}$ eine konvexe Funktion. Die erste Gleichheit folgt damit aus der Definition von $\widehat{K}_\Omega$. Die zweite Gleichheit folgt aus der Konvexität der Funktion $\log(\frac{f}{d_{\Omega^c}})$. ■

Aufgabe II.5.1. Sei $\Omega := K_1(1) = \{z \in \mathbb{C}\colon |1-z| < 1\}$ die offene Kreisscheibe um 1 und

$$L(z) := \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

die Logarithmusfunktion auf Ω mit $L(1) = 0$. Zeige:

(1) Für jedes $r < 1$ existiert ein $C > 0$, sodass auf $K_r(1)$ die Abschätzung

$$|L(z)| \leq C|z-1|$$

gilt.

(2) Für $z, w \in K_1(1)$ ist

$$|1 - zw| \leq |1-z| + 2|1-w|.$$

(3) Für $z_1, \ldots, z_N \in K_1(1)$ ist

$$\Big|1 - \prod_{n=1}^N z_n\Big| \leq 2\sum_{n=1}^N |1-z_n|.$$

(4) Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\sum_n |z_n| < \frac{1}{6}$, so gilt

$$p_N := \prod_{n=1}^N (1+z_n) \in K_{\frac{1}{3}}(1)$$

für alle $N \in \mathbb{N}$.

(5) Für $z, w \in K_{\frac{1}{3}}(1)$ ist

$$zw \in K_1(1) \quad \text{mit} \quad L(zw) = L(z) + L(w).$$

Unter der Voraussetzungen von (4) ist also

$$L(p_N) = L\Big(\prod_{n=1}^N (1+z_n)\Big) = \sum_{n=1}^N L(1+z_n).$$

Schliesse hieraus, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+z_n) := \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}(1+z_n)$$

konvergiert.

(6) Ist X eine Menge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n\colon X\to\mathbb{C}$ mit $\sum_n |f_n|_\infty < \infty$, so konvergiert die Funktionenfolge

$$F_N := \prod_{n=1}^{N}(1+f_n)$$

gleichmäßig auf X gegen eine Funktion, die wir mit $\prod_{n=1}^{\infty} f_n$ bezeichnen. Hinweis: Betrachte ein $M\in\mathbb{N}$ mit $\sum_{n\geq M}|f_n|_\infty < \frac{1}{6}$. ■

Literatur zur Vorlesung Funktionentheorie

Zur Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher:

[GF76] Grauert, H., und K. Fritzsche, "Several Complex Variables," Springer Verlag, 1976.

[Hö73] Hörmander, L., "Complex Analysis in Several Variables," North-Holland, 1973.

[KK83] Kaup, L., und B. Kaup, "Holomorphic Functions of Several Variables," de Gruyter, Studies in Mathematics, 1983.

[Na71] Narasimhan, R., "Several Complex Variables," Univ. of Chicago Press, 1971.

Zur Funktionentheorie einer Veränderlicher:

[Re95] Remmert, R., „Funktionentheorie I, II", Springer Verlag, 1995 (Hier findet man besonders viele historische Randbemerkungen; sehr ausführlich und schön zu lesen).

[Co73] Conway, John B., "Functions of One Complex Variable I, II," Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 1973.

Mehr zu analytischen Funktionen:

[Se92] Serre, J. P., "Lie algebras and Lie groups," Lecture Notes in Mathematics **1500**, Springer Verlag, Berlin, 1992.

Reelle Analysis im $\mathbb{R}^n$:

[Br95] Bröcker, Th., „Analysis II", Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

Weiterführende Literatur

[GR77] Grauert, H., und R. Remmert, „Theorie der Steinschen Räume", Springer Verlag, 1977.