

# Skript zur Vorlesung Spektral- und Darstellungstheorie

SS 96 an der Universität Erlangen-Nürnberg

**Karl – Hermann Neeb**

## Inhalt

I. Grundlegende Konzepte .....	1
I.1. Hilberträume .....	1
I.2. Operatoren auf Hilberträumen .....	5
I.3. Involutive Halbgruppen und ihre Darstellungen .....	10
Zerlegung von Darstellungen .....	12
I.4. Der endlichdimensionale Fall .....	14
II. Spektraltheorie in Banachalgebren .....	17
II.1. Definitionen und Beispiele .....	17
II.2. Spektraltheorie in Banachalgebren .....	23
Das fehlende Einselement .....	24
Elementare Eigenschaften des Spektrums .....	26
Anwendungen des Hauptsatzes über das Spektrum .....	30
II.3. Die Gelfandsche Darstellungstheorie .....	34
Kommutative $C^*$ -Algebren .....	40
Stetiger Funktionalkalkül für normale Operatoren .....	42
Das Schursche Lemma .....	43
III. Positivität in $C^*$ -Algebren und Maßtheorie .....	47
III.1. Reproduzierende Kerne .....	47
Hilberträume mit reproduzierenden Kernen .....	47
III.2. Zustände und positive Funktionale .....	50
Positive Elemente .....	50
Positive Funktionale .....	51
Zustände .....	53
Die Gelfand-Neimark-Segal (GNS)-Konstruktion .....	55
III.3. $\sigma$ -Algebren und Maße .....	58
Stufenfunktionen .....	60
Maße .....	61
Integration positiver Funktionen .....	62
Integration komplexwertiger Funktionen .....	65
Der Rieszsche Darstellungssatz .....	68
III.4. Spektralmaße .....	70
Spektralsätze für beschränkte normale Operatoren .....	76
Darstellungen der Gruppe $\mathbb{R}$ .....	79
III.5. Unbeschränkte Operatoren .....	81
Die Cayley-Transformation .....	84
Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren .....	85

Der Satz von Stone .....	87
IV. Operatoren auf Hilberträumen .....	88
III.1. Kompakte Operatoren .....	88
Approximation mit Operatoren endlichen Ranges .....	90
III.2. Hilbert-Schmidt-Operatoren .....	91
III.3. Spurklasse-Operatoren .....	92

# Spektral- und Darstellungstheorie

## I. Grundlegende Konzepte

### I.1. Hilberträume

Da wir uns in dieser Vorlesung fast ausschließlich mit Operatoren auf komplexen Hilberträumen beschäftigen werden, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung der grundlegenden Begriffe.

**Definition I.1.1.** Sei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Vektorraum.

(a) Eine Abbildung  $b: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

- (1) *sesquilinear*, wenn die Abbildungen  $x \mapsto b(x, y)$ ,  $y \in \mathcal{H}$ , linear sind, und die Abbildungen  $x \mapsto b(y, x)$ ,  $y \in \mathcal{H}$ , antilinear, d.h.  $b(y, \lambda a + b) = \bar{\lambda}b(y, a) + b(y, b)$  für  $a, b \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .
- (2) *hermitesch*, wenn sie sesquilinear ist und zusätzlich  $b(y, x) = \overline{b(x, y)}$  für alle  $x, y \in \mathcal{H}$  gilt.
- (3) *positiv semidefinit*, wenn sie hermitesch ist und zusätzlich  $b(x, x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt.
- (4) *positiv definit*, wenn sie hermitesch ist und zusätzlich  $b(x, x) > 0$  für alle  $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$  gilt.

In diesem Fall nennt man  $b$  auch ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{H}$ .

(b) Ein komplexer *Prä-Hilbertraum*  $\mathcal{H}$  ist ein komplexer Vektorraum, der mit einer positiv definiten hermiteschen Form (Skalarprodukt)  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$  versehen ist.

(c) Zwei Elemente eines Prä-Hilbertraums  $\mathcal{H}$  heißen *orthogonal*, wenn  $\langle x, y \rangle = 0$  ist. Wir beachten, daß dies wegen der Hermitizität eine symmetrische Relation ist. Für eine Teilmenge  $E \subseteq \mathcal{H}$  schreiben wir

$$E^\perp := \{y \in \mathcal{H}: (\forall x \in E) \langle x, y \rangle = 0\}. \quad \blacksquare$$

**Lemma I.1.2.** Sei  $b$  eine hermitesche Form auf dem komplexen Vektorraum  $\mathcal{H}$ .

(i) Ist  $b$  positiv semidefinit, so gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x)b(y, y)$$

für  $x, y \in \mathcal{H}$ .

(ii)  $b(x, y) = \frac{1}{4}(b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y) + ib(x + iy, x + iy) - ib(x - iy, x - iy))$   
(Polarisierungsidentität). ■

Als wichtige Folgerung aus Lemma I.1.2 haben wir:

**Satz I.1.3.** (P. Jordan, J. v. Neumann) Ist  $\mathcal{H}$  ein Prä-Hilbertraum, so wird durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  eine Norm auf  $\mathcal{H}$  definiert, die der Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

für alle  $x, y \in \mathcal{H}$  genügt. Ist umgekehrt  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathcal{H}$ , die der Parallelogrammgleichung genügt, so wird  $\mathcal{H}$  durch

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

zu einem Prä-Hilbertraum. ■

**Definition I.1.4.** Ein Hilbertraum ist ein Prä-Hilbertraum, der bzgl. der durch  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  gegebenen Norm vollständig ist. Ein Hilbertraum ist, also insbesondere ein Banachraum. ■

**Satz I.1.5.** Ist  $\mathcal{H}$  ein Prä-Hilbertraum und  $\widehat{\mathcal{H}}$  dessen Vervollständigung als metrischer Raum, so ist  $\widehat{\mathcal{H}}$  ein Hilbertraum bzgl. der stetigen Fortsetzung des Skalarprodukts zu einer Funktion  $\widehat{\mathcal{H}} \times \widehat{\mathcal{H}} \rightarrow \mathbb{C}$ . ■

**Beispiel I.1.6.** (a) Der Raum  $\mathbb{C}^n$  ist ein Hilbertraum bzgl.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}.$$

(b) Der Raum  $l^2$  ist ein Hilbertraum bzgl.  $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$ .

(c) Der Raum  $C([a, b])$  ist ein Prä-Hilbertraum bzgl.  $\langle f, h \rangle := \int_a^b f(x) \overline{h(x)} dx$ . Die zugehörige Vervollständigung heißt  $L^2([a, b])$ . ■

Der folgende Satz enthält die wichtigsten Informationen über orthogonale Unterräume.

**Satz I.1.7.** (a) Ist  $F$  ein abgeschlossener Untervektorraum des Hilbertraums  $\mathcal{H}$ , so ist  $\mathcal{H} = F \oplus F^\perp$ , d.h.  $\mathcal{H}$  ist die orthogonale direkte Summe der abgeschlossenen Unterräume  $F$  und  $F^\perp$ .

(b) Ist  $E$  eine Teilmenge des Hilbertraums  $\mathcal{H}$ , so gilt

$$(E^\perp)^\perp = \overline{\text{span } E}.$$

Insbesondere gilt  $E = (E^\perp)^\perp$  genau dann, wenn  $E$  ein abgeschlossener Untervektorraum ist. ■

**Definition I.1.8.** Ist  $E \subseteq \mathcal{H}$  ein abgeschlossener Unterraum und  $P_E : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  die Abbildung mit  $P_E(x) = x_E$ , wobei  $x = x_E + x_{E^\perp}$  mit  $x_E \in E$  und  $x_{E^\perp} \in E^\perp$ , so heißt  $P_E$  die Orthogonalprojektion auf  $E$ . ■

**Satz I.1.9.** (Fréchet-Rieszscher Darstellungssatz für Hilberträume) Ist  $\mathcal{H}'$  der Dualraum des Hilbertraums  $\mathcal{H}$ , so ist die Abbildung

$$\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}' \quad \text{mit} \quad \Phi(x)(y) := \langle y, x \rangle$$

eine antilineare isometrische Bijektion, insbesondere läßt sich jedes stetige lineare Funktional auf  $\mathcal{H}$  darstellen als  $y \mapsto \langle y, x \rangle$  für ein  $x \in \mathcal{H}$  und es gilt

$$\|x\| = \|\Phi(x)\| = \sup\{|\langle y, x \rangle| : y \in \mathcal{H}, \|y\| \leq 1\} = \sup\{|\langle x, y \rangle| : y \in \mathcal{H}, \|y\| \leq 1\}. \quad \blacksquare$$

Für spätere Anwendungen in der Darstellungstheorie führen wir hier das Konzept der direkten Summe einer Familie von Hilberträumen ein. Hierzu erinnern wir uns zunächst an das etwas subtile Konzept der Summierbarkeit.

**Definition I.1.10.** Sei  $X$  ein topologischer Vektorraum und  $(x_j)_{j \in J}$  eine Familie von Elementen, d.h.  $x: J \rightarrow X, j \mapsto x_j$  ist eine Funktion. Die Familie  $(x_j)_{j \in J}$  heißt *summierbar*, wenn das Netz der endlichen Teilsommen konvergiert. Etwas präziser bedeutet das, daß wir die Menge  $I := \{F \subseteq J: |F| < \infty\}$  mittels der Mengeninklusion zu einer gerichteten Menge machen, so daß die Zuordnung  $F \mapsto \sum_{j \in F} x_j$  als ein Netz in  $X$  aufzufassen ist, das wir das *Netz der endlichen Teilsommen* nennen. Existiert der Grenzwert dieses Netzes, so bezeichnen wir ihn mit  $\sum_{j \in J} x_j$ .

Die Familie  $(x_j)_{j \in J}$  ist also genau dann summierbar, wenn ein  $s \in X$  existiert, so daß es zu jeder Umgebung  $U$  von  $s$  eine endliche Teilmenge  $F_U \subseteq J$  gibt mit

$$\sum_{j \in F} x_j \in U,$$

falls  $F \supseteq F_U$  ist. Man beachte, daß man für  $J = \mathbb{N}$  **nicht** den üblichen Begriff einer konvergenten Reihe erhält, sondern einen stärkeren Konvergenzbegriff, der insbesondere gegenüber Umordnungen stabil ist.

Sind die  $x_j \in \mathbb{R}^+$ , so bedeutet die Summierbarkeit von  $(x_j)_{j \in J}$ , daß das Supremum aller endlichen Teilsommen endlich ist, d.h.

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n x_{j_k} : j_k \in J; k = 1, \dots, n; n \in \mathbb{N} \right\} < \infty. \quad \blacksquare$$

**Lemma I.1.11.** Sei  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$  eine Familie von Hilberträumen und

$$\mathcal{H} := \left\{ (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathcal{H}_j : \sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < \infty \right\}.$$

Dann ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_j)_{j \in J}, (y_j)_{j \in J} \rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle.$$

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß  $\mathcal{H}$  ein Untervektorraum von  $\prod_{j \in J} \mathcal{H}_j$  ist. Die Invarianz unter Skalarmultiplikation ist klar. Für zwei Elemente  $a, b \in \mathcal{H}_j$  folgt aus der Parallelogrammgleichung

$$\|a + b\|^2 \leq 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

und für  $x = (x_j)_{j \in J}, y = (y_j)_{j \in J} \in \mathcal{H}$  damit

$$\sum_{j \in J} \|x_j + y_j\|^2 \leq 2 \sum_{j \in J} \|x_j\|^2 + 2 \sum_{j \in J} \|y_j\|^2 < \infty.$$

Also ist  $x + y \in \mathcal{H}$ , und somit  $\mathcal{H}$  ein Vektorraum.

Für  $x, y \in \mathcal{H}$  folgt aus der Polarisierungsidentität und  $x \pm y, x \pm iy \in \mathcal{H}$ , daß

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x_j, y_j \rangle$$

existiert. Daß hierdurch eine positiv definite hermitesche Form definiert wird, ist eine einfache Rechnung.

Wir zeigen noch die Vollständigkeit von  $\mathcal{H}$ . Hierzu geht man im Prinzip vor wie bei dem Raum  $l^2$ . Sei  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge. Dann ist  $(x_j^n)_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $j \in J$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{H}_j$  und aus der Vollständigkeit der Räume  $\mathcal{H}_j$  erhalten wir für jedes  $j \in J$  ein Element  $x_j$  mit  $x_j^n \rightarrow x_j$ . Für jede endliche Teilmenge  $J_0 \subseteq J$  ist dann

$$\sum_{j \in J_0} \|x_j\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_0} \|x_j^n\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in J} \|x_j^n\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^2.$$

Hieraus folgt  $x = (x_j)_{j \in J} \in \mathcal{H}$  mit

$$\|x\|^2 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^2.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $x^n \rightarrow x$  in  $\mathcal{H}$  gilt. Sei dazu  $\varepsilon > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\|x^n - x^m\| \leq \varepsilon$  für  $n, m \geq n_0$ . Für eine endliche Teilmenge  $J_0 \subseteq J$  gilt dann

$$\sum_{j \in J_0} \|x_j - x_j^n\|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j \in J_0} \|x_j^m - x_j^n\|^2 \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|x^m - x^n\|^2 \leq \varepsilon^2$$

für  $n \geq n_0$ . Also ist auch

$$\|x - x^n\|^2 = \sup_{J_0 \subseteq J} \sum_{j \in J_0} \|x_j - x_j^n\|^2 \leq \varepsilon.$$

Hieraus folgt  $x^n \rightarrow x$ , und somit die Vollständigkeit von  $\mathcal{H}$ . ■

**Definition I.1.12.** Für eine Familie  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$  von Hilberträumen definieren wir

$$\widehat{\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j} := \left\{ (x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} \mathcal{H}_j : \sum_{j \in J} \|x_j\|^2 < \infty \right\}$$

mit der Hilbertraumstruktur aus Lemma I.1.11. Wir nennen diesen Raum die *direkte Hilbert-raumsumme* der  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ . Dieser Raum ist natürlich nicht die direkte Vektorraumsumme der Unterräume

$$\mathcal{H}_i \cong \{(x_j)_{j \in J} : (\forall j \neq i) x_j = 0\},$$

aber die Summe  $\sum_{j \in J} \mathcal{H}_j$  dieser Unterräume ist direkt und dicht in  $\mathcal{H}$  (Übung). Weiter sind all diese Unterräume paarweise orthogonal zueinander. Man beachte, daß die Forderung der Summierbarkeit von  $(\|x_j\|^2)_{j \in J}$  insbesondere zur Folge hat, daß nur abzählbar viele  $x_j$  von 0 verschieden sind, auch wenn die Indexmenge  $J$  überabzählbar ist. ■

**Satz I.1.13.** Sei  $J$  eine Menge und  $\mathbb{C}^J$  die Menge der Funktionen  $x: J \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto x_j$ .

(i) Der Raum

$$l^2(J) := \left\{ x \in \mathbb{C}^J : \sum_{j \in J} |x_j|^2 < \infty \right\}$$

ist ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} x_j \overline{y_j} \quad \text{und} \quad \|x\|_2^2 := \sum_{j \in J} |x_j|^2.$$

(ii) Der Raum

$$l^1(J) := \left\{ x \in \mathbb{C}^J : \sum_{j \in J} |x_j| < \infty \right\}$$

ist ein Banachraum bzgl. der Norm  $\|x\|_1 := \sum_{j \in J} |x_j|$ .

**Beweis.** (i) Das ist ein Spezialfall von Lemma I.1.11, wo  $\mathcal{H}_j = \mathbb{C}$  für alle  $j \in J$  gilt.

(ii) Der Beweis verläuft vollkommen analog zu dem von Lemma I.1.11. ■

**Bemerkung I.1.14.** Für  $J = \{1, \dots, n\}$  haben wir  $l^2(J) \cong \mathbb{C}^n$  und für  $J = \mathbb{N}$  ist  $l^2(J) \cong l^2$ . ■

Wir wiederholen nun noch die wesentlichen Fakten über Orthonormalbasen eines Hilbert-raums aus der Funktionalanalysis.

**Lemma I.1.15.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $(x_j)_{j \in J}$  eine orthogonale Familie in  $\mathcal{H}$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $(x_j)_{j \in J}$  ist summierbar in  $\mathcal{H}$ .
- (2)  $(\|x_j\|^2)_{j \in J}$  ist summierbar in  $\mathbb{R}$ .

Ist dies der Fall, so ist

$$\left\| \sum_{j \in J} x_j \right\|^2 = \sum_{j \in J} \|x_j\|^2$$

und die Menge  $\{j \in J : x_j \neq 0\}$  ist abzählbar. ■

**Satz I.1.16.** Sei  $(x_j)_{j \in J}$  eine orthonormale Familie im Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , d.h.  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ . Dann gilt

- (1)  $(\forall x \in \mathcal{H}) \sum_{j \in J} |\langle x_j, x \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  (Besselsche Ungleichung).
- (2)  $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$  genau dann, wenn  $\sum_{j \in J} |\langle x, x_j \rangle|^2 = \|x\|^2$  (Parsevalsche Gleichung). ■

**Definition I.1.17.** Eine Teilmenge  $B$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  heißt *total*, wenn  $\text{span } B$  ein dichter Unterraum ist. Die Menge  $B$  heißt *Orthonormalbasis* (kurz ONB), wenn sie orthonormal und total ist. ■

**Satz I.1.18.** Für eine orthonormale Teilmenge  $B = \{x_j : j \in J\}$  eines Hilbertraums  $\mathcal{H}$  sind äquivalent:

- (1)  $B$  ist eine ONB.
- (2)  $B$  ist maximal orthogonal.
- (3) Gilt  $\langle x, x_j \rangle = 0$  für alle  $j \in J$ , so ist  $x = 0$ .
- (4) Für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt  $x = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle x_j$  (Fourierentwicklung).
- (5) Für  $x, y \in \mathcal{H}$  gilt  $\langle x, y \rangle = \sum_{j \in J} \langle x, x_j \rangle \langle x_j, y \rangle$ .
- (6) Für alle  $x \in \mathcal{H}$  gilt  $\|x\|^2 = \sum_{j \in J} |\langle x, x_j \rangle|^2$  (Parsevalsche Gleichung). ■

**Satz I.1.19.** Jeder Hilbertraum hat eine ONB. Zu jeder orthonormalen Teilmenge existiert sogar eine ONB, die sie enthält. ■

**Bemerkung I.1.20.** Aus Satz I.1.19 und Satz I.1.18(4),(6) sieht man, daß jede ONB  $(x_j)_{j \in J}$  einen Isomorphismus  $\mathcal{H} \cong \ell^2(J)$  liefert. ■

## I.2. Operatoren auf Hilberträumen

Soviel zur Wiederholung der wichtigsten Begriffe und Fakten aus dem Bereich der Hilberträume. In diesem Abschnitt werden wir versuchen, die wichtigsten Fragen der Spektraltheorie zu präzisieren. Das wesentliche Phänomen, das die Theorie der Operatoren auf einem Hilbertraum auszeichnet, ist das Vorhandensein einer Involution  $A \mapsto A^*$ . Im wesentlichen beruhen fast alle tieferen Aussagen der Spektraltheorie auf diesem Sachverhalt.

Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  Hilberträume, sowie  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  eine stetige lineare Abbildung. Wir erinnern uns daran, daß man die Stetigkeit durch die Endlichkeit der *Operatornorm*

$$\|A\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|A.x\|$$

charakterisieren konnte. Das ist die kleinste Zahl  $C$  mit

$$\|A.x\| \leq C\|x\|$$

für alle  $x \in \mathcal{H}_1$ . Man nennt daher stetige Operatoren auch *beschränkt*. Wir schreiben  $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  für die Menge der beschränkten Operatoren von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  und  $B(\mathcal{H}) := B(\mathcal{H}, \mathcal{H})$ .

Wir haben in der Funktionalanalysis gesehen, daß man zu jedem stetigen Operator  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  einen stetigen Operator

$$A': \mathcal{H}'_2 \rightarrow \mathcal{H}'_1, \quad f \mapsto f \circ A$$

erhält für den zusätzlich

$$\|A'\| = \|A\|$$

gilt (vgl. [Ne96, Satz V.2.5]). Sind nun  $\Phi_1: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}'_1$  und  $\Phi_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}'_2$  die antilinearen Isomorphismen aus dem Fréchet-Rieszischen Darstellungssatz, so definieren wir den *adjungierten Operator*

$$A^* := \Phi_1^{-1} \circ A' \circ \Phi_2: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1.$$

Da sowohl  $\Phi_1$  als auch  $\Phi_2$  antilineare Isometrien sind, ist  $A^*$  wieder linear und es gilt  $\|A^*\| = \|A'\| = \|A\|$ . Wir haben also ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{A^*} & \mathcal{H}_1 \\ \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Phi_1 \\ \mathcal{H}'_2 & \xrightarrow{A'} & \mathcal{H}'_1. \end{array}$$

Für  $x \in \mathcal{H}_1$  und  $y \in \mathcal{H}_2$  ist dann

$$(2.1) \quad \langle A.x, y \rangle = \Phi_2(y)(A.x) = (A'\Phi_2(y))(x) = (\Phi_1 A^*(y))(x) = \langle x, A^*.y \rangle.$$

Direkter kann man die Existenz von  $A^*$  auch so sehen: Für jedes  $y \in \mathcal{H}_2$  ist das lineare Funktional  $\mathcal{H}_1 \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \langle A.x, y \rangle$  stetig, kann nach dem Fréchet-Rieszischen Satz also durch ein Element  $A^*.y \in \mathcal{H}_1$  dargestellt werden.

**Satz I.2.1.** *Für zwei Hilberträume  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  ist die Abbildung*

$$B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1), \quad A \mapsto A^*$$

eine antilineare Isometrie bzgl. der Operatornorm. Weiter gilt für  $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  und  $B \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ :

- (i)  $A^*$  ist eindeutig bestimmt durch  $\langle A.x, y \rangle = \langle x, A^*.y \rangle$  für  $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ .
- (ii)  $(BA)^* = A^*B^*$ .
- (iii)  $(A^*)^* = A$ .
- (iv)  $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$ .

**Beweis.** (i) Gilt  $\langle A.x, y \rangle = \langle x, z \rangle$  für alle  $x \in \mathcal{H}_1$ , so ist  $A^*.y - z \in \mathcal{H}_1^\perp = \{0\}$ , also  $z = A^*.y$ .  
(ii) Wegen (i) folgt dies aus

$$\langle BA.x, z \rangle = \langle A.x, B^*.z \rangle = \langle x, A^*B^*.z \rangle$$

für  $x \in \mathcal{H}_1, z \in \mathcal{H}_3$ .

(iii) Wir haben

$$\langle A.x, y \rangle = \langle x, A^*.y \rangle = \overline{\langle A^*.y, x \rangle} = \overline{\langle y, (A^*)^*.x \rangle} = \langle (A^*)^*.x, y \rangle$$

für alle  $x \in \mathcal{H}_1$  und  $y \in \mathcal{H}_2$ , also  $A.x = (A^*)^*.x$  für alle  $x \in \mathcal{H}_1$  und damit (iii).

(iv) Für  $x \in \mathcal{H}_1$  ist

$$\|A.x\|^2 = \langle A.x, A.x \rangle = \langle A^*A.x, x \rangle \leq \|A^*A.x\| \cdot \|x\| \leq \|A^*A\| \cdot \|x\|^2,$$

also

$$\|A\|^2 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A.x\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2.$$

Damit ist auch

$$\|A\|^2 = \|A^*\|^2 = \|(A^*)^*A^*\| = \|AA^*\|. \quad \blacksquare$$



**Korollar I.2.2.** Für einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  ist die Abbildung

$$B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H}), \quad A \mapsto A^*$$

eine antilineare Isometrie mit

$$(BA)^* = A^*B^*, \quad (A^*)^* = A \quad \text{und} \quad \|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2. \quad \blacksquare$$

Der Kernpunkt der Spektraltheorie von Operatoren auf Hilberträumen ist nun die Tatsache, daß man für  $A \in B(\mathcal{H})$  beim Übergang zum adjungierten Operator den Raum  $B(\mathcal{H})$  nicht verläßt und so die Operatoren  $A$  und  $A^*$  zueinander in Beziehungen setzen kann. Entsprechend kann man nun verschiedene Typen von Operatoren unterscheiden:

**Definition I.2.3.** Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  Hilberträume und  $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ .

(a)  $A$  heißt *unitär*, falls  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$  und  $AA^* = \text{id}_{\mathcal{H}_2}$ .

Sei jetzt  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ .

(b)  $A$  heißt *selbstadjungiert* oder *hermitesch*, falls  $A^* = A$ . Er heißt *schiefhermitesch*, falls  $A^* = -A$ .

(c)  $A$  heißt *normal*, falls  $AA^* = A^*A$  gilt. ■

Wir schauen uns diese Eigenschaften noch etwas genauer an.

**Satz I.2.4.** Für einen Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  gilt:

- (i) Ist  $A$  hermitesch, so ist  $A$  normal.
- (ii) Die Operatoren  $AA^*$  und  $A^*A$  sind hermitesch.
- (iii) Es gibt eindeutig bestimmte hermitesche Operatoren  $B, C$  mit  $A = B + iC$ .
- (iv)  $A$  ist eindeutig bestimmt durch die Sesquilinearform

$$b_A: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto \langle A.x, y \rangle.$$

(v) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) Die Form  $b_A$  ist hermitesch.
- (b)  $A$  ist hermitesch.
- (c)  $b_A(x, x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ .

In diesem Fall ist  $A$  schon durch die Werte  $b_A(x, x)$ ,  $x \in \mathcal{H}$  eindeutig bestimmt.

(vi) Ist  $A$  hermitesch und  $\langle A.x, x \rangle = 0$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ , so ist  $A = 0$ .

**Beweis.** (i) trivial.

(ii) Das folgt aus  $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$  und  $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$ .

(iii) Das folgt sofort mit  $B := \frac{1}{2}(A + A^*)$  und  $C := \frac{1}{2i}(A - A^*)$ . Da diese Formel für jede Zerlegung  $A = B + iC$  mit hermiteschen Operatoren gilt, folgt hieraus auch die Eindeutigkeit.

(iv) Wir haben  $\Phi(A^*.y)(x) = \langle A.x, y \rangle = b_A(x, y)$ . Wegen der Injektivität von  $\Phi$  ist  $A^*$ , und somit auch  $A$  eindeutig durch  $b_A$  bestimmt.

(v) Wir haben

$$\overline{b_A(y, x)} = \overline{\langle A.y, x \rangle} = \overline{\langle y, A^*.x \rangle} = \langle A^*.x, y \rangle = b_{A^*}(x, y).$$

Also ist  $A = A^*$  wegen (iv) äquivalent dazu, daß  $b_A$  hermitesch ist.

Ist  $A$  bzw.  $b_A$  hermitesch, so zeigt die Polarisierungsidentität (Lemma I.1.2(ii)), daß man  $b_A$  und damit auch  $A$  aus den Werten  $b_A(x, x)$ ,  $x \in \mathcal{H}$  rekonstruieren kann.

Ist  $A$  hermitesch, so ist natürlich auch  $b_A(x, x) \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ . Ist dies umgekehrt der Fall und schreiben wir  $A = B + iC$  gemäß (ii), so ist  $b_C(x, x) = \text{Im } b_A(x, x) = 0$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ . Also folgt  $b_C = 0$  aus obiger Bemerkung und weiter  $C = 0$  aus (iv). Damit ist  $A = B$  hermitesch.

(vi) Das folgt sofort aus (v). ■

**Lemma I.2.5.** Eine lineare Abbildung  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  ist genau dann eine Isometrie, wenn  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$  ist.

**Beweis.** Ist  $A$  eine Isometrie, so gilt

$$\langle A^*A.x, x \rangle = \langle A.x, A.x \rangle = \|A.x\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

für all  $x \in \mathcal{H}_1$ . Damit folgt  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$  aus Lemma I.2.4(v).

Ist umgekehrt  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$ , so folgt umgekehrt sofort  $\|A.x\|^2 = \langle A^*A.x, x \rangle = \|x\|^2$ . ■

**Satz I.2.6.** Für eine lineare Abbildung  $A: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  sind äquivalent:

- (1)  $A$  ist unitär.
- (2)  $A$  ist surjektiv und erhält das Skalarprodukt, d.h.  $\langle A.x, A.y \rangle = \langle x, y \rangle$  für  $x, y \in \mathcal{H}_1$ .
- (3)  $A$  ist bijektiv und erhält das Skalarprodukt, d.h.  $\langle A.x, A.y \rangle = \langle x, y \rangle$  für  $x, y \in \mathcal{H}_1$ .
- (4)  $A$  ist eine surjektive Isometrie.

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2): Die Surjektivität folgt aus  $AA^* = \text{id}_{\mathcal{H}_2}$  und der Rest aus  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Die Injektivität folgt wegen

$$\|A.x\|^2 = \langle A.x, A.x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

aus der Invarianz des Skalarprodukts.

(3)  $\Rightarrow$  (4): Daß  $A$  eine Isometrie ist, folgt wie unter (2)  $\Rightarrow$  (3).

(4)  $\Rightarrow$  (1): Aus Lemma I.2.5 folgt  $A^*A = \text{id}_{\mathcal{H}_1}$ . Damit ist  $AA^*A = A$  und wegen der Surjektivität von  $A$  folgt weiter  $AA^* = \text{id}_{\mathcal{H}_2}$ . ■

Das obige Lemma zeigt, daß die unitären Abbildungen gerade die *Isomorphismen von Hilberträumen* sind. Sie erhalten all die vorhandene Struktur: die Vektorraumstruktur und das Skalarprodukt. Daher nennen wir auch eine bijektive lineare Abbildung  $U: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  zwischen Prä-Hilberträumen *unitär*, wenn  $\langle U.x, U.y \rangle = \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathcal{H}_1$  gilt.

**Lemma I.2.7.** Für einen Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  sind äquivalent:

- (1)  $A$  ist normal.
- (2)  $\|A.x\| = \|A^*.x\|$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ .
- (3)  $A = B + iC$  mit hermiteschen Operatoren  $B, C$  und  $BC = CB$ .

**Beweis.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2): Zunächst ist

$$\langle (AA^* - A^*A).x, x \rangle = \langle A^*.x, A^*.x \rangle - \langle A.x, A.x \rangle = \|A^*.x\|^2 - \|A.x\|^2.$$

Da der Operator  $AA^* - A^*A$  hermitesch ist, verschwindet dieser Ausdruck genau dann für alle  $x \in \mathcal{H}$ , wenn  $AA^* - A^*A = 0$  ist (Satz I.2.4(vi)), d.h., wenn  $A$  normal ist.

(1)  $\Leftrightarrow$  (3): Man rechnet das einfach nach:  $AA^* = (B + iC)(B - iC) = B^2 + i(CB - BC) + C^2$  und  $A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 - i(CB - BC) + C^2$ . Hieraus folgt die Behauptung. ■

Im folgenden schreiben wir  $\mathcal{N}(A)$  für den Kern und  $\mathcal{R}(A)$  für das Bild einer linearen Abbildung  $A$ .

**Lemma I.2.8.** Für  $A \in B(\mathcal{H})$  gilt:

- (i)  $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$ .
- (ii) Ein abgeschlossener Unterraum  $E \subseteq \mathcal{H}$  ist genau dann unter  $A$  invariant, wenn  $E^\perp$  unter  $A^*$  invariant ist.

**Beweis.** (i) Wegen  $\langle A.x, \mathcal{H} \rangle = \langle x, A^*. \mathcal{H} \rangle$  für  $x \in \mathcal{H}$  ist  $A.x = 0$  äquivalent zu  $x \in \mathcal{R}(A^*)^\perp$ .

(ii) Gilt  $A.E \subseteq E$ , so finden wir für  $v \in E^\perp$ :

$$\langle A^*.v, E \rangle = \langle v, A.E \rangle \subseteq \langle v, E \rangle = \{0\}.$$

Also ist  $A^*.E^\perp \subseteq E^\perp$ .

Ist dies umgekehrt der Fall, so folgt  $A.E \subseteq E$  aus  $E = (E^\perp)^\perp$  und  $A = (A^*)^*$ . ■

**Satz I.2.9.** Sei  $0 \neq P \in B(\mathcal{H})$  eine Projektion, d.h.  $P^2 = P$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $P$  ist eine Orthogonalprojektion, d.h.  $\mathcal{N}(P) \perp \mathcal{R}(P)$ .
- (2)  $\|P\| = 1$ .
- (3)  $\langle P.x, x \rangle \geq 0$  für alle  $x \in \mathcal{H}$ .
- (4)  $P^* = P$ .
- (5)  $P$  ist normal.

**Beweis.** Wir erinnern uns daran, daß für eine Projektion  $P$  immer gilt  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ . Da  $P$  stetig ist, sind beide Räume sogar abgeschlossen (Übung).

(1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $E := \mathcal{R}(P)$ . Dann haben wir eine orthogonale Zerlegung  $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$  mit  $\mathcal{N}(P) = E^\perp$ . Wegen  $P \neq 0$  ist  $E \neq \{0\}$ . Es existiert also ein  $x \in E$  mit  $\|x\| = 1$  und wir erhalten  $\|P.x\| = \|x\| = 1$ , also  $\|P\| \geq 1$ .

Ist andererseits  $x \in \mathcal{H}$  gegeben als  $x = x_E + x_{E^\perp}$  mit  $x_E \in E$  und  $x_{E^\perp} \in E^\perp$ , so ist

$$\|P.x\|^2 = \|x_E\|^2 = \|x\|^2 - \|x_{E^\perp}\|^2 \leq \|x\|^2.$$

Also ist  $\|P\| \leq 1$ , folglich  $\|P\| = 1$ .

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $x \in \mathcal{N}(P)$  und  $y \in \mathcal{R}(P)$ . Dann gilt für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$\|\lambda y\|^2 = \|P(x + \lambda y)\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, \lambda y \rangle + \|\lambda y\|^2,$$

also  $\|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\langle x, y \rangle) \geq 0$ . Für  $\lambda = t\langle x, y \rangle$  folgt hieraus

$$0 \leq \|x\|^2 + 2t|\langle x, y \rangle|^2$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ , also  $\langle x, y \rangle = 0$ .

(1)  $\Rightarrow$  (3): Das folgt aus

$$\langle P.x, x \rangle = \langle P.x, (x - P.x) + P.x \rangle = \langle P.x, P.x \rangle = \|P.x\|^2$$

für alle  $x \in \mathcal{H}$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4): Da  $\langle P.x, x \rangle$  für alle  $x \in \mathcal{H}$  reell ist, ist  $P$  nach Satz I.2.4(v) hermitesch.

(4)  $\Rightarrow$  (5): trivial.

(5)  $\Rightarrow$  (1): Aus den Lemmata I.2.7 und I.2.8 folgt  $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(P^*) = \mathcal{R}(P)^\perp$ , d.h.  $P$  ist eine Orthogonalprojektion. ■

**Beispiel I.2.10.** (a) Man beachte, daß für endlichdimensionale Hilberträume  $\mathcal{H}$  aus  $A^*A = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$  schon  $A^* = A^{-1}$  und damit  $AA^* = \operatorname{id}_{\mathcal{H}}$  folgt, d.h. jede Isometrie ist automatisch surjektiv. Im allgemeinen wird das falsch. Hierzu betrachten wir den Hilbertraum  $l^2$  aller quadratsummierbaren Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und den Shiftoperator

$$S: l^2 \rightarrow l^2, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots).$$

Dann ist

$$S^*: l^2 \rightarrow l^2, \quad (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots).$$

(Übung). Der Operator  $S^*$  schiebt also gerade in die andere Richtung. Damit ist  $SS^* = \operatorname{id}$  und

$$S^*S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_2, x_3, \dots).$$

Wegen  $S^*S \neq SS^*$  ist  $S$  auch nicht normal. Der Operator  $S^*$  ist eine nicht surjektive Isometrie.

(b) Ist  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$  und wird  $A \in B(\mathcal{H})$  durch die Matrix  $(a_{ij})_{i,j}$  dargestellt, so wird  $A^*$  durch die Matrix  $(\overline{a_{ji}})_{i,j}$  dargestellt. In diesem Sinn verallgemeinert unsere Definition des adjungierten Operators die Konzepte der linearen Algebra.

Ist  $(e_j)_{j \in J}$  eine ONB in einem allgemeinen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , so kann man einem Operator  $A$  die Matrix  $(\langle A.e_j, e_i \rangle)_{i,j \in J}$  zuordnen. Auch in diesem Fall gilt

$$\langle A^*.e_j, e_i \rangle = \langle e_j, A.e_i \rangle = \overline{\langle A.e_i, e_j \rangle},$$

so daß  $A^*$  durch die adjungierte Matrix dargestellt wird.

(c) Wir betrachten den Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ , den wir als Vervollständigung des Prä-Hilbertraums  $C([0, 1])$  bzgl. des durch

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

gegebenen Skalarprodukts betrachten.

Für eine stetige Funktion  $K: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  wird dann durch

$$T_K(f)(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

ein stetiger Operator in  $B(\mathcal{H})$  definiert (Übung). Man nennt  $T_K$  einen *Kernoperator* und die Funktion  $K$  dessen Kern. Der adjungierte Operator ist  $T_{K^*}$  mit  $K^*(x, y) := \overline{K(y, x)}$  (Übung). Hierdurch erkennt man sofort für welche Kerne  $K$  der Operator  $T_K$  hermitesch ist. Wir werden später sehen, in welchem Sinne das eine kontinuierliche Version von (b) ist. ■

Das Hauptanliegen der Spektraltheorie von Operatoren auf Hilberträumen ist es nun, normale, und insbesondere unitäre und hermitesche Operatoren auf Hilberträumen zu verstehen. Den geeigneten Rahmen, in dem sich diese Probleme gut behandeln lassen, bietet die Darstellungstheorie.

### I.3. Involutive Halbgruppen und ihre Darstellungen

Zuerst haben wir zu klären, für welche Objekte wir Darstellungen betrachten wollen. Hierzu benötigen wir Konzepte, die so allgemein sind, daß sich all die Phänomene, die uns interessieren, erfassen lassen. Wie schon oben bemerkt ist das wesentliche Charakteristikum der Hilberträume das Konzept des adjungierten Operators. Wir werden sehen, daß der Begriff der involutiven Halbgruppe die wesentlichen Strukturen repräsentiert.

**Definition I.3.1.** Ein Paar  $(S, *)$  einer Halbgruppe  $S$  mit einem involutiven Antiautomorphismus  $s \mapsto s^*$  heißt *involutive Halbgruppe*. Es gilt also  $(st)^* = t^*s^*$ , d.h. die Involution dreht die Reihenfolge der Faktoren um.

Ist  $\mathbf{1}$  ein Einselement in  $S$ , so gilt  $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$  (Übung). Die Elemente in

$$S_h := \{s \in S: s^* = s\}$$

heißen *hermitesch* und falls  $S$  ein Einselement  $\mathbf{1}$  hat, so heißen die Elemente in

$$U(S) := \{s \in S: s^*s = ss^* = \mathbf{1}\}$$

*unitär*. Die Menge  $U(S)$  der unitären Elemente ist eine Gruppe, die *unitäre Gruppe von  $S$* . ■

**Beispiel I.3.2.** (a) Ist  $S$  eine abelsche Halbgruppe, so ist  $(S, \text{id}_S)$  eine involutive Halbgruppe. (b) Ist  $G$  eine Gruppe und  $g^* := g^{-1}$ , so ist  $(G, *)$  eine involutive Halbgruppe. Hier ist jedes Element unitär.

(c) Eine besonders wichtige involutive Halbgruppe ist die multiplikative Halbgruppe  $B(\mathcal{H})$  der beschränkten Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Die Gruppe  $U(B(\mathcal{H})) = U(\mathcal{H})$  heißt *unitäre Gruppe des Hilbertraums  $\mathcal{H}$* .

(d) Die multiplikative Halbgruppe  $(\mathbb{C}, \cdot)$  ist eine involutive Halbgruppe bzgl.  $z^* := \bar{z}$ . Das ist der Spezialfall von (c) mit eindimensionalem  $\mathcal{H}$ .

(e) Ist  $X$  eine Menge, so ist  $S := X \times X$  eine involutive Halbgruppe bzgl. der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (x', y') := (x, y') \quad \text{und} \quad (x, y)^* = (y, x).$$

(f) Ist  $X$  eine Menge, so ist der Raum  $\mathbb{C}^X$  der komplexwertigen Funktionen auf  $X$  eine abelsche involutive Halbgruppe bzgl. der punktweisen Multiplikation und der Involution  $f^*(x) := \overline{f(x)}$ . Eine Funktion ist genau dann hermitesch, wenn sie reellwertig ist.

Die Menge der  $\{0, 1\}$ -wertigen Funktionen ist hierbei eine involutive Unterhalbgruppe, die aus hermiteschen Elementen  $f$  besteht für die sogar  $f^2 = f$  gilt. Identifizieren wir so eine Funktion mit der Menge  $f^{-1}(1)$ , so erhalten wir eine involutive Halbgruppenstruktur auf der Menge  $2^X$  aller Teilmengen von  $X$ . Hierbei ist  $A \cdot B = A \cap B$  und  $A^* = A$  für  $A \subseteq X$ . ■

**Definition I.3.3.** (a) Eine *Darstellung* einer involutiven Halbgruppe  $S$  ist ein Homomorphismus  $\pi: S \rightarrow B(\mathcal{H})$ , wobei  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbertraum ist, so daß

$$\pi(s^*) = \pi(s)^*$$

für alle  $s \in S$  gilt. Man schreibt auch  $(\pi, \mathcal{H})$  für eine Darstellung, wenn man  $\mathcal{H}$  hervorheben möchte.

(b) Ist  $G$  eine Gruppe mit  $g^* = g^{-1}$ , so nennt man solche Darstellungen auch *unitär*, wenn zusätzlich  $\pi(\mathbf{1}) = \text{id}$  gilt. Aus  $gg^* = g^*g = \mathbf{1}$  für  $g \in G$  folgt dann  $\pi(g) \in U(\mathcal{H})$ . Unitäre Darstellungen sind also nichts anderes als Homomorphismen  $\pi: G \rightarrow U(\mathcal{H})$  in die unitäre Gruppe eines Hilbertraums.

Beachte: Ist  $\mathbf{1}$  ein Einselement in der involutiven Halbgruppe  $S$  und  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung, so ist in der Regel nicht  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , aber  $\pi(\mathbf{1})$  ist immer eine Orthogonalprojektion.

(c) Zwei Darstellungen  $(\pi, \mathcal{H})$  und  $(\pi', \mathcal{H}')$  heißen *äquivalent*, wenn es eine unitäre Abbildung  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  gibt, so daß

$$(3.1) \quad U \circ \pi(s) = \pi'(s) \circ U$$

für alle  $s \in S$  gilt. Allgemein nennen wir einen Operator  $U \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$  mit (3.1) einen *Vertauschungsoperator*. ■

Vor diesem Hintergrund kann man sich natürlich ganz allgemein das folgende Problem vorlegen. Gegeben sei eine involutive Halbgruppe  $(S, *)$ . Man klassifiziere alle Darstellungen bis auf Äquivalenz. Wir werden uns nun klar machen, in welchem Zusammenhang diese darstellungstheoretische Frage mit unserer ursprünglichen Intention steht, gewisse Operatoren auf Hilberträumen zu verstehen.

**Bemerkung I.3.4.** (a) Sei  $G = \mathbb{Z}$  mit  $s^* = -s$ . Ist nun  $(\pi, \mathcal{H})$  eine unitäre Darstellung von  $G$ , so ist  $U := \pi(1) \in U(\mathcal{H})$  ein unitärer Operator und es gilt  $\pi(n) = U^n$  für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , wobei wir  $U^0 = \mathbf{1}$  setzen und negative Potenzen als Potenzen von  $U^{-1}$  verstehen. Ist umgekehrt  $U \in U(\mathcal{H})$ , so wird durch  $\pi(n) := U^n$  eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{Z}$  auf  $\mathcal{H}$  definiert. Das Studium der unitären Darstellungen von  $\mathbb{Z}$  ist also äquivalent zum Studium einzelner unitärer Operatoren.

(b) Sei  $S = (\mathbb{N}_0, +)$  mit  $s^* = s$ . Ist nun  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $S$ , so ist  $A := \pi(1) \in B(\mathcal{H})$  ein hermitescher Operator und es gilt  $\pi(n) = A^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Ist umgekehrt  $A \in B(\mathcal{H})$  hermitesch, so wird durch  $\pi(n) := A^n$  eine Darstellung von  $\mathbb{N}_0$  auf  $\mathcal{H}$  definiert. Das Studium der Darstellungen der involutiven Halbgruppe  $(\mathbb{N}_0, \text{id})$  ist also äquivalent zum Studium einzelner hermitescher Operatoren.

(c) Sei  $S = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, +)$  mit  $(n, m)^* = (m, n)$ . Dann ist  $S$  eine kommutative involutive Halbgruppe. Ist nun  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $S$  und  $A := \pi(1, 0)$ , so ist

$$AA^* = \pi(1, 0)\pi(0, 1) = \pi(1, 1) = \pi(0, 1)\pi(1, 0) = A^*A,$$

d.h.  $A$  ist normal und

$$\pi(n, m) := A^n(A^*)^m$$

für  $n, m \in \mathbb{N}_0$ . Umgekehrt sieht man, daß diese Formel für jeden normalen Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  eine Darstellung von  $S$  definiert. Wieder sehen wir, daß das Studium normaler Operatoren äquivalent ist zum Studium der Darstellungen von  $S$ . ■

Wir haben also alle drei spektraltheoretischen Probleme übersetzt in das Problem der Klassifikation der Darstellungen einer kommutativen Halbgruppe.

### Zerlegung von Darstellungen

Um zu sehen, in welchem Sinn diese einheitliche Formulierung unserer Probleme sehr nützlich für eine Reduktion des Problems sein kann, schauen wir uns nun an, wie man Darstellungen in einfachere Bestandteile zerlegen kann.

**Definition I.3.5.** (a) Eine involutive Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  von  $S$  heißt *nicht entartet*, wenn die Menge  $\pi(S).\mathcal{H}$  total ist, d.h.  $\text{span}(\pi(S).\mathcal{H})$  ist dicht. Das ist zum Beispiel immer dann der Fall, wenn  $S$  ein Einselement  $\mathbf{1}$  hat und  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  gilt (Übung).

(b) Eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  einer involutiven Halbgruppe  $S$  heißt *zyklisch*, wenn es einen Vektor  $v \in \mathcal{H}$  gibt, so daß  $\pi(S).v$  total ist.

(c) Man nennt eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  *irreduzibel*, wenn  $\{0\}$  und  $\mathcal{H}$  die einzigen abgeschlossenen invarianten Unterräume sind. Irreduzible Darstellungen sind immer zyklisch (Übung). ■

**Lemma I.3.6.** Sei  $(\pi, \mathcal{H})$  eine involutive Darstellung der involutiven Halbgruppe  $S$ ,  $E \subseteq \mathcal{H}$  ein abgeschlossener Unterraum und  $P_E$  die orthogonale Projektion auf  $E$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $E$  ist unter  $S$  invariant.
- (2)  $E^\perp$  ist unter  $S$  invariant.
- (3)  $P_E$  vertauscht mit  $S$ .

**Beweis.** (1)  $\Leftrightarrow$  (2): Da für  $s \in S$  auch  $\pi(s)^* = \pi(s^*)$  wieder in  $\pi(S)$  ist, folgt dies sofort aus Lemma I.2.8.

(1), (2)  $\Rightarrow$  (3): Sei  $v \in \mathcal{H}$  und  $v_E = P_E.v$ . Für  $s \in S$  ist dann wegen (2)

$$P_E\pi(s).v = P_E(\pi(s).v_E + \pi(s).(v - v_E)) = \pi(s).v_E = \pi(s)P_E.v.$$

Also gilt  $\pi(s)P_E = P_E\pi(s)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Für  $v \in E$  und  $s \in S$  ist  $P_E\pi(s).v = \pi(s)P_E.v = \pi(s).v$ , d.h.  $\pi(s).v \in E$ . ■

Zuerst überlegen wir uns, wie einschränkend die Forderung nach einer nicht entarteten Darstellung ist.

**Satz I.3.7.** Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $S$ , so ist

$$\mathcal{H}_0 := \{v \in \mathcal{H}: (\forall s \in S)\pi(s).v = 0\}$$

ein abgeschlossener Unterraum. Die Darstellung von  $S$  auf  $\mathcal{H}_0^\perp$  ist nicht entartet und es gilt  $\mathcal{H}_0 = (\pi(S).\mathcal{H})^\perp$ .

**Beweis.** Wegen der Stetigkeit der Operatoren  $\pi(s)$ ,  $s \in S$ , sind die Kerne  $\mathcal{N}(\pi(s)) = \{v \in \mathcal{H}: \pi(s).v = 0\}$  alle abgeschlossen. Also ist auch

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{s \in S} \mathcal{N}(\pi(s))$$

abgeschlossen.

Nach Lemma I.2.8 ist

$$\mathcal{H}_0 = \bigcap_{s \in S} \mathcal{N}(\pi(s)) = \bigcap_{s \in S} \mathcal{R}(\pi(s^*))^\perp = \bigcap_{s \in S} \mathcal{R}(\pi(s))^\perp = (\pi(S).\mathcal{H})^\perp$$

und somit

$$\mathcal{H}_0^\perp = ((\pi(S).\mathcal{H})^\perp)^\perp = \overline{\text{span } \pi(S).\mathcal{H}}.$$

Die Invarianz dieses Raumes folgt aus Lemma I.3.6. Daß die Darstellung auf  $\mathcal{H}_0^\perp$  nicht entartet ist, folgt nun aus  $\pi(S).\mathcal{H} = \pi(S).\mathcal{H}_0^\perp$  und  $\mathcal{H}_0^\perp = \text{span } \pi(S).\mathcal{H}$ . ■

Das Lemma I.3.6 gibt uns einen Hinweis darauf, wie man Darstellungen zerlegen kann. Die nächste Frage, die sich stellt, ist, wie man Darstellungen zusammensetzen kann.

**Satz I.3.8.** Sei  $(\pi_j, \mathcal{H}_j)_{j \in J}$  eine Familie von involutiven Darstellungen der Halbgruppe  $S$ . Gilt weiter  $\sup_{j \in J} \|\pi_j(s)\| < \infty$  für alle  $s \in S$ , so wird durch

$$\pi(s) \cdot (v_j)_{j \in J} := (\pi_j(s) \cdot v_j)_{j \in J}$$

auf  $\widehat{\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j}$  eine involutive Darstellung von  $S$  definiert.

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß  $\pi(s)$  den Unterraum  $\mathcal{H} := \widehat{\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j}$  von  $\prod_{j \in J} \mathcal{H}_j$  invariant läßt. Dazu rechnen wir für  $v = (v_j)_{j \in J}$  in diesem Raum:

$$\|\pi(s) \cdot v\|^2 = \sum_{j \in J} \|\pi_j(s) \cdot v_j\|^2 \leq (\sup_{j \in J} \|\pi_j(s)\|) \sum_{j \in J} \|v_j\|^2 = (\sup_{j \in J} \|\pi_j(s)\|) \|v\|^2,$$

und sehen, daß  $\mathcal{H}$  unter  $\pi(s)$  invariant bleibt, sowie  $\|\pi(s)\| \leq \sup_{j \in J} \|\pi_j(s)\|$ .

Daß  $\pi: S \rightarrow B(\mathcal{H})$  ein Homomorphismus von Halbgruppen ist, ist klar. Weiter folgt  $\pi(s)^* = \pi(s^*)$  sofort aus

$$\langle \pi(s) \cdot v, w \rangle = \sum_{j \in J} \langle \pi_j(s) \cdot v_j, w_j \rangle = \sum_{j \in J} \langle v_j, \pi_j(s^*) \cdot w_j \rangle = \langle v, \pi(s^*) \cdot w \rangle$$

für alle  $v, w \in \mathcal{H}$ . ■

Die Darstellung aus Lemma I.3.8 nennt man eine *direkte Hilbertraum-Summe* der Darstellungen  $(\pi_j, \mathcal{H}_j)_{j \in J}$  und schreibt kurz  $\pi = \bigoplus_{j \in J} \pi_j$ .

Es ist klar, daß jede zyklische Darstellung nicht entartet ist. Der folgende Satz zeigt, daß umgekehrt jede nicht entartete Darstellung Summe von zyklischen Darstellungen ist. Zuerst ein kleines Lemma.

**Lemma I.3.9.** Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung der involutiven Halbgruppe  $S$  und  $v \in \mathcal{H}$ , so ist die Darstellung von  $S$  auf dem Unterraum  $\text{span } \pi(S) \cdot v$  zyklisch. Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  nicht entartet, so ist sogar  $v \in \text{span } \pi(S) \cdot v$ .

**Beweis.** Sei  $\mathcal{H}_0 := \overline{\text{span } \pi(S) \cdot v}$ . Es ist klar, daß  $\mathcal{H}_0$  unter  $S$  invariant ist und wir erhalten mit Lemma I.3.6 eine orthogonale  $S$ -invariante Zerlegung  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_0^\perp$ . Entsprechend zerlegt sich  $v$  als  $v = v_0 + v_1$ , wobei  $v_0 \in \mathcal{H}_0$  und  $v_1 \in \mathcal{H}_0^\perp$  gilt. Sei  $s \in S$ . Da  $\mathcal{H}_0^\perp$  invariant ist, ist  $\pi(s) \cdot v_1 \in \mathcal{H}_0^\perp$ , andererseits aber auch  $\pi(s) \cdot v_1 = \pi(s) \cdot v - \pi(s) \cdot v_0 \in \mathcal{H}_0$ . Folglich ist  $\pi(s) \cdot v_1 = \{0\}$ . Also ist  $\pi(S) \cdot v = \pi(S) \cdot v_0$  und wir sehen, daß  $v_0$  ein zyklischer Vektor in  $\mathcal{H}_0$  ist.

Ist die Darstellung von  $S$  auf  $\mathcal{H}$  nicht entartet, so ist  $v_1 = 0$  und damit  $v \in \mathcal{H}_0$ . ■

Welche Rolle die Involutivität der Darstellung in Lemma I.3.9 spielt, sieht man, wenn man den Shiftoperator  $S^*$  (vgl. Beispiel I.2.10) und die zugehörige Darstellung  $\pi: \mathbb{N} \rightarrow B(l^2)$ ,  $n \mapsto (S^*)^n$  betrachtet. Für  $v = e_1$  besteht der von  $\pi(\mathbb{N}) \cdot e_1 = \{e_{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$  erzeugte Unterraum aus allen Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_1 = 0$ . Wendet man allerdings  $S^*$  nochmal an, so erhält man auch  $x_2 = 0$ , d.h. die Darstellung von  $\mathbb{N}$  auf diesem Unterraum ist nicht zyklisch.

**Satz I.3.10.** Eine Darstellung einer involutiven Halbgruppe  $S$  ist genau dann nicht entartet, wenn sie eine direkte Summe von zyklischen Darstellungen ist.

**Beweis.** Wir nehmen zuerst an, daß die Darstellung nicht entartet ist. Der Beweis ist eine typische Anwendung des Zornschen Lemmas. Wir ordnen die Menge  $\mathcal{M}$  aller Mengen  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$  von paarweise orthogonalen abgeschlossenen invarianten Unterräumen auf denen die Darstellung von  $S$  zyklisch ist über Inklusion. Es ist klar, daß diese Ordnung induktiv wird, denn für jede Kette  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{M}$  ist auch wieder  $\bigcup \mathcal{K} \in \mathcal{M}$ . Das Zornsche Lemma liefert jetzt eine maximale Menge  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$  von paarweise orthogonalen invarianten Unterräumen, so daß die Einschränkung der Darstellung auf  $\mathcal{H}_j$  jeweils zyklisch ist (Übung).

Wir definieren  $\mathcal{K} := \overline{\sum_{j \in J} \mathcal{H}_j}$ . Dann ist  $\mathcal{K}^\perp$  ein invarianter Unterraum. Nehmen wir an, daß  $\mathcal{K}$  von  $\mathcal{H}$  verschieden ist, so finden wir einen von 0 verschiedenen Vektor  $v \in \mathcal{K}^\perp$ . Setzen

wir  $\mathcal{H}' := \overline{\text{span } \pi(S).v}$ , so ist  $\mathcal{H}'$  zusammen mit  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$  eine orthogonale Familie von zyklischen Unterräumen (Lemma I.3.9), die echt größer ist. Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion von  $(\mathcal{H}_j)_{j \in J}$ . Also ist  $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ , d.h.  $(\pi, \mathcal{H})$  ist eine direkte Summe der zyklischen Darstellungen  $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$ , wobei  $\pi_j(s) := \pi(s)|_{\mathcal{H}_j}$  ist.

Ist umgekehrt  $(\pi, \mathcal{H})$  eine direkte Summe von zyklischen Darstellungen  $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$ , so ist  $\sum_{j \in J} \mathcal{H}_j$  ein dichter Unterraum von  $\mathcal{H}$ . Da die Darstellung auf  $\mathcal{H}_j$  zyklisch ist, gilt

$$\mathcal{H}_j \subseteq \overline{\text{span } \pi(S).\mathcal{H}_j} \subseteq \overline{\text{span } \pi(S).\mathcal{H}}$$

für alle  $j$ . Also enthält die rechte Seite auch die Summe der  $\mathcal{H}_j$  und stimmt wegen der Abgeschlossenheit mit  $\mathcal{H}$  überein. ■

## I.4. Der endlichdimensionale Fall

**Satz I.4.1.** *Jede endlichdimensionale Darstellung  $\pi$  von  $S$  ist eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen.*

**Beweis.** Wir zeigen die Behauptung über Induktion nach  $\dim \mathcal{H}$ . Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  irreduzibel, so ist nichts zu zeigen. Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  nicht irreduzibel, so existiert ein invarianter Unterraum  $\mathcal{H}_1$ , der von  $\{0\}$  und  $\mathcal{H}$  verschieden ist. Damit haben wir eine invariante Zerlegung  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$  und wir können die Induktionsvoraussetzung auf beide Teilräume anwenden (Lemma I.3.6). Hieraus folgt die Behauptung. ■

Wir können uns hiermit auf den Standpunkt stellen, daß wir die Gesamtheit der endlichdimensionalen Darstellungen von  $G$  kennen, wenn wir die irreduziblen kennen. Wir schauen uns daher jetzt an, wie wir an die irreduziblen Darstellungen herankommen.

Der folgende Satz bleibt auch ohne die einschränkende Voraussetzung der Endlichdimensionalität wahr. Das werden wir aber erst später aus dem (stetigen) Funktionalkalkül ableiten können. Zuerst aber ein wichtiges kleines Lemma, das wir später noch verallgemeinern werden.

**Lemma I.4.2.** *Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $S$ ,  $A \in B(\mathcal{H})$  ein Vertauschungsoperator und  $\mathcal{H}_\lambda(A) = \{v \in \mathcal{H} : A.v = \lambda v\}$  der Eigenraum von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ . Dann ist  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  invariant unter  $S$ .*

**Beweis.** Für  $v \in \mathcal{H}_\lambda(A)$  und  $s \in S$  gilt

$$A\pi(s).v = \pi(s)A.v = \lambda\pi(s).v. \quad \blacksquare$$

**Satz I.4.3.** *Ist  $S$  abelsch, so ist jede irreduzible endlichdimensionale Darstellung  $\pi$  eindimensional.*

**Beweis.** Sei  $s \in S$ . Da  $\mathcal{H}$  ein komplexer Vektorraum ist, existiert ein Eigenwert  $\lambda$  von  $\pi(s)$ , d.h.  $\mathcal{H}_\lambda(\pi(s)) \neq \{0\}$ . Da  $S$  abelsch ist, ist  $\pi(s)$  ein Vertauschungsoperator, und Lemma I.4.2 zeigt, daß  $\mathcal{H}_\lambda(\pi(s))$  unter  $\pi(S)$  invariant ist. Aus der Irreduzibilität der Darstellung folgt jetzt  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\lambda(\pi(s))$ , d.h.  $\pi(s) = \lambda \mathbf{1}$ .

Wir haben also gezeigt, daß  $\pi(S) \subseteq \mathbb{C}\mathbf{1}$ . Wegen der Irreduzibilität muß  $\mathcal{H}$  nun eindimensional sein. ■

**Definition I.4.4.** Eine eindimensionale Darstellung  $\pi: S \rightarrow B(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$  ist nichts anderes als ein Homomorphismus  $\pi: S \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\pi(s^*) = \overline{\pi(s)}$ . Solche Homomorphismen nennen wir *Charaktere* und schreiben  $\widehat{S}_0$  für die Menge aller Charaktere und  $\widehat{S} := \widehat{S}_0 \setminus \{0\}$ . ■

**Satz I.4.5.** *Sei  $(\pi, \mathcal{H})$  eine endlichdimensionale Darstellung der abelschen involutiven Halbgruppe  $S$ . Für  $\chi \in \widehat{S}$  sei*

$$\mathcal{H}_\chi := \{v \in \mathcal{H} : (\forall s \in S)\pi(s).v = \chi(s)v\}.$$



Dann ist

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\chi \in \widehat{S}} \mathcal{H}_\chi$$

eine endliche orthogonale direkte Summe von Darstellungen.

**Beweis.** Das folgt sofort aus den Sätzen I.4.1 und I.4.3. ■

**Theorem I.4.6.** (Klassifikationssatz) *Sei  $S$  eine abelsche involutive Halbgruppe. Jeder endlichdimensionalen Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  ordnen wir die Vielfachheitenfunktion*

$$n_\pi: \widehat{S} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \chi \mapsto \dim \mathcal{H}_\chi$$

zu. Dann gilt:

- (i) Zwei Darstellungen  $(\pi, \mathcal{H})$  und  $(\pi', \mathcal{H}')$  sind genau dann äquivalent, wenn die Vielfachheitenfunktionen  $n_\pi$  und  $n_{\pi'}$  übereinstimmen.
- (ii) Zu jeder Funktion  $n: \widehat{S} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die nur an endlich vielen Stellen nicht verschwindet, existiert eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  mit  $n_\pi = n$ .

**Beweis.** (i) Sind beide Darstellungen äquivalent und  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  ein unitärer Vertauschungsoperator, so gilt  $U(\mathcal{H}_\chi) = \mathcal{H}'_\chi$  für alle  $\chi \in \widehat{S}$ . In der Tat haben wir  $\pi'(s)U.v = U\pi(s).v = \chi(s)U.v$  für  $v \in \mathcal{H}_\chi$  und damit  $U(\mathcal{H}_\chi) \subseteq \mathcal{H}'_\chi$ . Wenden wir dies auf  $U^{-1}$  statt  $U$  an, so erhalten wir Gleichheit. Damit ist  $n_\pi(\chi) = \dim \mathcal{H}_\chi = \dim \mathcal{H}'_\chi = n_{\pi'}(\chi)$ .

Ist dies umgekehrt der Fall, so haben für alle  $\chi \in \widehat{S}$  die Hilberträume  $\mathcal{H}_\chi$  und  $\mathcal{H}'_\chi$  die gleiche Dimension, sind also isomorph. Sei  $U_\chi: \mathcal{H}_\chi \rightarrow \mathcal{H}'_\chi$  unitär. Dann gilt auch  $U_\chi\pi(s).v = \chi(s)U_\chi.v = \pi'(s)U_\chi.v$ , d.h.  $U_\chi$  ist ein unitärer Vertauschungsoperator auf  $\mathcal{H}_\chi$ . Definieren wir nun  $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  durch  $U|_{\mathcal{H}_\chi} = U_\chi$ , so ist  $U$  ein unitärer Vertauschungsoperator (Übung).

(ii) Wir setzen  $\mathcal{H}_\chi := \mathbb{C}^{n(\chi)}$  und definieren die Darstellung  $\pi_\chi$  auf  $\mathcal{H}_\chi$  durch  $\pi_\chi(s) := \chi(s)\mathbf{1}$ . Da  $n$  nur an endlich vielen Stellen nicht verschwindet, ist  $\bigoplus_{\chi \in \widehat{S}} \pi_\chi$  eine Darstellung mit den gewünschten Eigenschaften. ■

Mit dem Klassifikationssatz ist unser Klassifikationsproblem für den endlichdimensionalen Fall gelöst. Das Ergebnis können wir nun auf unsere Fragestellung für Operatoren anwenden.

**Korollar I.4.7.** *Ist  $\dim \mathcal{H} < \infty$ , so ist  $A \in B(\mathcal{H})$  genau dann normal, wenn  $\mathcal{H}$  in eine orthogonale direkte Summe der Eigenräume von  $A$  zerfällt.*

*Ein normaler Operator  $A$  ist genau dann unitär, wenn alle Eigenwerte in  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$  liegen und genau dann hermitesch, wenn alle Eigenwerte reell sind.*

**Beweis.** Sei  $A$  zunächst normal und  $S = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, +)$  mit  $(n, m)^* = (m, n)$  wie in Beispiel I.3.4(c). Dann können wir durch  $\pi(n, m) := A^n(A^*)^m$  eine Darstellung von  $S$  auf  $\mathcal{H}$  definieren. Nach Satz I.4.5 zerfällt  $\mathcal{H}$  in eine orthogonale direkte Summe von eindimensionalen invarianten Unterräumen, insbesondere ist  $A$  diagonalisierbar und die Eigenräume sind paarweise orthogonal zueinander.

Ist dies umgekehrt für einen Operator  $A$  der Fall, so sehen wir mit Lemma I.2.8(ii), daß  $A^*$  ebenfalls diese orthogonale Zerlegung respektiert. Aus  $A.v = \lambda v$  und  $(\lambda \mathbf{1})^* = \bar{\lambda} \mathbf{1}$  folgt nun  $A^*.v = \bar{\lambda} v$  für  $A.v = \lambda v$ . Damit gilt  $AA^* = A^*A$ , d.h.  $A$  ist normal.

Da die Zerlegung in Eigenräume orthogonal ist, ist  $A$  genau dann hermitesch bzw. unitär, wenn dies für alle Einschränkungen auf die Eigenräume gilt. Hieraus folgt die zweite Behauptung sofort. ■

Wir können umgekehrt das Ergebnis aus Korollar I.4.7 auch wieder im Rahmen der involutiven Halbgruppen interpretieren.

**Bemerkung I.4.8.** (a) Ist  $G = \mathbb{Z}$  mit  $s^* = -s$ , so ist  $\widehat{G} \cong \mathbb{S}^1$ : Sei dazu  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$  ein von Null verschiedener Charakter, so folgt zunächst aus  $0 + 0 = 0$ , daß  $\chi(0)^2 = \chi(0)$  gilt, also  $\chi(0) \in \{0, 1\}$ . Aus  $\chi(0) = 0$  folgt  $\chi = 0$ , was wir ausgeschlossen haben. Also ist  $\chi(0) = 1$ .

Damit sind die von 0 verschiedenen involutiven Homomorphismen  $\chi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  via  $\chi(1) = z$  durch Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\bar{z} = \chi(1^*) = \chi(-1) = z^{-1}$  gegeben. Hieraus folgt die Behauptung.

(b) Für  $S = (\mathbb{N}_0, +)$  mit  $s^* = s$  folgt analog  $\widehat{S}_0 = \mathbb{R}$ .

(c) Für  $S = (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, +)$  mit  $(n, m)^* = (m, n)$  ergibt sich  $\widehat{S}_0 = \mathbb{C}$ , wobei wir der Zahl  $z \in \mathbb{C}$  den Charakter  $\chi$  mit  $\chi(n, m) = z^n \bar{z}^m$  zuordnen. ■

## II. Spektraltheorie in Banachalgebren

In diesem Abschnitt werden wir zuerst einige tiefer liegende Sätze aus der allgemeinen Spektraltheorie kennenlernen. Wir werden zum Beispiel zeigen, daß das Spektrum immer eine nichtleere kompakte Teilmenge der komplexen Ebene ist und daß man den Spektralradius, d.h. den Radius des kleinsten Kreises um 0, der das Spektrum enthält, schon durch die Norm ausrechnen kann. Im dritten Abschnitt werden wir uns dann der Gelfandschen Darstellungstheorie zuwenden, die der begriffliche Schlüssel zu den Spektralsätzen ist.

### II.1. Definitionen und Beispiele

**Definition II.1.1.** (a) Ein komplexer Vektorraum  $A$  mit einer bilinearen Abbildung  $A \times A \rightarrow A$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  heißt (*assoziative*) *Algebra*, wenn

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

(Assoziativgesetz) für  $x, y, z \in A$  gilt. Wie schreiben auch verkürzt  $xy$  für  $x \cdot y$ .

(1) Ein Element  $\mathbf{1}$  einer Algebra  $A$  heißt *Einselement*, wenn  $\mathbf{1}a = a\mathbf{1} = a$  für all  $a \in A$  gilt.

(2) Ein Element  $a$  einer Algebra  $A$  mit Einselement  $\mathbf{1}$  heißt *invertierbar*, wenn ein Element  $b \in A$  mit  $ab = ba = \mathbf{1}$  existiert. Da  $b$  hierdurch eindeutig bestimmt ist (Übung), nennen wir  $b$  das *Inverse von  $a$*  und schreiben dafür  $a^{-1}$ . Die Menge  $G(A)$  der invertierbaren Elemente von  $A$  ist bzgl. der Multiplikation eine Gruppe mit Einselement  $\mathbf{1}$ , die *Einheitengruppe* von  $A$ .

(b) Eine Algebra  $A$ , die gleichzeitig ein Banachraum ist, heißt *Banachalgebra*, wenn

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

für  $a, b \in A$  gilt, d.h. die Norm ist submultiplikativ. ■

**Lemma II.1.2.** *Die Multiplikation in einer Banachalgebra ist stetig.*

**Beweis.** Für  $a_n \rightarrow a$  und  $b_n \rightarrow b$  gilt

$$\|a_n b_n - ab\| = \|a_n b_n - ab_n + ab_n - ab\| \leq \|a_n - a\| \cdot \|b_n\| + \|a\| \cdot \|b_n - b\|.$$

Da  $\|b_n\|$  eine beschränkte Folge ist, folgt hieraus die Stetigkeit der Multiplikation. ■

Jetzt bringen wir auch Involutionen ins Spiel.

**Definition II.1.3.** (a) Eine *involutive Algebra*  $A$  ist eine assoziative komplexe Algebra, die zusätzlich mit einer Abbildung  $a \mapsto a^*$  versehen ist, die folgenden Bedingungen genügt:

- (1)  $(a^*)^* = a$  (Involutivität).
- (2)  $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$  (Antilinearität).
- (3)  $(ab)^* = b^* a^*$  (Antiautomorphie).

Insbesondere ist  $(A, *)$  dann eine involutive Halbgruppe.

(b) Ist  $(A, \|\cdot\|)$  eine Banachalgebra und gleichzeitig eine involutive Algebra, so daß  $\|a^*\| = \|a\|$  für alle  $a \in A$  gilt, so nennt man  $A$  eine *Banach- $*$ -Algebra*.

Gilt in einer Banach- $*$ -Algebra  $A$  sogar

$$\|aa^*\| = \|a\|^2$$

für alle  $a \in A$ , so nennt man  $A$  eine  $C^*$ -Algebra.

(c) Ist  $(A, *)$  eine kommutative involutive Algebra, so steht  $\widehat{A}$  für die Menge der von 0 verschiedenen linearen Charaktere von  $A$ . Ist  $A$  sogar eine Banach- $*$ -Algebra, so steht  $\widehat{A}$  für die Menge der stetigen nicht verschwindenden linearen Charaktere. Das ist natürlich eine mehrdeutige Notation, sie wird aber nicht zu Mißverständnissen führen.

(d) Ein Element  $x$  einer involutiven Algebra  $A$  heißt

- (1) *normal*, wenn  $xx^* = x^*x$ ,
- (2) *hermitesch*, wenn  $x = x^*$ , und
- (3) *Projektion*, wenn  $x^2 = x = x^*$ . ■

Diese Begriffsbildungen werden durch das folgende Beispiel gerechtfertigt (vgl. Satz I.2.9).

**Beispiel II.1.4.** Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $A \subseteq B(\mathcal{H})$  eine abgeschlossene involutive Unter-algebra, d.h.  $A^* \subseteq A$ , so ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Insbesondere ist  $B(\mathcal{H})$  eine  $C^*$ -Algebra (Korollar I.2.2). ■

**Lemma II.1.5.** Sei  $A$  eine involutive Algebra. Dann gilt:

- (i) *Hermitesche Elemente sind normal.*
- (ii) *Elemente der Gestalt  $xx^*$  sind hermitesch.*
- (iii) *Das Produkt zweier hermitescher Elemente  $x, y$  ist genau dann hermitesch, wenn  $xy = yx$ .*
- (iv)  *$A = A_h \oplus iA_h$ , d.h. jedes Elemente läßt sich eindeutig als  $a = b + ic$  mit hermiteschen Elementen  $b, c \in A_h$  schreiben.*
- (v) *Ein Element  $a = b + ic$  mit  $b, c \in A_h$  ist genau dann normal, wenn  $b$  und  $c$  kommutieren.*
- (vi) *Ist  $\mathbf{1} \in A$  eine Linkseins, d.h.  $\mathbf{1}a = a$  für alle  $a \in A$ , so ist  $\mathbf{1}$  ein Einselement und es gilt:*

$$(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}$$

für  $x \in G(A)$ .

- (vii) *Ist  $\|\cdot\|$  eine submultiplikative Norm auf  $A$  mit  $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$  für alle  $x \in A$ , so gilt*

$$\|x^*\| = \|x\| \quad \text{und} \quad \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

**Beweis.** (i) - (iv) Das sind alles elementare Rechnungen, die wir dem Leser zur Übung überlassen.

(v) Das folgt aus

$$aa^* = (b + ic)(b - ic) = b^2 + c^2 + i(cb - bc) \quad \text{und} \quad a^*a = (b - ic)(b + ic) = b^2 + c^2 + i(bc - cb).$$

(vi) Ist  $\mathbf{1}$  eine Linkseins, so haben wir

$$a\mathbf{1}^* = (\mathbf{1}a^*)^* = (a^*)^* = a,$$

d.h.  $\mathbf{1}^*$  ist eine Rechtseins. Also ist  $\mathbf{1}^* = \mathbf{1}\mathbf{1}^* = \mathbf{1}$ , somit  $\mathbf{1}$  hermitesch und folglich ein Einselement.

Für  $x \in G(A)$  folgt aus  $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$  sofort

$$(x^{-1})^*x^* = x^*(x^{-1})^* = \mathbf{1}$$

und damit die Behauptung.

(vii) Zunächst haben wir

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$$

und daher  $\|x\| \leq \|x^*\|$  für alle  $x \in A$ , also auch  $\|x\| \leq \|x^*\| \leq \|(x^*)^*\| = \|x\|$ . Damit erhalten wir  $\|x\| = \|x^*\|$  und

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x\|^2. \quad \blacksquare$$

**Beispiel II.1.6.** Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum und  $C_0(X)$  diejenigen stetigen Funktionen auf  $X$ , die im Unendlichen verschwinden, d.h.  $f \in C_0(X)$  genau dann, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq X$  gibt, so daß  $|f(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in X \setminus K$  gilt. Insbesondere sind alle Funktionen in  $C_0(K)$  beschränkt, also

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\} < \infty.$$

Wird  $C_0(X)$  mit dieser Norm versehen, so ist  $C_0(X)$  sogar abgeschlossen in dem Banachraum  $B(X)$  aller beschränkter Funktionen auf  $X$ , also ein Banachraum (Übung).

Mit  $f^*(x) := \overline{f(x)}$  und der punktweisen Multiplikation wird  $C_0(X)$  sogar zu einer  $C^*$ -Algebra.

Man sieht schnell, daß die Punktauswertungen

$$\delta_x : f \mapsto f(x), \quad C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$$

stetige (nichttriviale!) Charaktere sind. Wir werden später sehen, daß dies schon alle sind, d.h.

$$C_0(X)^\wedge \cong X.$$

Für  $X = \mathbb{N}$ , versehen mit der diskreten Topologie, erhalten wir  $C_0(X) \cong c_0$ , den Banachraum der Nullfolgen, und  $\hat{c}_0 \cong \mathbb{N}$ . ■

**Beispiel II.1.7.** (a) Sei  $S$  eine involutive Halbgruppe. Wir betrachten den Banachraum  $l^1(S)$  aller Funktionen  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  für die

$$\|f\|_1 := \sum_{s \in S} |f(s)| < \infty$$

ist (vgl. Satz I.1.13(ii)). Man beachte, daß unter diesen Voraussetzungen die Menge  $\{s \in S : f(s) \neq 0\}$  abzählbar sein muß. Wir versehen  $l^1(S)$  mit dem *Faltungsprodukt*

$$(f * g)(s) := \sum_{a,b \in S; ab=s} f(a)g(b)$$

und der Involution  $f^*(s) := \overline{f(s^*)}$ . Hiermit wird  $l^1(S)$  zu einer Banach- $*$ -Algebra (Übung).

Wir haben einen kanonischen Homomorphismus  $\eta: S \rightarrow l^1(S)$ , der  $s \in S$  die Funktion  $\delta_s$  mit

$$\delta_s(t) = \begin{cases} 1 & s = t \\ 0 & s \neq t \end{cases}$$

zuordnet. Nun ist

$$(\delta_s * \delta_t)(x) = \sum_{a,b \in S; ab=x} \delta_s(a)\delta_t(b) = \delta_{st}(x)$$

und wegen  $\delta_s^* = \delta_{s^*}$  gilt sogar  $\eta(s^*) = \eta(s)^*$ , d.h.  $\eta$  ist ein Homomorphismus involutiver Halbgruppen.

(b) Ist speziell  $S = (\mathbb{N}, +)$  mit  $s^* = s$ , so ist  $l^1(S) \cong l^1$  der Raum der summierbaren Folgen und das Faltungsprodukt ist gegeben durch

$$(x * y)_n = \sum_{k=0}^n x_k y_{n-k}.$$

Ist  $S: l^1 \rightarrow \mathbb{C}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n$  das Summenfunktional, so besagt die Cauchy-Produktformel für absolut konvergente Reihen nichts anderes als

$$S(x * y) = S(x) \cdot S(y).$$

Da auch  $S(x^*) = \overline{S(x)}$  gilt, ist  $S: l^1 \rightarrow \mathbb{C}$  ein Charakter der Banach- $*$ -Algebra  $l^1 = l^1(\mathbb{N})$ .

(c) Wir schauen uns nun etwas genauer an, was wir über die Charaktere der Algebra  $l^1(S)$  sagen können. Wir werden später (in Abschnitt II.2) zeigen können, daß jeder lineare Charakter der Banach- $*$ -Algebra  $l^1(S)$  automatisch stetig ist. Sei also  $\chi: l^1(S) \rightarrow \mathbb{C}$  ein stetiger linearer Charakter. Um etwas über  $\chi$  herauszufinden, beachten wir zunächst, daß für jeden Charakter  $\chi: l^1(S) \rightarrow \mathbb{C}$  natürlich  $\chi \circ \eta: S \rightarrow \mathbb{C}$  ein Charakter ist. Da  $\text{span } \eta(S)$  in  $l^1(S)$  dicht und  $\chi$  stetig ist, folgt dann

$$\chi(f) = \chi\left(\sum_{s \in S} f(s)\eta(s)\right) = \sum_{s \in S} f(s)\chi(\eta(s))$$

für alle  $f \in l^1(S)$ . Da der Dualraum von  $l^1(S)$  durch  $l^1(S)' = l^\infty(S) := B(S)$  (Raum der beschränkten Funktionen auf  $S$ ) gegeben ist (Übung), folgt hieraus, daß die Funktion  $\chi \circ \eta: S \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt ist. Umgekehrt wird für jeden beschränkten Charakter  $\gamma: S \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\chi(f) := \sum_{s \in S} f(s)\gamma(s)$  ein stetiger Charakter von  $l^1(S)$  definiert (Warum?). Wir haben hiermit gezeigt, daß

$$l^1(S)^\wedge = \widehat{S} \cap l^\infty(S).$$

(d) Für  $S = \mathbb{N}$  ergibt sich insbesondere  $l^1(\mathbb{N})^\wedge_0 \cong [-1, 1]$  (vgl. Bemerkung I.4.8(b)). Der Summationscharakter aus (b) gehört hierbei zu dem konstanten Charakter  $\chi(n) = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . ■

**Beispiel II.1.8.** (Die Wiener-Algebra) (benannt nach Norbert Wiener). Das ist die Algebra  $l^1(\mathbb{Z})$ , wobei wir  $\mathbb{Z}$  via  $n^* = -n$  als involutive Halbgruppe auffassen (vgl. Beispiel II.1.7). Wir betrachten die Elemente von  $l^1(\mathbb{Z})$  als Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . Die Involution ist dann gegeben durch  $x^* = (\overline{x_{-n}})_{n \in \mathbb{Z}}$  für  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  und die Multiplikation durch

$$(x * y)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k}.$$

In dieser abstrakten Form hat Wiener diese Algebra natürlich nicht betrachtet. Er kam von einer anderen Seite. Um die zu verstehen, ordnen wir jeder Folge  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  ihre *Fouriertransformierte*

$$\mathcal{F}(x)(z) := \widehat{x}(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^n$$

auf  $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$  zu. Wir werden später einen sehr allgemeinen Rahmen kennenlernen, in dem man Fouriertransformierte definieren kann und dieses Beispiel wird sich dem unterordnen. Nun ist

$$(1.1) \quad |\widehat{x}(z)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| \cdot |z^n| \leq \|x\|_1 < \infty.$$

Also konvergiert die Reihe, die  $\widehat{x}$  definiert, gleichmäßig. Insbesondere ist die Funktion  $\widehat{x}$  auf  $\mathbb{S}^1$  stetig. Wir hätten stattdessen natürlich auch die  $2\pi$ -periodische Funktion

$$\widehat{x}(e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{int}$$

auf  $\mathbb{R}$  betrachten können, aber wir werden später sehen, daß unser Zugang wesentliche begriffliche Vorteile hat.

Die Zuordnung  $x \mapsto \widehat{x}$  hat viele interessante Eigenschaften. Zunächst erinnern wir uns daran, daß  $C(\mathbb{S}^1)$  eine  $C^*$ -Algebra bzgl.  $f^*(z) = \overline{f(z)}$  und der punktweisen Multiplikation ist. Wir behaupten, daß die Abbildung

$$\mathcal{F}: l^1(\mathbb{Z}) \rightarrow C(\mathbb{S}^1), \quad x \mapsto \widehat{x}$$

eine Homomorphismus von Banach- $*$ -Algebren ist. Die Beziehung  $\|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|_1$  haben wir schon nachgerechnet. Weiter ist

$$\widehat{x^*}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x_{-n}} z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{x_n} z^{-n} = \overline{\widehat{x}(z)} = \widehat{x^*}(z),$$

und

$$\widehat{x}(z) \cdot \widehat{y}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^n \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} y_m z^m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k y_{n-k} z^n = (x * y)\widehat{\sim}(z)$$

folgt aus der Formel für das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen (siehe auch Beispiel II.1.7). Damit ist alles gezeigt.

Man kann die Abbildung  $\mathcal{F}$  auch umkehren. Dazu ordnet man zunächst einer stetigen Funktion  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  ihre *Fourierkoeffizienten*

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$$

zu. Für  $f = \widehat{x}$ ,  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe von  $\widehat{x}$ , daß man Integration und Grenzübergang vertauschen kann, und wir erhalten

$$\widehat{\widehat{x}}(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x_m e^{imt} e^{-int} dt = \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = x_n,$$

da  $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} dt = 2\pi \delta_{nm}$  gilt (Übung).

Natürlich liegt die Folge  $(\widehat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$  der Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion  $f$  nicht immer in  $l^1(\mathbb{Z})$ , aber es ist gar nicht so leicht, hierzu Gegenbeispiele zu finden (vgl. [We95, Satz IV.2.10]), wo gezeigt wird, daß es stetige Funktionen gibt, deren Fourierreihe

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{int}$$

nicht überall konvergiert). Die Abbildung  $\mathcal{F}$  bildet  $l^1(\mathbb{Z})$  also injektiv auf eine echte Unter algebra von  $C(\mathbb{S}^1)$  ab.

Wir können auch für die Wiener-Algebra wieder die Frage nach der Menge der Charaktere stellen. Aus Beispiel II.1.7 wissen wir schon, daß die Charaktere dieser Algebra genau den beschränkten Charakteren von  $\mathbb{Z}$  entsprechen. Nach Beispiel I.4.8(a) ist aber jeder Charakter von  $\mathbb{Z}$  beschränkt und wir erhalten damit

$$l^1(\mathbb{Z})^\wedge \cong \widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1. \quad \blacksquare$$

**Beispiel II.1.9.** Wir definieren auf dem Raum  $C_c(\mathbb{R}^n)$  der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eine Involution  $f^*(x) := \overline{f(-x)}$ , und das Faltungsprodukt

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy.$$

Man beachte hierbei, daß dieses Integral wohldefiniert ist, da für jedes  $x$  der Integrand kompakten Träger hat. Weiter liefert es wieder eine stetige Funktion mit kompaktem Träger (Übung).

Wir zeigen zunächst, daß wir so eine kommutative involutive Algebra erhalten. Für die Assoziativität rechnen wir, unter Verwendung der Tatsache, daß man die Integrationsreihenfolge

bei Riemann-Integralen vertauschen kann, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 ((f * g) * h)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y)h(x - y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z) dz h(x - y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(y - z)h(x - y) dy dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \int_{\mathbb{R}^n} g(y - z)h(x - y) dy dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)h(x - z - y) dy dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z)(g * h)(x - z) dz \\
 &= (f * (g * h))(x).
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 (f * g)^*(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(y)g(-x - y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-y)g(-x + y)} dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f^*(y)g^*(x - y) dy = (f^* * g^*)(x)
 \end{aligned}$$

und

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(x + y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = (g * f)(x).$$

Also ist  $C_c(\mathbb{R}^n)$  eine kommutative involutive Algebra.

Jetzt definieren wir eine Norm durch

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

Wir behaupten, daß  $C_c(\mathbb{R}^n)$  hiermit zu einer normierten involutiven Algebra wird, d.h.

$$\|f^*\|_1 = \|f\|_1 \quad \text{und} \quad \|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Hierzu rechnen wir

$$\|f^*\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} |\overline{f(-x)}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(-x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_1$$

und

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y) dy \right| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \cdot |g(x - y)| dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x - y)| dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx dy = \|g\|_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy = \|g\|_1 \|f\|_1.
 \end{aligned}$$

Sei jetzt  $L^1(\mathbb{R}^n)$  die Vervollständigung des normierten Raums  $C_c(\mathbb{R}^n)$  bzgl.  $\|\cdot\|_1$ . Wegen der Stetigkeit von Multiplikation und Inversion lassen sich beide auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen und wir erhalten so eine Banach-\* -Algebra, die man die  $L^1$ -Algebra von  $\mathbb{R}^n$  nennt.

Jetzt interessieren wir uns wieder für die Charaktere dieser Algebra. Einige lassen sich sofort angeben. Sei dazu

$$\chi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, y \mapsto e^{i\langle x, y \rangle}.$$



Dann ist  $\chi_x$  ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Wegen der Beschränktheit von  $\chi_x$  erhalten wir ein stetiges lineares Funktional  $\tilde{\chi}_x: L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{\chi}_x(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e_x(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} dy.$$

Wir zeigen, daß hierdurch ein Charakter von  $L^1(\mathbb{R}^n)$  definiert wird. In der Tat ist

$$\chi_x(f^*) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(-y)}e^{i\langle x,y \rangle} dy = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(-y)e^{-i\langle x,y \rangle} dy} = \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} dy} = \overline{\chi_x(f)}$$

und

$$\begin{aligned} \chi_x(f * g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(z-y)e^{i\langle x,z \rangle} dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} g(z-y)e^{i\langle x,z-y \rangle} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} g(z-y)e^{i\langle x,z-y \rangle} dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} g(z)e^{i\langle x,z \rangle} dz dy \\ &= \chi_x(g) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle x,y \rangle} dy \\ &= \chi_x(g)\chi_x(f). \end{aligned}$$

Wir haben also für jedes  $x \in \mathbb{R}$  einen Charakter von  $L^1(\mathbb{R}^n)$  gefunden. In diesem Sinn können wir also jedem Element  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  die Funktion

$$\widehat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \chi_x(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{i\langle y,x \rangle} dy$$

zuordnen. Man nennt diese Funktion die *Fouriertransformierte* von  $f$ . Die Stetigkeitseigenschaften dieser Funktion werden wir später untersuchen, wenn wir uns mit der Topologie auf der Menge aller Charaktere beschäftigen. Was wir oben gezeigt haben läßt sich prägnant formulieren als

$$\widehat{f^*} = (\widehat{f})^* \quad \text{und} \quad \widehat{(f * g)} = \widehat{f} * \widehat{g}$$

für alle  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Da wir nun einige Charaktere von  $L^1(\mathbb{R}^n)$  kennen, stellt sich natürlich die Frage, ob dies schon alle sind. Das ist tatsächlich so, aber wir werden uns erst später mit dieser Frage beschäftigen, wenn wir sie in einem allgemeineren Kontext behandeln können. ■

## II.2. Spektraltheorie in Banachalgebren

**Definition II.2.1.** Sei  $A$  eine Banachalgebra mit Einselement  $\mathbf{1}$ . Für  $a \in A$  heißt

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C}: a - \lambda\mathbf{1} \notin G(A)\}$$

das *Spektrum* von  $a$  und  $\rho(a) := \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$  die *Resolventenmenge*. Die Zahl

$$r(a) := \sup\{|z|: z \in \sigma(a)\} \in [0, \infty[$$

heißt *Spektralradius*. Sie ist der Radius der kleinsten abgeschlossenen Kreisscheibe in  $\mathbb{C}$  mit Zentrum in  $0$ , die das Spektrum  $\sigma(a)$  enthält. Da wir noch nicht wissen, daß  $\sigma(a)$  immer beschränkt ist, müssen wir zunächst auch  $r(a) = \infty$  zulassen. ■

### Das fehlende Einselement

Ist  $A$  eine Banachalgebra ohne Einselement, so macht es zunächst keinen Sinn vom Spektrum eines Elements von  $A$  oder von Invertierbarkeit zu reden. Um dem abzuhelfen, kann man sich eine größere Banachalgebra verschaffen, die sowohl  $A$  als auch ein Einselement enthält.

**Lemma II.2.2.** Sei  $A$  eine Banachalgebra und  $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$  mit der Multiplikation

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) := (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

und der Norm  $\|(a, \lambda)\| := \|a\| + |\lambda|$ . Dann ist  $\tilde{A}$  eine Banachalgebra mit dem Einselement  $(0, 1)$ .

**Beweis.** Es ist leicht zu sehen, daß die angegebene Norm  $\tilde{A}$  zu einem Banachraum macht (Nachweis als Übung). Die Assoziativität der Multiplikation läßt sich ebenfalls leicht nachrechnen und die Bilinearität ist klar. Weiter ist klar, daß  $(0, 1)$  ein Einselement ist.

Für die Submultiplikativität der Norm rechnen wir

$$\begin{aligned} \|(a, \lambda)(b, \mu)\| &= \|(ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)\| = \|ab + \lambda b + \mu a\| + |\lambda\mu| \\ &\leq \|a\| \cdot \|b\| + |\lambda| \cdot \|b\| + |\mu| \cdot \|a\| + |\lambda| \cdot |\mu| = \|(a, \lambda)\| \cdot \|(b, \mu)\|. \end{aligned}$$

■

**Definition II.2.3.** Im folgenden werden wir der Konvention folgen, daß für eine Algebra  $A$  mit Einselement immer  $\tilde{A} := A$  sein soll. Falls  $A$  kein Einselement hat, steht  $\tilde{A}$  für die Algebra  $A \oplus \mathbb{C}$ , die wir in Lemma II.2.2 betrachtet haben.

Wir definieren nun allgemein das *Spektrum eines Elements*  $a$  einer komplexen Algebra  $A$  durch

$$\sigma(a) := \sigma_{\tilde{A}}(a).$$

Hat  $A$  ein Einselement, so ist  $\tilde{A} = A$  und diese Definition ist mit der bisherigen kompatibel. ■

Möchte man Spektren von Elementen in einer Banachalgebra mit Einselement untersuchen, so ist es bequem, wenn  $\|\mathbf{1}\| = 1$  gilt. Wir zeigen jetzt, daß man das immer erreichen kann.

**Satz II.2.4.** Ist  $A$  eine Banachalgebra mit  $\mathbf{1}$ , so existiert auf  $A$  eine zu  $\|\cdot\|$  äquivalente Norm  $\|\cdot\|_0$  mit

$$\|\mathbf{1}\|_0 = 1 \quad \text{und} \quad \|ab\|_0 \leq \|a\|_0 \cdot \|b\|_0.$$

**Beweis.** Zu  $a \in A$  betrachten wir die Linksmultiplikation  $L_a: A \rightarrow A, x \mapsto ax$  und setzen

$$\|a\|_0 := \|L_a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ax\| \leq \|a\|.$$

Da die Abbildung  $L: a \rightarrow L_a, A \rightarrow B(A)$  wegen  $L_a \cdot \mathbf{1} = a$  injektiv ist, ist  $\|\cdot\|_0$  eine Norm auf  $A$ . Weiter gilt  $\|\mathbf{1}\|_0 = 1$  und

$$\|ab\|_0 = \|L_{ab}\| = \|L_a L_b\| \leq \|L_a\| \cdot \|L_b\| = \|a\|_0 \cdot \|b\|_0.$$

Bleibt zu zeigen, daß  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|_0$  äquivalente Normen sind. Hierzu beachten wir lediglich, daß

$$\|a\| = \|a\mathbf{1}\| \leq \|L_a\| \|\mathbf{1}\| = \|a\|_0 \cdot \|\mathbf{1}\| \leq \|a\|_0 \cdot \|\mathbf{1}\|$$

gilt. ■

Ab jetzt nehmen wir für alle Banachalgebren mit  $\mathbf{1}$  immer an, daß  $\|\mathbf{1}\| = 1$  gilt.

**Satz II.2.5.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra. Dann gilt:

- (i) Ist  $L_a: x \mapsto xa$  die Linksmultiplikation, so gilt  $\|a\| = \|L_a\|$ . Insbesondere ist  $\|\mathbf{1}\| = 1$ , wenn  $\mathbf{1}$  ein Einselement in  $A$  ist.
- (ii) Hat  $A$  kein Einselement, so ist die Banachalgebra  $\tilde{A}$  eine  $C^*$ -Algebra bzgl.  $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$  und der Norm

$$\|(a, \lambda)\| := \|L_{(a, \lambda)}\|,$$

wobei  $L_{(a, \lambda)}.x = ax + \lambda x$  der zugehörige Multiplikationsoperator auf  $A$  ist.

**Beweis.** (a) Die Ungleichung  $\|L_a\| \leq \|a\|$  folgt allgemein aus der Submultiplikativität der Norm auf  $A$ . Andererseits gilt in  $C^*$ -Algebren die Relation  $\|aa^*\| = \|a\|^2 = \|a\| \cdot \|a^*\|$ . Hieraus erkennt man sofort, daß auch  $\|L_a\| \geq \|a\|$  für alle  $a \in A$  gilt.

Ist  $\mathbf{1} \in A$  ein Einselement, so folgt hieraus  $\|\mathbf{1}\| = 1$  wegen  $L_{\mathbf{1}} = \text{id}_A$ .

(b) Sei  $L: \tilde{A} \rightarrow B(A)$  definiert durch  $L(a, \lambda) = L_{(a, \lambda)}$ . Wir zeigen zuerst, daß  $L$  injektiv ist. Sei also  $L(a, \lambda) = 0$ . Ist  $\lambda = 0$ , so folgt  $L_a = 0$ , also  $a = 0$  wegen (i). Ist  $\lambda \neq 0$ , so dürfen wir o.B.d.A.  $\lambda = -1$  annehmen. Dann ist  $a.x - x = 0$  für alle  $x \in A$ , d.h.  $a$  ist eine Linkseins. Mit Lemma II.1.5(vi) sehen wir damit, daß  $a$  ein Einselement ist, was unserer Annahme widerspricht. Hieraus folgt, daß  $L$  injektiv ist, und damit, daß durch

$$\|(a, \lambda)\| := \|L(a, \lambda)\|$$

auf  $\tilde{A}$  eine Norm definiert wird, die nach (i) eine Fortsetzung der Norm auf  $A$  ist.

Wir zeigen, daß  $\tilde{A}$  vollständig ist. Da  $A \cong A \times \{0\} \subseteq \tilde{A}$  ein vollständiger Unterraum ist, ist  $A$  in  $\tilde{A}$  abgeschlossen. Damit ist das lineare Funktional  $l: (a, \lambda) \mapsto \lambda$  stetig, folglich auch die Projektion

$$P: \tilde{A} \rightarrow A, x \mapsto x - l(x)\mathbf{1}.$$

Ist nun  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\tilde{A}$ , so ist auch  $(P(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $A$ , also konvergent gegen ein Element  $a \in A$ . Ebenso konvergiert  $l(x_n)$  gegen  $\lambda \in \mathbf{1}$  und wir erhalten  $x_n \rightarrow (a, \lambda)$ . Also ist  $\tilde{A}$  vollständig, d.h. eine Banach-Algebra.

Wegen Lemma II.1.5(viii) haben wir noch  $\|x\|^2 \leq \|x^*x\|$  zu zeigen. Für jedes  $r < \|x\|$  existiert dann ein  $y \in A$  mit  $\|y\| \leq 1$  und  $\|xy\| \geq r$ . Wegen  $xy \in A$  haben wir dann

$$\|x^*x\| \geq \|y^*(x^*x)y\| = \|(xy)^*xy\| = \|xy\|^2 \geq r^2,$$

folglich  $\|x^*x\| \geq \|x\|^2$ . Zusammenfassend haben wir gezeigt, daß  $\tilde{A}$  mit der angegebenen Norm, Involution und Multiplikation eine  $C^*$ -Algebra ist. ■

Aus Satz II.2.5(i) erkennen wir insbesondere, daß für eine  $C^*$ -Algebra das Verfahren aus Lemma II.2.2 keine neue Norm liefert. Wir werden später sehen, daß es auf einer  $C^*$ -Algebra sowieso nur eine Norm gibt, die sie zu einer  $C^*$ -Algebra macht.

Um ein besseres Gefühl für den Begriff des Spektrums zu bekommen, betrachten wir jetzt einige zentrale Beispiele.

**Beispiel II.2.6.** Ist  $X$  ein lokalkompakter Raum, der nicht kompakt ist und  $A = C_0(X)$  die  $C^*$ -Algebra der Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, so hat  $A$  kein Einselement. Die Algebra  $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$  kann man nun als Unter algebra der  $C^*$ -Algebra  $BC(X)$  der beschränkten stetigen Funktionen auf  $X$  auffassen, indem man  $(0, 1)$  die konstante Funktion 1 zuordnet. Zur Übung zeige man, daß diese Einbettung  $\tilde{A} \rightarrow BC(X)$  eine Isometrie ist, d.h.

$$\|a\| = \sup\{|a(x)|: x \in X\}$$

für alle  $a \in \tilde{A}$ . Hinweis: Man verwende den Satz von Urysohn: Zu jeder kompakten Teilmenge  $K \subseteq X$  und jeder offenen Umgebung  $U$  von  $K$  existiert eine stetige Funktion  $f: X \rightarrow [0, 1]$  mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in K \\ 0 & \text{für } x \in X \setminus U. \end{cases} \quad \blacksquare$$

**Beispiel II.2.7.** Sei  $X$  ein kompakter Raum und  $A = C(X)$  die  $C^*$ -Algebra aller stetiger Funktionen auf  $X$ . Wir wollen das Spektrum einer Funktion  $f \in A$  bestimmen. Dazu überlegen wir uns zuerst, daß  $f \in G(A)$  äquivalent ist zu  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ . Ist  $f$  invertierbar, so ist  $f(x)f^{-1}(x) = 1$  und damit  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ . Ist andererseits  $f(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$ , so ist die Funktion  $x \mapsto f(x)^{-1}$  stetig und eine Inverse von  $f$ .

Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  ist die Funktion  $f - \lambda \mathbf{1}$  also genau dann invertierbar, wenn  $f$  niemals den Wert  $\lambda$  annimmt, folglich

$$\sigma(f) = f(X).$$

Das Spektrum des Elements  $f \in A$  stimmt mit dem Bild der Funktion  $f$  überein.

Ist  $X$  lokalkompakt und nicht kompakt und  $A = C_0(X)$ , so betrachten wir die Einbettung  $\tilde{A} \subseteq C(X)$  als den Raum derjenigen Funktionen, die im Unendlichen konstant werden (vgl. Beispiel II.2.6). Ist  $f = (f_0, \lambda) \in \tilde{A}$  invertierbar, so hat  $f$  natürlich keine Nullstelle und es gilt  $\lambda \neq 0$ . Ist dies umgekehrt der Fall, so gilt  $f^{-1} - \frac{1}{\lambda} \in C_0(X)$  (Nachrechnen!), also ist  $f^{-1} = (f^{-1} - \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}) \in \tilde{A}$  ein Inverses zu  $f$ . Wir haben also

$$G(\tilde{A}) = \{(f, \lambda) \in \tilde{A} : 0 \notin f(X), \lambda \neq 0\}$$

und damit erhalten wir für  $f \in A = C_0(X)$  die Beziehung

$$\sigma(f) = f(X) \cup \{0\}. \quad \blacksquare$$

**Beispiel II.2.8.** Sei  $A \subseteq B(\mathbb{C}^n)$  eine Algebra von  $n \times n$ -Matrizen, die  $\mathbf{1}$  enthält. Wäre dies nicht der Fall, so könnten wir  $A$  durch  $\tilde{A} \cong A + \mathbb{C}\mathbf{1}$  ersetzen. Wir interessieren uns für das Spektrum eines Elements  $x \in A$ . Dazu haben wir in erster Linie zu entscheiden, wann ein Element  $x \in A$  invertierbar ist, d.h. in  $G(A)$  liegt.

Wir behaupten, daß dies genau dann der Fall ist, wenn  $x$  eine bijektive lineare Abbildung ist. Ist  $x$  in  $A$  invertierbar, so natürlich auch als lineare Abbildung. Sei umgekehrt  $x$  als lineare Abbildung invertierbar. Wir müssen zeigen, daß  $x^{-1} \in A$  ist. Dazu betrachten wir die Abbildung  $L_x: A \rightarrow A, y \mapsto xy$ . Diese Abbildung ist injektiv, da  $x$  in  $B(\mathbb{C}^n)$  invertierbar ist. Da  $A$  endlichdimensional ist, muß sie auch surjektiv sein. Es existiert also ein  $y \in A$  mit  $L_x(y) = xy = \mathbf{1}$ , folglich ist  $y = x^{-1} \in A$ .

Wir haben also gezeigt, daß

$$G(A) = A \cap \text{GL}(n, \mathbb{C}) = \{a \in A : \det(a) \neq 0\}.$$

Damit folgt sofort, daß  $\sigma(a)$  genau aus den Zahlen  $\lambda \in \mathbb{C}$  besteht, für die  $a - \lambda \mathbf{1}$  nicht injektiv ist, d.h.  $\sigma(a)$  ist die Menge der Eigenwerte der Matrix  $a$ . Insbesondere hängt das Spektrum gar nicht von der Algebra  $A$  ab, die wir betrachten. ■

### Elementare Eigenschaften des Spektrums

In Beispiel II.2.8 haben wir gesehen, daß für komplexe Matrizen das Spektrum gerade aus der Menge der Eigenwerte besteht. Insbesondere ist es nicht leer. In der linearen Algebra gewinnt man diesen Satz aus der algebraischen Abgeschlossenheit des Körpers  $\mathbb{C}$ . In diesem Abschnitt werden wir endlich zeigen, daß das Spektrum eines Elements einer komplexen Banachalgebra auch nicht leer ist. Hierzu werden wir zwei Resultate aus der Funktionentheorie benötigen: Den Satz von Liouville und einen Satz über die Konvergenz von Laurentreihen holomorpher Funktionen.

Der folgende Satz zeigt, welche weitreichenden Folgerungen aus dem Studium der geometrischen (Neumannschen) Reihe in Banachalgebren gezogen werden können.

**Satz II.2.9.** Für jede Banachalgebra mit  $\mathbf{1}$  gilt:

(i) Für  $\|x\| < 1$  ist  $\mathbf{1} - x$  invertierbar, das Inverse wird durch die Neumannsche Reihe

$$(\mathbf{1} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

dargestellt, und  $\|(\mathbf{1} - x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|x\|}$  sowie  $\|(\mathbf{1} - x)^{-1} - \mathbf{1}\| \leq \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}$ .

(ii)  $G(A)$  ist eine offene Teilmenge von  $A$ . Genauer ist für jedes Element  $a \in A$  die Kugel mit dem Radius  $\frac{1}{\|a^{-1}\|}$  in  $G(A)$  enthalten. Ferner ist  $G(A)$  eine topologische Gruppe, d.h. Multiplikation und Inversion sind stetige Abbildungen.

(iii) Für jedes  $a \in A$  ist  $\sigma(a)$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und es gilt  $r(a) \leq \|a\|$ .

(iv) Die Resolventenfunktion

$$R: \rho(a) \rightarrow A, \quad \lambda \mapsto (a - \lambda \mathbf{1})^{-1}$$

ist stetig. Weiter ist sie sogar analytisch, d.h. sie wird in einer Umgebung eines jeden Punktes  $\lambda_0 \in \rho(a)$  durch eine absolut konvergente Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^n$$

mit  $a_n(\lambda_0) \in A$  dargestellt.

**Beweis.** (i) Die absolute Konvergenz der Neumannschen Reihe folgt aus

$$(2.1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \|x^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|} < \infty.$$

Sei  $y := \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Dann ist

$$y(\mathbf{1} - x) = (\mathbf{1} - x)y = (\mathbf{1} + x + x^2 + x^3 + \dots) - (x + x^2 + x^3 + \dots) = \mathbf{1}.$$

Die Abschätzung der Norm von  $y$  folgt sofort aus (2.1). Die zweite Abschätzung folgt aus

$$\|y - \mathbf{1}\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} x^n \right\| \leq \|x\| \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}.$$

Aus dieser Abschätzung ersehen wir insbesondere, daß die Inversion in  $\mathbf{1}$  stetig ist, denn für  $x \rightarrow 0$  zeigt sie  $(\mathbf{1} - x)^{-1} \rightarrow \mathbf{1}$ .

(ii) Sei  $a \in G(A)$  und  $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ . Dann ist  $a - x = a(\mathbf{1} - a^{-1}x)$  und  $\|a^{-1}x\| \leq \|a^{-1}\|\|x\| < 1$ . Nach (i) ist also  $\mathbf{1} - a^{-1}x \in G(A)$ , und damit auch  $a - x \in G(A)$ . Da  $x$  beliebig war, folgt hieraus die erste Behauptung.

Um zu sehen, daß  $G(A)$  eine topologische Gruppe ist, haben wir die Stetigkeit der Multiplikation  $G(A) \times G(A) \rightarrow G(A)$  und der Inversion  $G(A) \rightarrow G(A)$  zu zeigen. Die Stetigkeit der Multiplikation in  $A$  haben wir schon in Lemma II.1.2 gezeigt. Durch Einschränkung folgt die Stetigkeit der Multiplikation in  $G(A)$ .

Jetzt zeigen wir die Stetigkeit der Inversion in  $g \in G(A)$ . Sei dazu  $\|x\| < \|a^{-1}\|^{-1}$ . Dann ist  $a - x \in G(A)$  und

$$(a - x)^{-1} = (\mathbf{1} - a^{-1}x)^{-1}a^{-1}.$$

Wegen der Stetigkeit der Multiplikation folgt die Stetigkeit der Inversion in  $g$  nun aus der Stetigkeit der Inversion in  $\mathbf{1}$  (siehe (i)).

(iii) Da die Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow A, \lambda \mapsto a - \lambda \mathbf{1}$  stetig ist, folgt aus (ii) insbesondere, daß  $\rho(a)$  offen ist. Also ist  $\sigma(a)$  abgeschlossen.

Für  $\lambda > \|a\|$  ist

$$\lambda \mathbf{1} - a = \lambda(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a),$$

Wobei  $\|\lambda^{-1}a\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$  ist. Aus (i) folgt nun  $\mathbf{1} - \lambda^{-1}a \in G(A)$ , also  $\lambda\mathbf{1} - a \in G(A)$ , d.h.  $\lambda \in \rho(a)$ . Damit ist  $r(a) \leq \|a\|$  und wir sehen, daß das Spektrum beschränkt ist. Da wir oben schon gesehen hatten, daß es abgeschlossen ist, ist es kompakt.

(iv) Die Stetigkeit der Resolventenfunktion folgt sofort aus der Stetigkeit der Inversion in  $G(A)$  (siehe (ii)).

Sei  $\lambda_0 \in \rho(a)$ , d.h.  $a - \lambda_0\mathbf{1} \in G(A)$  und  $r = \|R(\lambda_0)\|^{-1}$ . Für  $|\lambda - \lambda_0| < r$  folgt  $\lambda \in \rho(a)$  aus (ii). Weiter liefert der Beweis von (ii) auch eine Formel für  $R(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= (\lambda\mathbf{1} - a)^{-1} = ((\lambda_0\mathbf{1} - a) - (\lambda_0 - \lambda))^{-1} \\ &= R(\lambda_0)(\mathbf{1} - R(\lambda_0)(\lambda_0 - \lambda))^{-1} = R(\lambda_0) \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda_0)^n (\lambda_0 - \lambda)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda_0)^{n+1} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n. \end{aligned}$$

Da obige Reihe wegen  $\|R(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)\| = |\lambda - \lambda_0| \cdot \|R(\lambda_0)\| < 1$  konvergiert, haben wir damit auch schon (iv) gezeigt. ■

Wie schon einleitend erwähnt, werden wir jetzt zwei Sätze aus der Funktionentheorie benötigen. Den ersten, der die Darstellbarkeit von analytischen Funktionen auf Ringgebieten durch Laurentreihen betrifft, geben wir im wesentlichen ohne Beweis an. Den anderen werden wir daraus ableiten. Eine ausführlichere Diskussion und detaillierte Beweise findet man z.B. in W. Rudin : "Real and Complex Analysis".

**Theorem II.2.10.** Sind  $0 < r < R$ ,  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion, so läßt sich  $f$  eindeutig durch die Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

in dem Sinne darstellen, daß sie für alle  $z \in \Omega$  gegen den Wert von  $f$  konvergiert. Die Koeffizienten erhält man durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) e^{-int} dt$$

für jedes  $\rho \in ]r, R[$ .

**Beweis.** Wir zeigen nur, wie man aus der Darstellbarkeit von  $f$  durch eine Laurentreihe die Formel für die Koeffizienten ableitet: Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Laurentreihe auf jedem Kreis mit Radius  $\rho \in ]r, R[$  dürfen wir Integration und Summation vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) e^{-int} dt &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_m \rho^m e^{imt} e^{-int} dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} a_m \rho^m e^{i(m-n)t} dt \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \rho^m 2\pi \delta_{nm} \\ &= 2\pi a_n \rho^n. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Formel für  $a_n$  sofort. ■

Man vergleiche die Argumente aus dem vorangegangenen Beweis mit denen aus Beispiel II.1.8 über die Wiener-Algebra.

Als wichtige Folgerung aus Theorem II.2.10 erhalten wir:

**Satz II.2.11.** (Satz von Liouville) *Ist  $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte analytische Funktion, so ist  $f$  konstant.*

**Beweis.** Nach Theorem II.2.10 ist  $f$  auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  durch eine Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

darstellbar und für jedes  $n \in \mathbb{Z}$  und jedes  $\rho > 0$  haben wir die Formel

$$a_n = \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) e^{-int} dt.$$

Hieraus erhalten wir mit  $\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)|: z \in \mathbb{C}\}$  sofort die Abschätzung

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} \|f\|_\infty dt \leq \frac{\|f\|_\infty}{\rho^n}.$$

Ist  $n < 0$ , so erhalten wir mit  $\rho \rightarrow 0$ , daß  $a_n = 0$ . Für  $n > 0$  erhalten wir für  $\rho \rightarrow \infty$  auch  $a_n = 0$ . Also ist  $f(z) = a_0$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ , d.h.  $f$  ist konstant. ■

Bevor wir hieraus Konsequenzen für das Spektrum ableiten, zuerst ein kleines Lemma, das zwar unscheinbar aussieht, aber wichtige Konsequenzen hat.

**Lemma II.2.12.** *Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit*

$$0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$$

*für  $n, m \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $a_n^{\frac{1}{n}}$  gegen  $\inf\{a_n^{\frac{1}{n}}: n \in \mathbb{N}\}$ .*

**Beweis.** Sei  $a := \inf\{a_n^{\frac{1}{n}}: n \in \mathbb{N}\}$  und  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $a_N^{\frac{1}{N}} < a + \varepsilon$  und setzen  $b := \max\{a_1, \dots, a_N\}$ . Eine natürliche Zahl  $n$  schreiben wir in der Form  $n = kN + r$  mit  $r \in \{1, \dots, N\}$ . Dann ist

$$a_n^{\frac{1}{n}} = a_{kN+r}^{\frac{1}{kN+r}} \leq (a_N^k a_r)^{\frac{1}{kN+r}} \leq (a + \varepsilon)^{\frac{kN}{kN+r}} b^{\frac{1}{kN+r}} = (a + \varepsilon)(a + \varepsilon)^{-\frac{r}{kN+r}} b^{\frac{1}{kN+r}} \leq a + 2\varepsilon$$

falls  $n$  groß genug ist. Hierbei verwenden wir, daß  $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$  für alle  $c > 0$  gilt. Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Theorem II.2.13.** (Hauptsatz über das Spektrum) *Für ein Element  $a$  einer Banachalgebra  $A$  gilt:*

- (i) *Das Spektrum  $\sigma(a)$  ist nicht leer.*
- (ii)  $r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

**Beweis.** (i) Wir nehmen  $\sigma(a) = \emptyset$  an. Dann ist die Resolventenabbildung auf ganz  $\mathbb{C}$  definiert und nach Theorem II.2.10 eine analytische Funktion  $R: \mathbb{C} \rightarrow A$ .

Für  $\lambda > \|a\|$  haben wir gemäß Satz II.2.9

$$\|R(\lambda)\| = \|(\lambda \mathbf{1} - a)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \cdot \|(\mathbf{1} - \lambda^{-1}a)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|a\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

Hieraus erkennen wir, daß  $R$  auf der Menge  $\{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > 2\|a\|\}$  beschränkt ist.

Weiter wissen wir aus Satz II.2.9(iv), daß  $R$  stetig ist und somit auf jeder kompakten Kreisscheibe beschränkt. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß  $R: \mathbb{C} \rightarrow A$  eine beschränkte analytische Funktion ist.

Jetzt wenden wir den Satz von Liouville an. Für jedes stetige lineare Funktional  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $f \circ R: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  nun eine beschränkte analytische Funktion, nach dem Satz von Liouville also

$f \circ R(\lambda) = f \circ R(0) = f(-a^{-1})$ . Da die stetigen linearen Funktionale auf  $A$  die Punkte trennen (Satz von Hahn-Banach, vgl. [Ne96]), erhalten wir hiermit  $R(\lambda) = -a^{-1}$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Also ist  $\lambda \mathbf{1} - a = R(\lambda)^{-1} = -a$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ , und das ist ein Widerspruch. Wir haben also gezeigt, daß  $\sigma(a)$  nicht leer sein kann.

(ii) Sei  $s(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$  der nach Lemma II.2.12 existierende Grenzwert.

Wir zeigen, daß für  $\lambda > s(a)$  auch  $\lambda \in \rho(a)$  ist. Hierzu beachten wir zunächst, daß wegen

$$\limsup_{n \in \mathbb{N}} \|(\lambda^{-1}a)^n\|^{\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}}{|\lambda|} = \frac{s(a)}{|\lambda|} < 1$$

die Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n$  konvergiert. Wie im Beweis von Satz II.2.9 erhält man mit einer einfachen Rechnung

$$(2.2) \quad R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n.$$

Damit ist  $\lambda \in \rho(a)$  und folglich  $r(a) \leq s(a)$ .

Jetzt zeigen wir noch  $s(a) \leq r(a)$ . Sei dazu  $r > r(a)$  und  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r(a)\} \subseteq \rho(a)$ . Für jedes stetige lineare Funktional  $f \in A'$  ist dann  $f \circ R: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion und hat nach Theorem II.2.10 eine konvergente Laurentreihe

$$f \circ R(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Andererseits wissen wir aus (2.2), daß für  $|z| > \|a\|$  die Resolvente durch die Reihe

$$R(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} a^n$$

dargestellt wird. Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten  $a_n$  folgt damit  $a_n = 0$  für  $n \geq 0$  und  $a_{-1-n} = f(a^n)$  für  $n \geq 0$ . Aus der Konvergenz der Reihe für  $f \circ R(z)$  erhalten wir also insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n) z^{-n} = 0$$

für  $|z| > r(a)$ , d.h. die Folge  $(z^{-n} a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  konvergiert in der schwachen Topologie gegen 0. Mit dem Satz von Banach-Steinhaus (vgl. [Ne96, Satz III.2.5, Folg. V.2.4]) sehen wir jetzt, daß die Folge  $(z^{-n} a^n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist. Es existiert also ein  $C > 0$  mit  $\|a^n\| \leq C|z|^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Folglich ist  $s(a) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{n}} |z| = |z|$ . Hieraus schließen wir  $s(a) \leq r(a)$ , da  $z \in \Omega$  beliebig war. ■

Ein interessanter Aspekt des Hauptsatzes über das Spektrum ist, daß er ein Bindeglied zwischen Topologie und Algebra darstellt. Das Spektrum eines Elements  $a$  einer Banachalgebra  $A$  war zunächst rein über die algebraische Struktur definiert, ebenso der Spektralradius  $r(a)$ . Theorem II.2.13 gibt uns nun eine Formel für  $r(a)$ , die sich auf die analytische Struktur von  $A$ , d.h. auf die Struktur von  $A$  als Banachraum bezieht. Sätze von diesem Typ, d.h. Sätze, die nicht evidente Verbindungen zwischen verschiedenen Aspekten, die aus verschiedenen mathematischen Gebieten kommen, herstellen, sind grundlegend in vielen mathematischen Theorien. Man sollte sie daher als besonders wertvoll betrachten.

### Anwendungen des Hauptsatzes über das Spektrum

Um die Tragweite des Hauptsatzes über das Spektrum besser zu verstehen, betrachten wir zuerst einige wichtige Folgerungen.



**Satz II.2.14.** (Gelfand-Mazur) *Sei  $A$  eine Banachalgebra mit  $\mathbf{1}$ , in der jedes von  $0$  verschiedene Element invertierbar ist. Dann ist  $A \cong \mathbb{C}$ , d.h.  $A$  ist eindimensional.*

**Beweis.** Sei  $a \in A$ . Nach dem Hauptsatz über das Spektrum existiert ein  $\lambda \in \sigma(a)$ . Da  $a - \lambda\mathbf{1}$  nicht invertierbar ist, muß  $a - \lambda\mathbf{1} = 0$  sein, d.h.  $a = \lambda\mathbf{1}$ . ■

**Lemma II.2.15.** *Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$ . Dann gilt:*

- (i)  $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)} = \{\bar{z} : z \in \sigma(a)\}$ .
- (ii) Ist  $a \in A$  normal, so ist  $r(a) = \|a\|$ .
- (iii)  $\|a\| = \sqrt{\rho(a^*a)}$ .

**Beweis.** (i) Nach Lemma II.1.5(vi) ist  $a - \lambda\mathbf{1}$  in  $\tilde{A}$  genau dann invertierbar, wenn  $(a - \lambda\mathbf{1})^* = a^* - \bar{\lambda}\mathbf{1}$  invertierbar ist. Hieraus folgt die Behauptung sofort.

(ii) Da  $a$  normal ist, haben wir

$$\|a^2\|^2 = \|a^2(a^2)^*\| = \|aa^*aa^*\| = \|(aa^*)(aa^*)^*\| = \|aa^*\|^2 = \|a\|^4.$$

Damit ist  $\|a^2\| = \|a\|^2$ . Da alle Potenzen von  $a$  ebenfalls normal sind, ergibt sich hieraus induktiv die Formel  $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir erhalten also mit der Formel für den Spektralradius

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|.$$

(iii) Das ist eine direkte Konsequenz von (ii) und der Definition einer  $C^*$ -Algebra. ■

**Beispiel II.2.16.** Zunächst könnte man denken, daß der Spektralradius nicht allzu verschieden von der Norm eines Elements ist. Die eklatantesten Gegenbeispiele für diese Vermutung erhält man wie folgt:

Sei  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ ,  $A = B(\mathbb{C}^n)$  die  $C^*$ -Algebra der komplexen  $n \times n$ -Matrizen, und  $a$  definiert durch

$$a.(z_1, \dots, z_n) := (z_2, \dots, z_n, 0).$$

Dann gilt

$$a^*. (z_1, \dots, z_n) := (0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}).$$

Wir erhalten damit

$$a^*a.(z_1, \dots, z_n) = (0, z_2, \dots, z_n).$$

Also ist  $a^*a$  eine orthogonale Projektion und folglich  $1 = \|a^*a\| = \|a\|^2$ , d.h.  $\|a\| = 1$ . Andererseits ist  $a^n = 0$ . Wir haben also

$$r(a) = 0 \quad \text{und} \quad \|a\| = 1. \quad \blacksquare$$

**Lemma II.2.17.** *Ist  $f: A \rightarrow B$  ein Homomorphismus komplexer Algebren mit  $\mathbf{1}$ , d.h. gilt auch  $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , so ist  $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$  für alle  $a \in A$ .*

**Beweis.** Wir zeigen  $\rho(a) \subseteq \rho(f(a))$ . Sei also  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $a - \lambda\mathbf{1} \in G(A)$  und  $b = (a - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ . Dann ist

$$(f(a) - \lambda\mathbf{1})f(b) = f(a - \lambda\mathbf{1})f(b) = f((a - \lambda\mathbf{1})b) = f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$$

und analog  $f(b)(f(a) - \lambda\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ . Also ist  $\lambda \in \rho(f(a))$ . ■

Im folgenden nennen wir einen Homomorphismus  $f: A \rightarrow B$  zwischen involutiven Algebren *involutiv*, wenn  $f(a^*) = f(a)^*$  für alle  $a \in A$  gilt. Der folgende Satz ist eine der erstaunlichsten Folgerungen aus der Formel für den Spektralradius.

**Satz II.2.18.** (Stetigkeitssatz für  $C^*$ -Algebren) *Ist  $A$  eine Banach- $*$ -Algebra und  $f: A \rightarrow B$  ein involutiver Homomorphismus in eine  $C^*$ -Algebra  $B$ , so ist  $f$  eine Kontraktion, d.h.  $\|f(a)\| \leq \|a\|$  für alle  $a \in A$ . Insbesondere ist  $f$  stetig.*

**Beweis.** Ersetzen wir  $B$  durch die  $C^*$ -Algebra  $\overline{f(A)}$ , so dürfen wir annehmen, daß  $f(A) \subseteq B$  dicht ist. Ist  $\mathbf{1} \in A$  ein Einselement, so gilt  $f(\mathbf{1})f(a) = f(a)$  für alle  $a \in A$  und damit auch  $f(\mathbf{1})b = b$  für alle  $b \in B$ . Nach Lemma II.1.5 ist  $f(\mathbf{1})$  dann ein Einselement in  $B$ . Hat  $A$  kein Einselement, so können wir  $f$  zu einem involutiven Homomorphismus

$$\tilde{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}, \quad (a, \lambda) \mapsto f(a) + \lambda \mathbf{1}$$

mit  $f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  fortsetzen. Jetzt können wir Lemma II.2.17 anwenden und erhalten

$$(2.3) \quad \sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$$

für alle  $a \in A$ .

Sei  $a \in A$  zunächst hermitesch. Da  $f$  involutiv ist, ist  $f(a) \in B$  ebenfalls hermitesch und somit

$$\|f(a)\| = r(f(a)) \leq r(a) \leq \|a\|$$

wegen Lemma II.2.15(ii), (2.3) und Satz II.2.9(iii). Für beliebiges  $a \in A$  ist nun

$$\|f(a)\|^2 = \|f(a)^* f(a)\| = \|f(a^* a)\| \leq \|a^* a\| \leq \|a^*\| \cdot \|a\| = \|a\|^2,$$

und hieraus folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung II.2.19.** Die wesentliche Voraussetzung in Satz II.2.18 ist die Vollständigkeit von  $A$ . Ohne diese ist die entsprechende Behauptung falsch. Ein einfaches Beispiel ist das folgende. Wir betrachten in der Banach- $*$ -Algebra  $l^1(\mathbb{N})$  aller absolut summierbaren Folgen die dichte Unter algebra  $A$  aller abbrechenden Folgen. Das ist natürlich eine normierte involutive Algebra in der die Involution eine Isometrie ist. Wir können nun für jede reelle komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  einen involutiven Homomorphismus

$$f: A \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n z^n$$

definieren (vgl. Beispiel II.1.7). Wegen  $l^1(\mathbb{N})' \cong l^\infty(\mathbb{N})$  ist dann

$$\|f\| = \sup\{|z|^n : n \in \mathbb{N}\},$$

also  $\|f\|$  genau dann endlich, wenn  $|z| \leq 1$  ist. Aus Satz II.2.18 folgt, daß sich  $f$  genau in diesen Fällen zu einem möglicherweise unstetigen Charakter von  $l^1(\mathbb{N})$  fortsetzen läßt und sonst nicht. ■

Für den Fall von Homomorphismen  $A \rightarrow \mathbb{C}$  kann man sogar eine viel stärkere Stetigkeitsaussage beweisen.

**Satz II.2.20.** *Sei  $A$  eine Banachalgebra und  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ein Homomorphismus. Dann gilt  $\|f\| \leq 1$ . Hat  $A$  ein Einselement und ist  $f \neq 0$ , so gilt  $f(\mathbf{1}) = 1$  und  $\|f\| = 1$ .*

**Beweis.** Wäre  $\|f\| > 1$ , so fänden wir ein  $a \in A$  mit  $\|a\| < 1$  und  $f(a) = 1$ . Dann konvergiert die Neumannsche Reihe  $b := \sum_{n=1}^{\infty} a^n$  und es gilt  $a + ab = b$ . Wenden wir  $f$  an, so führt dies zu

$$f(b) = f(a) + f(a)f(b) = 1 + f(b),$$

ein Widerspruch. Also ist  $\|f\| \leq 1$ .

Hat  $A$  ein Einselement  $\mathbf{1}$  und ist  $f \neq 0$ , so ist  $f(\mathbf{1})^2 = f(\mathbf{1})$ , also  $f(\mathbf{1}) = 1$ , da sonst  $f = 0$  folgen würde. Damit ist  $\|f\| \geq 1$  wegen  $\|\mathbf{1}\| = 1$ . ■

**Definition II.2.21.** Für eine komplexe Algebra  $A$  schreiben wir  $\Gamma_A$  für den Raum aller von 0 verschiedener Algebra-Homomorphismen  $A \rightarrow \mathbb{C}$ . Man beachte, daß für den Fall, daß  $A$  eine Banachalgebra ist, alle Elemente von  $\Gamma_A$  automatisch stetig sind (Satz II.2.20). In diesem Fall nennt man  $\Gamma_A$  auch das *Spektrum von  $A$* . ■

**Bemerkung II.2.22.** (a) Sei  $S$  eine involutive Halbgruppe und  $l^1(S)$  die Banach- $*$ -Algebra von Beispiel II.1.7. Dort hatten wir gezeigt, daß die stetigen Charaktere von  $l^1(S)$  genau den beschränkten Charakteren  $\chi: S \rightarrow \mathbb{C}$  entsprechen. Mit Satz II.2.20 sehen wir sogar, daß man jeden Charakter von  $l^1(S)$  so erhält.

Betrachtet man lediglich Homomorphismen  $l^1(S) \rightarrow \mathbb{C}$ , die nicht notwendigerweise die Involution respektieren, so erhält man vollkommen analog eine bijektive Korrespondenz zu den beschränkten multiplikativen Homomorphismen  $\chi: S \rightarrow \mathbb{C}$ .

Für  $S = \mathbb{N}$  ist damit

$$l^1(\mathbb{N})^\wedge \cong [-1, 1] \setminus \{0\} \quad \text{und} \quad \Gamma_{l^1(\mathbb{N})} \cong (\text{Hom}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \setminus \{0\}) \cap B(\mathbb{N}) \cong \{z \in \mathbb{C}^* : |z| \leq 1\}.$$

Für die Wiener-Algebra, d.h. für  $S = \mathbb{Z}$  (vgl. Beispiel II.1.8) erhalten wir analog

$$\widehat{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{S}^1 \quad \text{und} \quad \Gamma_{l^1(\mathbb{Z})} \cong \mathbb{S}^1.$$

In diesem Fall ist also jeder Homomorphismus  $l^1(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$  automatisch involutiv. Für  $z \in \mathbb{S}^1$  ist der zugehörige Homomorphismus gegeben durch

$$\chi_z(x) = \widehat{x}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^n.$$

(b) Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum und  $A = C_0(X)$ . Wir zeigen, daß jeder von 0 verschiedene Homomorphismus  $A \rightarrow \mathbb{C}$  eine Punktauswertung  $\delta_x: f \mapsto f(x)$  ist.

Sei also  $\chi: C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  ein Homomorphismus. Wir setzen  $\chi$  durch  $\chi(\mathbf{1}) := 1$  zu einem Charakter von  $\widetilde{A} \subseteq BC(X)$  fort. Sei  $N := \mathcal{N}(\chi)$  der Kern von  $\chi$ . Dann ist  $N \subseteq \widetilde{A}$  eine Hyperebene, die gleichzeitig ein Ideal ist, d.h.  $\widetilde{A} \cdot N \subseteq N$ . Existiert ein  $x \in X$  mit  $\delta_x(f) = f(x) = 0$  für alle  $f \in N$ , so ist  $N$  in der Hyperebene  $\mathcal{N}(\delta_x)$  enthalten und stimmt daher mit ihr überein. In diesem Fall folgt  $\chi = \delta_x$  aus  $\chi(\mathbf{1}) = \delta_x(\mathbf{1}) = 1$ .

Wir nehmen daher an, daß zu jedem  $x \in X$  eine Funktion  $f_x \in N$  mit  $f_x(x) \neq 0$  existiert. Wir dürfen hierbei o.B.d.A.  $f \notin A$  annehmen, da  $A \cap N$  eine Hyperebene in  $N$  ist, also  $N \setminus A$  in  $N$  dicht ist. Sei  $x_0 \in X$  und  $f_{x_0}$  wie oben. Dann ist  $f_{x_0} = g + \lambda \mathbf{1}$  mit  $g \in A$ . Also existiert eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq X$  mit  $|g(x)| < |\lambda|$  für alle  $x \notin K$ , damit also  $f_{x_0}(x) \neq 0$ . Wegen der Kompaktheit finden wir nun noch endlich viele Elemente  $x_1, \dots, x_n \in K$  mit

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n \{x \in X : f_{x_j}(x) \neq 0\}.$$

Damit ist

$$f := f_{x_0} \overline{f_{x_0}} + \sum_{j=1}^n f_{x_j} \overline{f_{x_j}} = |f_{x_0}|^2 + \sum_{j=1}^n |f_{x_j}|^2 \in N \setminus A$$

und es gilt  $f(x) > 0$  für alle  $x \in X$ . Also ist  $f$  nach Beispiel II.2.7 in  $\widetilde{A}$  invertierbar. Folglich ist  $\mathbf{1} = f f^{-1} \in N$ , im Widerspruch zu  $\chi(\mathbf{1}) = 1$ . Wir haben gezeigt, daß jeder Homomorphismus  $C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  eine Punktauswertung ist. Insbesondere ist jeder Homomorphismus involutiv. Zusammenfassend finden wir das schon in Beispiel II.1.6 versprochene Resultat:

$$\Gamma_{C_0(X)} \cong X. \quad \blacksquare$$

### II.3. Die Gelfandsche Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt werden wir einen besonders schönen Teil der Spektraltheorie kennenlernen. Wir haben schon mehrfach die  $C^*$ -Algebra  $C(X)$  der stetigen Funktionen auf einem kompakten Raum als Beispiel betrachtet. Eines der Hauptergebnisse in diesem Abschnitt wird sein, daß jede kommutative  $C^*$ -Algebra mit Einselement als  $C^*$ -Algebra, d.h. mit Norm und Involution, zu einer Algebra des Typs  $C(X)$  isomorph ist. Hat sie kein Einselement, so ist sie isomorph zu  $C_0(X)$  für einen lokalkompakten Raum  $X$ . Dieses Ergebnis überzeugt nicht nur durch sein abstrakte Schönheit, sondern ist auch ein Grundbaustein für die gesamte Spektraltheorie. Später werden wir sehen, daß es auch einen sehr bequemen Zugang zur Maßtheorie auf lokalkompakten Räumen liefert.

Die Grundidee hinter der Gelfandschen Darstellungstheorie ist die folgende. Ist  $A$  ein Banachraum und  $A'$  sein Dualraum, so betrachten wir den Raum  $X := \{\alpha \in A' : \|\alpha\| \leq 1\}$ , den wir mit der schwach- $*$ -Topologie versehen, also mit der größten Topologie, die alle Funktionen

$$\hat{x}: X \rightarrow \mathbb{C}, \quad \alpha \mapsto \alpha(x)$$

stetig macht. Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki ([Ne96]) ist  $X$  ein kompakter Raum und die Abbildung

$$A \rightarrow C(X), \quad x \mapsto \hat{x}$$

liefert eine isometrische Einbettung des Banachraums  $A$  in eine Algebra  $C(X)$ . Beachte hierbei, daß

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(\alpha)| : \alpha \in X\} = \|x\|$$

aus dem Satz von Hahn-Banach folgt (vgl. [Ne96]). Jeder Banachraum läßt sich also isometrisch in ein  $C(X)$  einbetten. Ist  $A$  zusätzlich eine kommutative Banachalgebra, so hätte man gerne eine Einbettung als eine Unter algebra von  $C(X)$ . In diesem Fall müssen die Auswertungsabbildungen  $x \mapsto \hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$  allerdings Algebra-Homomorphismen sein. Wir werden also anstatt der gesamten Einheitskugel  $X \subseteq A'$  nur die Algebra-Homomorphismen betrachten dürfen. Das ist die Grundidee. Die ersten Probleme zeigen sich natürlich schon bei der Frage nach der Reichhaltigkeit.

**Satz II.3.1.** (a) Sei  $A$  eine Banachalgebra mit Einselement. Versehen wir die Menge  $\Gamma_A$  aller von 0 verschiedenen Algebra-Homomorphismen  $A \rightarrow \mathbb{C}$  mit der schwach- $*$ -Topologie, so ist  $\Gamma_A$  kompakt und die Abbildung

$$\mathcal{G}: A \rightarrow C(\Gamma_A), \quad x \mapsto \hat{x}$$

mit  $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$  ist ein kontraktiver Homomorphismus von Banachalgebren.

(b) Hat  $A$  kein Einselement, so ist  $\Gamma_A$  lokalkompakt und  $\mathcal{G}: A \rightarrow C_0(\Gamma_A)$  ein kontraktiver Homomorphismus.

**Beweis.** (a) Zunächst wissen wir aus Satz II.2.20, daß

$$\Gamma_A \subseteq X := \{\alpha \in A' : \|\alpha\| \leq 1\}.$$

Da  $X$  nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki (vgl. [Ne96]) kompakt ist, haben wir nur zu zeigen, daß  $\Gamma_A$  abgeschlossen darin ist.

Seien dazu  $a, b \in A$ . Dann ist die Menge

$$X_{a,b} = \{\alpha \in X : \alpha(ab) = \alpha(a)\alpha(b)\} = \{\alpha \in X : \hat{ab}(\alpha) = \hat{a}(\alpha)\hat{b}(\alpha)\}$$

in  $X$  abgeschlossen, denn die Funktionen  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  und  $\hat{ab}$  sind auf  $X$  stetig. Folglich ist auch

$$\Gamma_A = \bigcap_{a,b \in A} X_{a,b} \cap \{\alpha \in X : \alpha(\mathbf{1}) = 1\}$$

abgeschlossen und damit kompakt.

Der Rest der Behauptung folgt nun aus

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \sup\{|\widehat{x}(\alpha)| : \alpha \in \Gamma_A\} \leq \|x\|,$$

was wiederum aus

$$|\widehat{x}(\alpha)| = |\alpha(x)| \leq \|\alpha\| \cdot \|x\| \leq \|x\|$$

für  $\alpha \in \Gamma_A$  folgt.

(b) Hat  $A$  kein Einselement, so setzen wir  $\widetilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$  wie in Abschnitt II.2. Es ist klar, daß jeder Homomorphismus  $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$  sich eindeutig zu einem Homomorphismus  $\widetilde{\chi}: \widetilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\widetilde{\chi}(\mathbf{1}) = 1$  fortsetzen läßt. Man setze hierzu  $\widetilde{\chi}(a, \lambda) = \lambda + \chi(a)$  und überzeuge sich davon, daß hierdurch ein Homomorphismus definiert wird. Der einzige Homomorphismus von  $\widetilde{A}$ , dessen Einschränkung auf  $A$  trivial ist, wird durch  $\omega: (a, \lambda) \mapsto \lambda$  gegen. Wir haben daher  $\Gamma_A \cup \{\omega\} = \Gamma_{\widetilde{A}}$ . Da  $\chi(\mathbf{1}) = 1$  für alle  $\chi \in \Gamma_{\widetilde{A}}$  gilt, stimmt die schwach-\*Topologie bzgl.  $A$  auf  $\Gamma_A$  mit der Teilraumtopologie bzgl.  $\Gamma_{\widetilde{A}}$  überein, macht  $\Gamma_A$  also zu einem lokalkompakten Raum, so daß  $\Gamma_{\widetilde{A}}$  dessen Einpunktkompaktifizierung ist.

Für ein Element  $a \in A$  ist nun  $\widehat{a}$  eine stetige Funktion auf  $\Gamma_A$ , die sich durch  $\widehat{a}(\omega) = 0$  zu einer stetigen Funktion auf  $\Gamma_{\widetilde{A}}$  fortsetzt. Folglich ist  $\widehat{a} \in C_0(\Gamma_A)$ . ■

Den Homomorphismus  $A \rightarrow C(\Gamma_A)$  nennt man die *Gelfand-Transformation* der Banachalgebra  $A$ . Die Fragen, die sich nun aufdrängen, sind die, ob man die Norm  $\|\widehat{x}\|_\infty$  der Gelfand-Transformierten durch die Norm in  $A$  ausdrücken kann, und inwieweit die Gelfand-Transformation injektiv ist. Um diese Fragen zu beantworten, benötigen wir zuerst etwas algebraischen Unterbau.

**Definition II.3.2.** (a) Ein Ideal in einer Algebra ist ein Untervektorraum  $I$  mit  $IA \cup AI \subseteq I$ . Falls  $I \neq A$ , heißt  $I$  *echtes Ideal*.

(b) Ein *maximales Ideal* ist ein echtes Ideal  $I$  für das es zwischen  $I$  und  $A$  keine weiteren Ideale gibt. ■

**Lemma II.3.3.** Sei  $A$  eine Banachalgebra.

(i) Der Abschluß eines Ideals ist ein Ideal.

(ii) Ist  $I$  ein abgeschlossenes Ideal in  $A$ , so ist  $A/I$  eine Banachalgebra, wenn wir  $A/I$  mit der Quotientennorm und der Multiplikation  $[a] \cdot [b] := [ab]$  für  $[a] = a + I$  versehen. Ist  $A$  kommutativ, so auch  $A/I$ .

**Beweis.** (i) Ist  $I \subseteq A$  ein Ideal, so folgt aus der Stetigkeit der Multiplikation, daß  $\overline{IA} \subseteq \overline{IA} \subseteq \overline{I}$  und ebenso  $\overline{AI} \subseteq \overline{I}$ . Also ist  $\overline{I}$  ein Ideal.

(ii) Sei nun  $I \subseteq A$  ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist  $A/I$  bzgl. der Quotientennorm

$$\|[a]\| := \inf\{\|x\| : x \in [a]\}$$

zunächst ein Banachraum (vgl. [Ne96]).

Die Wohldefiniertheit der Multiplikation folgt daraus, daß  $I$  ein Ideal ist. Für  $x, y \in A$  haben wir weiter

$$\|[x][y]\| \leq \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

Da  $x \in [x]$  und  $y \in [y]$  beliebig sind, folgt hieraus

$$\|[x][y]\| \leq \|[x]\| \cdot \|[y]\|.$$

Also ist  $A/I$  eine Banachalgebra.

Ist  $A$  kommutativ, so natürlich auch der Quotient  $A/I$ . ■

**Beispiel II.3.4.** (a) Ist  $f \in \Gamma_A$ , so ist der Kern  $\mathcal{N}(f) \subseteq A$  ein maximales Ideal, denn die Kodimension dieses Unterraums ist 1. Es kann also zwischen ihm und  $A$  kein weiteres Ideal geben.

(b) Ist  $\mathcal{H}$  ein endlichdimensionaler Hilbertraum, so sind  $\{0\}$  und  $B(\mathcal{H})$  die einzigen Ideale der  $C^*$ -Algebra  $B(\mathcal{H})$  (Übung). Algebren mit dieser Eigenschaft nennt man *einfach*. Man kann sogar zeigen, daß jede endlichdimensionale einfache komplexe Algebra so aussieht (Satz von Wedderburn).

(c) Sei  $X$  ein kompakter Raum. Für jede abgeschlossene Teilmenge  $F \subseteq X$  ist dann

$$I_D := \{f \in C(X) : f|_F = 0\}$$

ein abgeschlossenes Ideal. Man kann zeigen, daß alle abgeschlossenen Ideale so aussehen. ■

Das folgende Lemma wird uns helfen, den Zusammenhang zwischen Idealen, maximalen Idealen und Homomorphismen besser zu verstehen.

**Satz II.3.5.** *Sei  $A$  eine Banachalgebra mit Einselement  $\mathbf{1}$ .*

- (i) *Ein echtes Ideal von  $A$  ist nie dicht.*
- (ii) *Maximale Ideale sind abgeschlossen.*
- (iii) *Jedes echte Ideal ist in einem maximalen Ideal enthalten.*
- (iv) *Ist  $I$  ein echtes abgeschlossenes Ideal, so ist  $A/I$  eine Banachalgebra mit Einselement  $[\mathbf{1}]$  und  $\|[\mathbf{1}]\| = 1$ .*
- (v) *Ist  $A$  kommutativ und  $I$  ein maximales Ideal, so ist  $A/I \cong \mathbb{C}$ , d.h. jedes maximale Ideal ist Kern eines Homomorphismus  $A \rightarrow \mathbb{C}$ .*

**Beweis.** (i) Da  $I$  ein echtes Ideal ist, gilt  $G(A) \cap I = \emptyset$ . Da  $G(A)$  offen ist (Satz II.2.9(ii)), gilt auch  $\bar{I} \cap G(A) = \emptyset$  und die Behauptung folgt aus  $\mathbf{1} \in G(A)$ .

(ii) Ist  $I \subseteq A$  ein maximales Ideal, so folgt aus (i), daß  $\bar{I}$  ebenfalls ein echtes Ideal ist. Aus der Maximalität erhalten wir dann  $I = \bar{I}$ , d.h.  $I$  ist abgeschlossen.

(iii) Die Menge  $(\mathcal{I}, \subseteq)$  aller echten Ideale versehen mit der Inklusionsordnung ist induktiv geordnet, denn für jede Kette  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$  ist  $\mathbf{1} \notin \bigcup \mathcal{K}$ , d.h. das Ideal  $\bigcup \mathcal{K}$  ist ebenfalls echt (Warum ist diese Menge ein Ideal?). Die Behauptung folgt damit aus dem Zornschen Lemma.

(iv) Daß  $[\mathbf{1}]$  in  $A/I$  ein Einselement ist, ist klar. Wegen  $\|[\mathbf{1}]\| \leq \|\mathbf{1}\| = 1$  bleibt noch  $1 \leq \|[\mathbf{1}]\|$  zu zeigen. Wäre  $\|[\mathbf{1}]\| < 1$ , so fänden wir in  $[\mathbf{1}]$  ein Element  $x$  mit  $\|x\| < 1$ . Dann wäre aber  $\mathbf{1} - x \in I$  invertierbar (Satz II.2.9(i)), im Widerspruch zu  $I \neq A$ .

(v) Nach (ii) und (iv) ist  $A/I$  eine kommutative Banachalgebra mit Einselement. Wir wollen den Satz von Gelfand-Mazur anwenden (Satz II.2.14). Hierzu haben wir zu zeigen, daß jedes von 0 verschiedene Element in  $A/I$  invertierbar ist. Für  $A$  bedeutet dies, daß zu jedem  $x \in A \setminus I$  ein  $y \in A$  existiert mit  $xy \in \mathbf{1} + I$ . Dazu setzen wir

$$J := xA + I.$$

Dann ist  $J$  ein Ideal, das  $I$  und  $x$  enthält, also  $J = A$ . Folglich existiert ein  $y \in A$  mit  $\mathbf{1} \in xy + I$ . Mit dem Satz von Gelfand-Mazur sehen wir also, daß  $A/I \cong \mathbb{C}$  ist. Insbesondere ist  $I$  der Kern eines Homomorphismus  $A \rightarrow \mathbb{C}$ . ■

Man beachte, daß Satz II.3.5(v) für nichtkommutative Banachalgebren im allgemeinen falsch ist (vgl. Beispiel II.3.4(b)).

Wir können jetzt schon die Frage nach der Norm der Gelfandtransformierten beantworten.

**Theorem II.3.6.** (Gelfandscher Darstellungssatz für Banachalgebren) *Sei  $A$  eine kommutative Banachalgebra mit Einselement. Dann ist  $\Gamma_A$  nicht leer und die Gelfandtransformation  $A \rightarrow C(\Gamma_A)$  ist ein kontraktiver Homomorphismus von Banachalgebren mit*

$$\widehat{x}(\Gamma_A) = \sigma(x) \quad \text{und} \quad \|\widehat{x}\|_\infty = r(x)$$

für alle  $x \in A$ . Weiter ist  $\widehat{\mathbf{1}} = \mathbf{1}$  die Einsfunktion auf  $\Gamma_A$ . Hat  $A$  kein Einselement und ist  $\Gamma_A \neq \emptyset$ , so haben wir

$$\sigma(x) = \widehat{x}(\Gamma_A) \cup \{0\} \quad \text{und} \quad \|\widehat{x}\|_\infty = r(x).$$

**Beweis.** Da es nach Satz II.3.5 maximale Ideale gibt, ist  $\Gamma_A$  nicht leer.

Ist  $\lambda \in \sigma(x)$ , also  $x - \lambda \mathbf{1}$  nicht invertierbar, so ist  $A(x - \lambda \mathbf{1})$  ein echtes Ideal, denn dieser Unterraum enthält nicht das Einselement. Folglich ist er nach Satz II.3.5 in einem maximalen Ideal  $I$  enthalten. Dieses wiederum ist Kern eines Homomorphismus  $\alpha: A \rightarrow \mathbb{C}$ . Damit ist schließlich

$$0 = \alpha(x - \lambda \mathbf{1}) = \alpha(x) - \lambda \mathbf{1}$$

und folglich  $\alpha(x) = \lambda$ .

Existiert umgekehrt ein  $\alpha \in \Gamma_A$  mit  $\alpha(x) = \lambda$ , so ist  $x - \lambda \mathbf{1}$  in dem maximalen Ideal  $\mathcal{N}(\alpha)$  enthalten, kann also keine Einheit sein. Damit ist  $\lambda \in \sigma(x)$ . Hieraus folgt  $\widehat{x}(\Gamma_A) = \sigma(x)$ . Die Formel für die Norm von  $\|\widehat{x}\|$  ist jetzt eine triviale Konsequenz der Definition des Spektralradius. Wegen Satz II.3.1 ist damit alles für den Fall, daß  $A$  ein Einselement hat gezeigt.

Ist dies nicht der Fall und  $\Gamma_A \neq \emptyset$ , so haben wir  $\widehat{x} \in C_0(\Gamma_A)$  für alle  $x \in A$ . Weiter ist

$$\sigma(x) = \sigma_{\widetilde{A}}(x) = \widehat{x}(\Gamma_A) \cup \{0\}$$

wegen dem ersten Teil. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Den Kern der Gelfandtransformation nennt man *das Radikal*  $\text{rad}(A)$  von  $A$  und  $A$  *halbeinfach*, wenn  $\text{rad}(A) = \{0\}$  ist. Die halbeinfachen kommutativen Banachalgebren sind also genau die, für die die Gelfandtransformation injektiv ist. Insbesondere sehen wir  $\Gamma_{\text{rad}(A)} = \emptyset$ . Ist also  $r(a) = 0$  für alle  $a \in A$ , so hat  $A$  keine von 0 verschiedenen Homomorphismen nach  $\mathbb{C}$ . Ein einfaches Beispiel wo dies passiert ist die Unter algebra von  $B(\mathbb{C}^2)$ , die von der Matrix  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  erzeugt wird.

**Korollar II.3.7.** *Ist  $A$  eine kommutative Banachalgebra mit Einselement, so ist der Spektralradius  $r: A \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine stetige Halbnorm und es gilt*

$$\text{rad}(A) = \{x \in A: r(x) = 0\}.$$

**Beweis.** Das folgt sofort aus  $r(x) = \|\widehat{x}\|_\infty \leq \|x\|$ . ■

**Beispiel II.3.8.** (a) Ist  $X$  ein kompakter Raum und  $A = C(X)$ , so ist  $\Gamma_A = X$  (vgl. Beispiel II.2.22(b)) und die Gelfandtransformation ist gegeben durch

$$\widehat{f}(\delta_x) = f(x),$$

wobei  $\delta_x: f \mapsto f(x)$  die Punktauswertung in  $x \in X$  ist. Die Gelfandtransformation  $C(X) \rightarrow C(\Gamma_A) \cong C(X)$  ist also die Identität.

Wir zeigen noch, daß  $X$  und  $\Gamma_A$  sogar als topologische Räume isomorph sind. Aus der Definition der Topologie auf  $\Gamma_A$  folgt, daß die Abbildung

$$X \rightarrow \Gamma_A, \quad x \mapsto \delta_x$$

stetig ist, denn alle Abbildungen  $x \mapsto f(\delta_x) = f(x)$  sind auf  $X$  stetig. Weiter ist diese Abbildung bijektiv und  $X$  ist kompakt, also ist sie ein Homöomorphismus.

(b) (Die Einpunktkompaktifizierung) Sei jetzt  $X$  lokalkompakt und  $A = C_0(X)$ . Dann ist  $\Gamma_{\widetilde{A}} = X \cup \{\omega\}$ , wobei  $\omega: \widetilde{A} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\omega(f, \lambda) := \lambda$  definiert ist. Die Topologie auf  $\Gamma_{\widetilde{A}}$

macht die Menge  $X_\omega := X \cup \{\omega\}$  zu einem kompakten Raum. Da  $\{\omega\}$  als kompakte Menge abgeschlossen ist, ist  $X \subseteq X_\omega$  offen. Wie unter (a) sehen wir ferner, daß die Abbildung

$$\eta: X \rightarrow X_\omega = \Gamma_{\tilde{A}}, \quad x \mapsto \delta_x$$

stetig ist. Wir behaupten, daß sie sogar offen, also eine Einbettung ist.

Sei also  $O \subseteq X$  offen. Wir zeigen, daß  $\eta(O) \subseteq X_\omega$  offen ist. Sei dazu  $\delta_y \in \eta(O)$ , d.h.  $y \in O$ . Mit dem Satz von Urysohn finden wir eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(y) = 1$  deren Träger in  $O$  liegt. Dann ist die Menge  $\{\delta_z \in X_\omega: \delta_z(f) \neq 0\}$  eine offene Umgebung von  $\delta_y$ , die ganz in  $\eta(O)$  liegt. Folglich ist  $\eta(O)$  offen. Wir haben damit gezeigt, daß  $X \rightarrow X_\omega$  eine offene Einbettung ist. Den kompakten Raum  $X_\omega$  nennt man *Einpunktkompaktifizierung von  $X$* .

In diesem Beispiel läßt sich leicht direkt nachprüfen, daß wir durch die Gelfanddarstellung eine Realisierung von  $C_0(X)$  als das Ideal  $\{f \in C(X_\omega): f(\omega) = 0\}$  von  $C(X_\omega)$  bekommen.

Ist z. B.  $X = \mathbb{N}$  mit der diskreten Topologie, so ist  $X_\omega \cong \{0\} \cup \{\frac{1}{n}: n \in \mathbb{N}\}$  mit der von  $\mathbb{R}$  induzierten Topologie (Übung). Die stetigen Funktionen auf diesem Raum entsprechen genau denjenigen Folgen, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  existiert, und  $c_0 \cong C_0(X)$  ist hierin das Ideal der Nullfolgen.

Ist  $X = \mathbb{R}^n$ , so ist  $X_\omega \cong \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}: \|x\| = 1\}$  (Übung), d.h.  $C_0(\mathbb{R}^n) \cong C(\mathbb{S}^n)$ .

(c) Für  $A = l^1(\mathbb{Z})$  sehen wir wie in (a) mit Beispiel II.2.22(a) und der Kompaktheit von  $\mathbb{S}^1$ , daß  $\Gamma_A \cong \mathbb{S}^1$  sogar im Sinn topologischer Räume gilt. Die Gelfand-Transformation ist in diesem Fall gegeben durch

$$\hat{x}(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n z^n.$$

(d) Für  $A = l^1(\mathbb{N}_0)$  sehen wir wie in Beispiel II.2.22(a), daß  $\Gamma_A \cong \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ . Die Gelfand-Transformation ist in diesem Fall gegeben durch

$$\hat{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n.$$

Man beachte, daß  $l^1(\mathbb{N}_0) \cong l^1(\mathbb{N}) \sim$  gilt, sowie  $\Gamma_{l^1(\mathbb{N})} \cong \{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| \leq 1\}$ . Hier sieht man sehr schön, daß man durch Hinzunahme des Einselements die Einpunktkompaktifizierung der gelochten Scheibe, also den Vollkreis bekommt.

(e) Sei  $A = L^1(\mathbb{R}^n)$ . In diesem Fall ist  $\Gamma_A \cong \mathbb{R}^n$  und die Gelfand-Transformation stimmt mit der Fourier-Transformation überein:

$$\mathcal{G}(f)(x) = \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\langle x, y \rangle} dy.$$

Was wir hierzu schon wissen ist, daß die Abbildung  $L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow BC(\mathbb{R}^n), f \mapsto \hat{f}$  ein kontraktiver Homomorphismus von Banach- $*$ -Algebren ist. Insbesondere ist die so erhaltene Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma_A$  stetig.

Um obige Behauptung zu beweisen, muß man etwas arbeiten. Wir lassen den Beweis zur Übung. Man gehe hierzu nach folgenden Schritten vor.

(1) Sei  $\delta_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$  eine stetig differenzierbare nichtnegative Funktion mit kompaktem Träger und  $\|\delta_1\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_1(x) dx = 1$ . Wir setzen  $\delta_m(x) = \frac{1}{m^n} \delta_1(mx)$ . Dann gilt:

(i)  $\int_{\mathbb{R}^n} \delta_m(x) dx = 1$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

(ii) Für jedes  $r > 0$  existiert ein  $m_r \in \mathbb{N}$  mit

$$\text{supp}(\delta_m) = \overline{\{x: \delta_m(x) \neq 0\}} \subseteq B_r(0) = \{x: \|x\| \leq r\}$$

für  $m \geq m_r$ .

(iii) Für  $f \in C_c(G)$  gilt  $\delta_m * f \rightarrow f$  gleichmäßig.

(iv) Für  $f \in L^1(G)$  gilt  $\delta_m * f \rightarrow f$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Hinweis: Man verwende (i), (iii) und ein  $3\varepsilon$ -Argument.



(2) Sei jetzt  $\chi \in \Gamma_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ . Zeige:

(i) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  und  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$  sei  $(\tau_x \cdot f)(y) := f(y - x)$ . Dann ist

$$\tau_x(f * h) = (\tau_x \cdot f) * h = f * (\tau_x \cdot h).$$

(ii) Für  $x \in \mathbb{R}^n$  existiert  $\alpha(x) := \lim_{m \rightarrow \infty} \chi(\tau_x \cdot \delta_m)$ . Hinweis:  $\chi(\tau_x \cdot \delta_m) \chi(f) = \chi(\delta_m * \tau_x \cdot f) \rightarrow \chi(\tau_x \cdot f)$ . Also ist  $\chi(\tau_x \cdot f) = \alpha(x) \chi(f)$ .

(iii)  $\alpha$  ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^*$ . Hinweis: Für  $f \in C_c(G)$  ist die Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow L^1(\mathbb{R}^n), x \mapsto \tau_x \cdot f$  stetig.

(iv)  $\alpha(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{S}^1$ .

(3) Jetzt akzeptieren wir das folgende Faktum: Für jedes stetige lineare Funktional  $\mu$  auf  $L^1(\mathbb{R}^n)$  und  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  gilt

$$\mu(f * g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \mu(\tau_x \cdot g) \, dx$$

für  $f, g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ . Wenden wir dies auf  $\chi$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi(f) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \chi(f * \chi_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \chi(\tau_x \cdot \chi_m) \, dx \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \chi(\chi_m) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \alpha(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \alpha(x) \, dx. \end{aligned}$$

(4) Um  $\Gamma_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \mathbb{R}^n$  zu sehen, bleibt nur noch zu zeigen, daß jeder stetige Charakter von  $\mathbb{R}^n$  die Gestalt  $\alpha(x) = e^{i\langle x, y \rangle}$  für ein  $y \in \mathbb{R}^n$  hat. Hierzu dürfen wir  $n = 1$  annehmen (Warum?).

(i)  $\alpha$  ist differenzierbar. Hinweis: Berechne  $\alpha * \delta_m$  und beachte, daß  $\alpha * \delta_m \rightarrow \alpha$  auch für beschränkte stetige Funktionen gilt.

(ii) Für  $n = 1$  genügt  $\alpha$  einer linearen Differentialgleichung  $\alpha'(x) = \alpha'(0)\alpha(x)$ . Also ist  $\alpha(x) = e^{x\alpha'(0)}$ .

(5) Wegen (4) ist die Abbildung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \Gamma_A$  bijektiv. Wir wissen schon, daß sie stetig ist. Bleibt also zu zeigen, daß sie offen ist. Hierzu muß man sehen, daß die Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  die größte Topologie ist, die alle Funktionen  $\hat{f}, f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  stetig macht. Hierzu berechne man die Fouriertransformierte der Funktionen

$$f_y(x) := \begin{cases} e^{-\langle y, x \rangle} & \text{für } x_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

die für  $y_1, \dots, y_n > 0$  Elemente von  $L^1(\mathbb{R}^n)$  darstellen. ■

Nach der Diskussion dieser Beispiele, noch ein wichtiges Resultat, das wir jetzt leicht beweisen können.

**Satz II.3.9.** (Satz von Wiener) *Hat die Funktion  $f \in C(\mathbb{S}^1)$  eine absolut konvergente Fourierreihe*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$$

*und ist  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{S}^1$ , so hat auch die Funktion  $z \mapsto f(z)^{-1}$  eine absolut konvergente Fourierreihe.*

**Beweis.** Daß  $f$  eine absolut konvergente Fourierreihe hat, heißt gerade, daß  $f$  in der Unter- algebra  $\widehat{l^1(\mathbb{Z})} \subseteq C(\mathbb{S}^1)$  liegt. Wir können  $f$  also als  $f = \hat{x}$  für eine Folge  $x \in l^1(\mathbb{Z})$  schreiben. Nach Voraussetzung enthält  $f(\mathbb{S}^1) = \hat{x}(\mathbb{S}^1) = \sigma(x)$  nicht die 0, d.h.  $x$  ist invertierbar. Damit ist aber

$$f(z)^{-1} = (x^{-1})\gamma(z)$$

und das war zu zeigen. ■

### Kommutative $C^*$ -Algebren

In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß die Gelfandsche Darstellungstheorie für kommutative  $C^*$ -Algebren besonders wirkungsvoll ist.

**Lemma II.3.10.** *Ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $a \in A$  hermitesch, so ist  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ .*

**Beweis.** Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß  $A$  ein Einselement hat (Satz II.2.5). Sei  $\alpha + i\beta \in \sigma(a)$ . Wir werden  $\beta = 0$  zeigen. Für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha + i(\beta + \lambda) \in \sigma(x + i\lambda\mathbf{1})$ , so daß wir

$$|\alpha + i(\beta + \lambda)| \leq \|x + i\lambda\mathbf{1}\|$$

aus Lemma II.2.15(ii) erhalten. Jetzt rechnen wir

$$\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 = |\alpha + i(\beta + \lambda)|^2 \leq \|x + i\lambda\mathbf{1}\|^2 = \|(x + i\lambda\mathbf{1})^*(x + i\lambda\mathbf{1})\| = \|x^2 + \lambda^2\mathbf{1}\| \leq \|x\|^2 + \lambda^2.$$

Hieraus erhalten wir

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda \leq \|x\|^2,$$

also  $\beta = 0$ . ■

**Theorem II.3.11.** (Gelfandscher Darstellungssatz für  $C^*$ -Algebren, 1941) *Ist  $A$  eine kommutative  $C^*$ -Algebra, so gilt  $\widehat{A} = \Gamma_A$  und die Gelfandtransformation  $\mathcal{G}: A \mapsto C_0(\Gamma_A)$  ist ein Isomorphismus von  $C^*$ -Algebren. Insbesondere gilt also*

$$\|\widehat{x}\|_\infty = \|x\| \quad \text{und} \quad \widehat{x^*} = \widehat{x}^*.$$

**Beweis.** Ist  $a \in A$  hermitesch, so folgt

$$\|\widehat{a}\|_\infty = r(a) = \|a\|$$

aus Lemma II.2.15(ii) und Theorem II.3.6. Weiter folgt aus Lemma II.3.10 wegen  $\widehat{a}(\Gamma_A) \subseteq \sigma(a)$ , daß  $\widehat{a}$  eine reellwertige Funktion ist.

Für  $x = b + ic$  mit  $b, c$  hermitesch folgt hieraus

$$\widehat{x^*} = \widehat{b} - i\widehat{c} = \overline{\widehat{x}} = \widehat{x}^*.$$

Also ist die Gelfandtransformation sogar ein involutiver Homomorphismus. Damit erhalten wir jetzt

$$\|\widehat{x}\|_\infty^2 = \|\widehat{x^*x}\|_\infty = \|\widehat{x^*}\widehat{x}\|_\infty = \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

Es bleibt nur noch die Surjektivität zu zeigen. Da die Gelfandtransformation isometrisch ist, ist  $\mathcal{G}(A) \subseteq C_0(\Gamma_A)$  vollständig, also eine abgeschlossene Unteralgebra. Weiter ist sie unter komplexer Konjugation invariant, wegen  $\Gamma_A \subseteq A'$  trennt sie natürlich die Punkte, und wegen  $0 \notin \Gamma_A$  hat sie keine gemeinsamen Nullstellen. Aus dem Satz von Stone-Weierstraß (Theorem III.3.12(ii)) folgt hiermit  $\mathcal{G}(A) = C_0(\Gamma_A)$ . ■

**Theorem II.3.12.** (Stone-Weierstraß)

- (i) *Ist  $X$  kompakt und  $A \subseteq C(X)$  eine  $C^*$ -Unteralgebra, d.h. eine abgeschlossene  $*$ -Unteralgebra, die die Punkte trennt, so ist  $A = C(X)$  oder  $A = \{f \in C(X): f(x_0) = 0\}$  für ein  $x_0 \in X$ .*
- (ii) *Ist  $X$  lokalkompakt und  $A \subseteq C_0(X)$  eine  $*$ -Unteralgebra, die die Punkte trennt und keine gemeinsamen Nullstellen hat, so ist  $A$  dicht in  $C(X)$ .*

**Beweis.** (i) [Neu90, S.52]

(ii) Ist  $X_\omega = X \cup \{\omega\}$  die Einpunktkompaktifizierung von  $X$ , so können wir (i) auf  $\overline{A} \subseteq C_0(X) \subseteq C(X_\omega)$  anwenden, da  $A$  die Punkte von  $X_\omega$  trennt und nur die Nullstelle  $\omega$  hat. ■

**Beispiel II.3.13.** Der Gelfandsche Darstellungssatz hat interessante Konsequenzen, denn er liefert nicht nur einen Weg zu sehen, daß ein kompakter Raum  $X$  schon eindeutig durch die  $C^*$ -Algebra  $C(X)$  bestimmt ist, sondern er impliziert auch für jeden topologischen Raum  $X$  die Existenz eines kompakten Raumes  $\tilde{X}$  mit

$$BC(X) \cong C(\tilde{X}).$$

Dieser Raum hat die Eigenschaft, daß man eine natürliche stetige Abbildung  $\eta: X \rightarrow \tilde{X}, x \mapsto \delta_x$  hat, so daß  $\tilde{X} = \overline{\eta(X)}$  gilt (Beweis!). Man nennt  $\tilde{X}$  die *Stone-Čech-Kompaktifizierung* von  $X$ .

Ist  $X$  nur eine Menge, so ist  $B(X)$  ebenfalls ein  $C^*$ -Algebra. Fassen wir  $X$  als diskreten topologischen Raum auf, so ist aber  $B(X) = BC(X)$  und in diesem Sinne liefert die Stone-Čech-Kompaktifizierung  $\tilde{X}$  einen kompakten Raum mit  $B(X) \cong C(\tilde{X})$ . ■

Man kann den Gelfandschen Darstellungssatz auch anwenden um kommutative Unteralgebren von  $C^*$ -Algebren zu studieren.

**Satz II.3.14.** Sei  $a$  ein normales Element der  $C^*$ -Algebra  $A$  mit Einselement und  $C^*(a)$  die kleinste abgeschlossene Unteralgebra, die  $a$  und  $\mathbf{1}$  enthält. Dann ist

$$C^*(a) \cong C(\sigma(a))$$

im Sinne von  $C^*$ -Algebren, wobei das Element  $a$  der Funktion  $\text{id}_{\sigma(a)}$  entspricht. Insbesondere ist  $C^*(a)$  kommutativ.

**Beweis.** Aus

$$C^*(a) = \overline{\text{span}\{a^n(a^*)^m : n, m \in \mathbb{N}\}}$$

folgt sofort wegen der Stetigkeit der Multiplikation, daß  $C^*(a)$  kommutativ und unter der Involution invariant ist. Also ist  $C^*(a)$  eine kommutative  $C^*$ -Algebra.

Nach dem Gelfandschen Darstellungssatz (Theorem II.3.11) haben wir  $C^*(a) \cong C(X)$ . Das Element  $a$  entspricht dann einer Funktion  $\hat{a}$  auf  $X$ , die die  $C^*$ -Algebra  $C(X)$  erzeugt. Wir zeigen, daß die Abbildung

$$\hat{a}: X \rightarrow \hat{a}(X) = \sigma_{C^*(a)}(a)$$

ein Homöomorphismus ist. Da  $C(X)$  die Punkte von  $X$  trennt und von  $\hat{a}$  erzeugt wird, ist dies auch schon für  $\hat{a}$  der Fall, d.h.  $\hat{a}$  ist injektiv. Da  $X$  kompakt ist, folgt hieraus aber schon die Behauptung.

Es bleibt nur noch  $\sigma(a) = \sigma_{C^*(a)}(a)$  zu zeigen. Die Inklusion  $\sigma(a) \subseteq \sigma_{C^*(a)}(a)$  folgt aus Lemma II.2.17. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, nehmen wir an, daß ein  $\lambda \in \sigma_{C^*(a)}(a) \setminus \sigma(a)$  existiert. Dann existiert  $b := (a - \lambda\mathbf{1})^{-1}$ . Sei  $m > \|b\|$  und  $f \in C(\sigma_{C^*(a)}(a))$  mit  $f(\lambda) = m$  und  $|f(z)(z - \lambda)| \leq 1$  für alle  $z \in \sigma_{C^*(a)}(a)$ . So eine Funktion findet man zum Beispiel, wenn man die Werte von  $f$  in  $[0, m]$  wählt und  $f$  außerhalb des Kreises vom Radius  $\frac{1}{m}$  um  $\lambda$  verschwindet.

Sei  $\Phi: C(\sigma_{C^*(a)}(a)) \rightarrow A$  die Einbettung von oben. Mit  $g(z) := f(z)(\lambda - z)$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} m &\leq \|f\|_\infty = \|\Phi(f)\| = \|\Phi(f)(a - \lambda\mathbf{1})b\| \\ &\leq \|\Phi(g)\| \cdot \|b\| = \|g\|_\infty \cdot \|b\| \leq \|b\|, \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Wahl von  $m$ . ■

**Korollar II.3.15.** Ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Einselement,  $B$  eine  $C^*$ -Unteralgebra mit Einselement und  $a \in B$  normal, so ist

$$\sigma_B(a) = \sigma_A(a).$$

**Beweis.** Sei  $C^*(a)$  die von  $a$  und  $a^*$  erzeugte abgeschlossene Unteralgebra. Mit Lemma II.2.17 und Satz II.3.14 erhalten wir dann

$$\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a) \subseteq \sigma_{C^*(a)}(a) = \sigma_A(a).$$

Hieraus folgt die Behauptung. ■

### Stetiger Funktionalkalkül für normale Operatoren

**Korollar II.3.16.** *Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $A \in B(\mathcal{H})$  normal, so existiert eine isometrische Einbettung von  $C^*$ -Algebren*

$$\Phi: C(\sigma(A)) \rightarrow B(\mathcal{H})$$

mit  $\Phi(\text{id}_{\sigma(A)}) = A$ .

**Beweis.** Das folgt sofort aus Satz II.3.14, da die  $C^*$ -Unteralgebra, die von  $A$  und  $A^*$  erzeugt wird, zu  $C(\sigma(A))$  isomorph ist. ■

**Bemerkung II.3.17.** Man kann diesen Satz so interpretieren, daß man für jede stetige Funktion  $f$  auf dem Spektrum von  $A$  einen Operator  $f(A)$  so definieren kann, daß die Zuordnung

$$\Phi: C(\sigma(A)) \rightarrow B(\mathcal{H}), \quad f \mapsto f(A)$$

ein Isomorphismus von  $C^*$ -Algebren wird. Insbesondere gilt dann

$$f(A) \circ g(A) = (f \cdot g)(A) \quad \text{und} \quad \overline{f(A)} = f(A)^*.$$

Weiter erhalten wir sofort den Spektral-Abbildungssatz:

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A)).$$

In der Tat haben wir

$$\sigma(f(A)) = \sigma(\Phi(f)) = \sigma_{C(\sigma(A))}(f) = f(\sigma(A)).$$

Um zu sehen, welche Wünsche der stetige Spektralkalkül für beschränkte Operatoren offen läßt, diskutieren wir ein Beispiel. Sei dazu  $(e_j)_{j \in J}$  eine ONB des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  und  $x: J \rightarrow \mathbb{C}, j \mapsto x_j$  eine beschränkte Funktion. Wir behaupten, daß durch

$$A.v := \sum_{j \in J} x_j \langle v, e_j \rangle e_j$$

auf  $\mathcal{H}$  ein normaler Operartor definiert und es gilt

$$\sigma(A) = \overline{x(J)}.$$

In der Tat ist die Reihe, die  $A$  definiert wegen

$$\sum_{j \in J} |x_j \langle v, e_j \rangle|^2 \leq \sum_{j \in J} |x_j|^2 |\langle v, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|_\infty^2 \|v\|^2$$

für jedes  $v \in \mathcal{H}$  konvergent und es gilt  $\|A\| \leq \|x\|_\infty$ . Wegen

$$A^*.v := \sum_{j \in J} \overline{x_j} \langle v, e_j \rangle e_j$$

ist  $A$  normal. Jede Zahl  $x_j$  ist wegen  $A.e_j = x_j e_j$  ein Eigenwert. Also ist  $\sigma(A) \supseteq \overline{x(J)}$ . Ist aber  $\lambda \notin \overline{x(J)}$ , so ist

$$(A - \lambda \mathbf{1}).v = \sum_{j \in J} (x_j - \lambda) \langle v, e_j \rangle e_j$$

und folglich

$$(A - \lambda \mathbf{1})^{-1}.v = \sum_{j \in J} (x_j - \lambda)^{-1} \langle v, e_j \rangle e_j$$

ein beschränkter Operator.

Weiter überzeugt man sich davon, daß für  $f \in C(\sigma(A))$  die Beziehung

$$f(A).v = \sum_{j \in J} f(x_j) \langle v, e_j \rangle e_j$$

gilt. Das zeigt man zuerst für Polynome in  $A$  und  $A^*$  durch nachrechnen und dann durch Grenzübergang.

Ist  $E \subseteq \mathbb{C}$  eine abgeschlossene Teilmenge, so heißt der Operator

$$P_E.v := \sum_{x_j \in E} \langle v, e_j \rangle e_j$$

Spektralprojektor zu der Menge  $E$ . Dies ist eine Orthogonalprojektion, die mit  $A$  vertauscht, und die Eigenschaften hat, daß

$$\sigma(A|_{P_E.\mathcal{H}}) = \overline{E \cap x(J)} \subseteq E$$

gilt. Der Operator  $P_E$  filtert also aus  $\mathcal{H}$  genau den Teil heraus auf dem das Spektrum von  $A$  in der Menge  $E$  liegt.

Nun wäre es schön, wenn man  $P_E$  als  $f(A)$  für eine Funktion  $f \in C(\sigma(A))$  darstellen könnte. Wie wir oben gesehen haben müßte eine solche Funktion die Eigenschaft haben, daß

$$f(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } x_j \in E \\ 0 & \text{für } x_j \notin E. \end{cases}$$

Damit wäre  $f$  eine  $\{0, 1\}$ -wertige Funktion auf  $\sigma(A)$ , also

$$\sigma(A) = f^{-1}(0) \cup f^{-1}(1)$$

eine Zerlegung ist disjunkte gleichzeitig offene und abgeschlossene Teilmengen. Ist also  $E \cap \sigma(A)$  nicht gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $\sigma(A)$ , so existiert keine Funktion  $f$  mit den gewünschten Eigenschaften. Möchte man also mehr oder sogar alle Spektralprojektionen als Funktionen von  $A$  schreiben können, so wird man die Klasse der stetigen Funktionen verlassen müssen. Dies werden wir im nächsten Abschnitt tun. Die wesentlichen Hilfsmittel hierzu werden von der Maßtheorie bereitgestellt. ■

### Das Schursche Lemma

Wir können an dieser Stelle eine weitere Lücke schließen, die sich in Abschnitt I.4 aufgetan hat. Dort haben wir gezeigt, daß jede endlichdimensionale irreduzible Darstellung einer abelschen involutiven Halbgruppe schon eindimensional ist. Wie wir jetzt sehen werden, war die Einschränkung auf endlichdimensionale Räume unnötig.

**Definition II.3.18.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Für eine Teilmenge  $E \subseteq B(\mathcal{H})$  definieren wir den *Kommutanten*

$$E' := \{A \in B(\mathcal{H}) : (\forall B \in E) AB = BA\}. \quad \blacksquare$$

**Lemma II.3.19.** Für Teilmengen  $E, F \subseteq B(\mathcal{H})$  gilt:

- (i)  $E \subseteq F' \Leftrightarrow F \subseteq E'$ .
- (ii)  $E \subseteq E''$ .
- (iii)  $E \subseteq F \Rightarrow F' \subseteq E'$ .
- (iv)  $E' = E'''$ .
- (v)  $E = E''$  genau dann, wenn ein  $F$  mit  $E = F'$  existiert.

**Beweis.** (i) Das ist trivial.

(ii) Ist nach (i) äquivalent zu  $E' \subseteq E'$ , also auch trivial.

(iii) trivial.

(iv) Aus (ii) folgt zunächst  $E' \subseteq (E')'' = E'''$ . Andererseits folgt aus (ii) und (iii) auch  $E''' \subseteq E'$ .

(v) Gilt  $E = F'$ , so folgt  $E = E''$  aus (iv). Die Umkehrung ist trivial. ■

Wer sich an die Funktionalanalysis erinnert, wird feststellen, daß er Argumente wie im Beweis von Lemma II.3.19 schon mehrfach gesehen hat. Die Zuordnung  $E \mapsto E^\perp$  für Teilmengen eines Hilbertraums genügt ähnlichen Gesetzen. Die abstrakte Version so einer Zuordnung nennt man eine *Galois-Verbindung*, da sie in der Galoistheorie in Gestalt der Zuordnung von Unterkörpern und Fixgruppen auftritt. Der Hauptproblem in so einer Galoisverbindung ist die Charakterisierung der Fixpunkte, d.h. in unserem Fall der Teilmengen  $E \subseteq B(\mathcal{H})$  für die  $E = E''$  gilt.

**Lemma II.3.20.** Der Kommutant  $E'$  einer Teilmenge  $E \subseteq B(\mathcal{H})$  hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $E'$  ist eine abgeschlossene Unteralgebra von  $B(\mathcal{H})$ .
- (ii) Ist  $E$  kommutativ, so auch  $E''$ .
- (iii) Ist  $E$  invariant unter Adjunktion, so auch  $E'$ .
- (iv) Ist  $(A_i)_{i \in I}$  ein Netz in  $E'$  mit  $\langle A_i.v, w \rangle \rightarrow \langle A.v, w \rangle$  für alle  $v, w \in \mathcal{H}$ , so ist auch  $A \in E'$ .

**Beweis.** (i) Für jedes Element  $A \in E$  ist

$$A' := \{B \in B(\mathcal{H}): AB = BA\}$$

wegen der Stetigkeit der Multiplikation in  $B(\mathcal{H})$  abgeschlossen. Damit ist auch  $E' = \bigcap_{A \in E} A'$  abgeschlossen. Daß dieser Raum eine Unteralgebra ist, rechnet man leicht nach.

(ii) Daß  $E$  kommutativ ist, heißt  $E \subseteq E'$ . Damit ist  $E'' \subseteq E'$  und folglich  $E'' \subseteq E'''$ . Also ist  $E''$  kommutativ.

(iii) Das ist eine triviale Rechnung.

(iv) Seien  $v, w \in \mathcal{H}$  und  $B \in E$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \langle (AB - BA).v, w \rangle &= \langle AB.v, w \rangle - \langle A.v, B^*.w \rangle = \lim_I \langle A_i B.v, w \rangle - \langle A_i.v, B^*.w \rangle \\ &= \lim_I \langle (A_i B - B A_i).v, w \rangle = 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $AB = BA$ , d.h.  $A \in E'$ , da  $E$  beliebig war. ■

Der dritte Teil von Lemma II.3.20 besagt, daß die Unteralgebren der Gestalt  $E'$  nicht nur bezüglich der Normtopologie, sondern auch bzgl. einer viel größeren Topologie abgeschlossen sind.

**Definition II.3.21.** Auf dem Raum der Operatoren  $B(\mathcal{H})$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  definieren wir die *schwache Operortopologie*  $\tau_w$  als die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen

$$B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad A \mapsto \langle A.v, w \rangle, \quad v, w \in \mathcal{H}.$$

Wir definieren die *starke Operortopologie*  $\tau_s$  als die als die initiale Topologie bzgl. der Abbildungen

$$B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{H}, \quad A \mapsto A.v,$$

d.h. als die Topologie der punktweisen Konvergenz auf  $\mathcal{H}$ .

Schreiben wir  $\tau_n$  für die Normtopologie, so haben wir also 3 Topologien auf  $B(\mathcal{H})$  mit

$$\tau_n \supseteq \tau_s \supseteq \tau_w. \quad \blacksquare$$

Der folgende Satz charakterisiert diejenigen  $*$ -Unteralgebren  $A$  von  $B(\mathcal{H})$ , die mit ihren Bikommutanten  $A''$  übereinstimmen als diejenigen, die bzgl. der schwachen oder starken Operatortopologie abgeschlossen sind.

**Theorem II.3.22.** (Von Neumannscher Bikommutantensatz) *Für eine  $*$ -Unteralgebra  $A \subseteq B(\mathcal{H})$  für die die Darstellung auf  $\mathcal{H}$  nicht entartet ist, haben wir*

$$\overline{A}^w = \overline{A}^s = A''.$$

**Beweis.** Da  $A''$  schwach abgeschlossen ist (Lemma II.3.20(iv)), haben wir

$$\overline{A}^s \subseteq \overline{A}^w \subseteq A''.$$

Wir haben also nur  $A'' \subseteq \overline{A}^s$  zu zeigen. Wir werden hierzu zeigen, daß es für jede endliche Menge  $v_1, \dots, v_m$  in  $\mathcal{H}$  und  $b \in A''$  eine Folge  $a_n \in A$  mit  $a_n.v_j \rightarrow b.v_j$  für alle  $j$  gibt.

Zuerst zeigen wir, daß

$$(3.1) \quad b.v \in \overline{A.v}$$

für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt. Sei  $E := \overline{A.v}$ . Dann ist  $E$  ein  $A$ -invarianter abgeschlossener Unterraum, die Orthogonalprojektion  $P_E$  vertauscht also mit  $A$ , d.h.  $P_E \in A'$  (Lemma I.3.6). Wegen  $b \in A''$  vertauscht auch  $b$  mit  $P_E$ , läßt also  $E$  invariant (Lemma I.3.6). Da die Darstellung von  $A$  auf  $\mathcal{H}$  nicht entartet ist, ist  $v \in E$  (Satz I.3.7), damit haben wir (3.1) gezeigt.

Sei nun  $\mathcal{K} := \mathcal{H}^m$  die  $m$ -fache direkte Summe des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  mit sich selbst. Wir definieren durch

$$\tilde{a}.(w_1, \dots, w_m) := (a.v_1, \dots, a.w_m)$$

eine Darstellung

$$B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K}), \quad a \mapsto \tilde{a}$$

(vgl. Satz I.3.8). Die so erhaltene Darstellung von  $A$  ist nicht entartet, denn gilt  $\tilde{a}.(w_1, \dots, w_m) = 0$  für alle  $a \in A$ , so ist  $A.w_j = \{0\}$  für alle  $j$ , also  $w_j = 0$  (vgl. Satz I.3.7).

Wir zeigen nun

$$(3.2) \quad \widetilde{A''} \subseteq \widetilde{A''}.$$

Sei dazu  $c \in (\widetilde{A'})'$ . Wir schreiben  $P_j: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  für die orthogonale Projektion auf den  $j$ -ten Faktor. Dann gilt  $P_j \tilde{a} = a.P_j$  für alle  $j$  und damit sehen wir

$$P_j c P_l^* \in A'$$

für alle Paare  $(j, l)$ . Ist nun  $b \in A''$ , so kommutiert  $b$  mit allen Operatoren  $P_j c P_l^*$ , und mit

$$c.w = c.(w_1, \dots, w_m) = (P_1 c.w, \dots, P_m c.w) = \sum_{l=1}^m (P_1 c P_l^*.w_l, \dots, P_m c P_l^*.w_l)$$

erkennt man schnell, daß  $\tilde{b}$  mit  $c$  vertauscht.

Jetzt können wir zeigen, daß  $A$  stark dicht in  $A''$  ist. Sei also  $b \in A''$  und  $v_1, \dots, v_m \in \mathcal{H}$ . Nach (3.2) ist  $\tilde{b} \in \widetilde{A''} \subseteq B(\mathcal{H}^m)$ . Gemäß (3.1) ist also

$$\tilde{b}.v = (b.v_1, \dots, b.v_m) \in \overline{\widetilde{A}. \mathcal{H}^m}.$$

Es existiert also eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $A$  mit  $a_n.v_j \rightarrow b.v_j$  für alle  $j = 1, \dots, m$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\blacksquare$

**Definition II.3.23.** Eine Unteralgebra  $A \subseteq B(\mathcal{H})$  mit  $A = A''$  heißt *von Neumann-Algebra* auf  $\mathcal{H}$ . ■

Wir werden später auf diesen Begriff und seine Anwendungen zurückkommen. Zuerst beweisen wir jetzt das Schursche Lemma um unser ursprüngliches Problem der Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen abelscher Halbgruppen lösen zu können.

**Satz II.3.24.** (Schursches Lemma) *Eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  der involutiven Halbgruppe  $S$  ist genau dann irreduzibel, wenn*

$$\pi(S)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$$

*gilt.*

**Beweis.** Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  nicht irreduzibel, so existiert ein echter invarianter abgeschlossener Unterraum  $E$ . Dann ist  $P_E \in \pi(S)'$  (Lemma I.3.6) kein Vielfaches von  $\mathbf{1}$ . Damit ist gezeigt, daß aus  $\pi(S)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$  die Irreduzibilität der Darstellung folgt.

Sei die Darstellung nun irreduzibel und  $A \in \pi(S)'$ . Wir schreiben  $A = B + iC$  mit hermiteschen Operatoren  $B, C$ . Wegen  $\pi(S)^* = \pi(S'^*)$  ist auch  $\pi(S)'$  eine  $*$ -Unteralgebra, also  $B, C \in \pi(S)'$ .

Enthält  $\sigma(B)$  zwei verschiedene Punkte  $\lambda \neq \mu$ , so finden wir auf  $\sigma(B)$  zwei stetige Funktionen  $f, h$  mit  $f(\lambda) = 1$ ,  $h(\mu) = 1$  und  $f \cdot h = 0$  (Satz von Urysohn). Damit ist auch

$$f(B) \circ h(B) = 0.$$

Da  $\pi(S)'$  abgeschlossen ist (Lemma II.3.20), gilt  $h(B) \in \pi(S)'$ . Damit ist  $\overline{h(B)\mathcal{H}}$  invariant unter  $A$ , wegen der Irreduzibilität also  $h(B)\mathcal{H}$  dicht in  $\mathcal{H}$ . Aus  $f(B)h(B) = 0$  folgt damit  $f(B) = 0$ , im Widerspruch zu  $f \neq 0$  und der Tatsache, daß der Homomorphismus  $C(\sigma(B)) \rightarrow B(\mathcal{H})$  isometrisch ist (Korollar II.3.16).

Folglich ist  $\sigma(B) = \{\lambda\}$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Also ist  $C(\sigma(B))$  eindimensional, und mit Korollar II.3.16 erhalten wir  $\mathbb{C}B = \mathbb{C}\mathbf{1}$ , d.h.  $B \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ . Analog gilt  $C \in \mathbb{R}\mathbf{1}$ , also  $A \in \mathbb{C}\mathbf{1}$ . ■

**Korollar II.3.25.** *Jede irreduzible Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  einer abelschen involutiven Halbgruppe ist eindimensional.*

**Beweis.** In diesem Fall gilt  $\pi(S) \subseteq \pi(S)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$  nach dem Schurschen Lemma. ■

**Korollar II.3.26.** *Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine irreduzible Darstellung der involutiven Halbgruppe  $S$ , so ist  $\text{span } \pi(S)$  eine stark dichte Unteralgebra von  $B(\mathcal{H})$ .*

**Beweis.** Nach dem Schurschen Lemma ist  $\pi(S)'' = (\mathbb{C}\mathbf{1})' = B(\mathcal{H})$ . Die Behauptung folgt also aus dem von Neumannschen Bikommutantensatz. ■



### III. Positivität in $C^*$ -Algebren und Maßtheorie

Im vorangegangenen Kapitel haben wir gesehen, daß der stetige Funktionalkalkül für normale Operatoren, den wir aus dem Gelfandschen Darstellungssatz gewonnen haben schon sehr hilfreich war um zum Beispiel das Schursche Lemma abzuleiten. Für die Bedürfnisse der Spektraltheorie ist dieser Zugang noch nicht ausreichend. In diesem Kapitel werden wir uns schrittweise an eine Verfeinerung herantasten.

Im ersten Abschnitt werden wir den Begriff des positiv definiten Kerns und den zugehörigen Hilbertraum mit reproduzierendem Kern diskutieren. Im zweiten Abschnitt betrachten wir den konvexen Kegel der positiven Elemente in einer  $C^*$ -Algebra und werden sehen, daß diejenigen linearen Funktionalen, die hierauf positiv sind ein interessantes Bindeglied zwischen Geometrie und Darstellungstheorie bilden. Mit ihrer Hilfe werden wir zum Beispiel zeigen können, daß jede  $C^*$ -Algebra zu einer Unter algebra von  $B(\mathcal{H})$  für einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  isomorph ist, und daß die irreduziblen Darstellungen einer  $C^*$ -Algebra die Punkte trennen.

Der dritte Abschnitt ist eine knappe Einführung in die maßtheoretische Interpretation dieser Konzepte (bzgl. kommutativer  $C^*$ -Algebren). Die zentralen Objekte in diesem Abschnitt sind positive Maße, d.h. Funktionen auf gewissen Mengensystemen, die jeder Menge eine nicht-negative Zahl zuordnen.

In Abschnitt III.4 verallgemeinern wir das Konzept eines positiven Maßes auf das Konzept eines Spektralmaßes auf einem Hilbertraum. Nun sind die Werte nicht mehr reelle Zahlen, sondern orthogonale Projektionen auf einem Hilbertraum. Die Spektralmaße stellen den Schlüssel zu allgemeinen Spektersatzen dar, die wir schließlich in Abschnitt III.4 behandeln. Dort werden wir eine Spektersatz für stetige normale Operatoren abzuleiten, den wir in Abschnitt III.5 auf unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren verallgemeinern.

#### III.1. Reproduzierende Kerne

##### Hilberträume mit reproduzierendem Kern

Für eine Menge  $M$  schreiben wir  $\mathbb{C}^M$  für den Raum aller komplexwertiger Funktionen auf  $M$ .

**Lemma III.1.1.** *Sei  $M$  eine Menge und  $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}^M$  ein Hilbertraum für den die Punktauswertungen  $f \mapsto f(m)$ ,  $m \in M$  stetig sind. Dann existiert eine Funktion  $K: M \times M \rightarrow \mathbb{C}$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Für  $y \in M$  sei  $K_y(x) := K(x, y)$ . Dann ist  $K_y \in \mathcal{H}$  und es gilt  $f(y) = \langle f, K_y \rangle$  für alle  $f \in \mathcal{H}$ .*
- (ii) *Für jede endliche Teilmenge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$  ist die Matrix*

$$(K(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,n}$$

*positiv semidefinit, insbesondere gilt auch  $K(y, x) = \overline{K(x, y)}$ .*

- (iii) Die Menge  $\{K_y: y \in M\}$  ist total in  $\mathcal{H}$ , d.h. sie erzeugt einen dichten Unterraum.  
 (iv) Für jede Orthonormalbasis  $(e_j)_{j \in J}$  und  $x, y \in M$  gilt

$$K(x, y) = \sum_{j \in J} e_j(x) \overline{e_j(y)}.$$

**Beweis.** (i) Aus der Stetigkeit der Punktauswertungen folgt die Existenz von Elementen  $K_y \in \mathcal{H}$  mit  $f(y) = \langle f, K_y \rangle$  für all  $f \in \mathcal{H}$  (Rieszscher Darstellungssatz [Ne96]). Wir setzen  $K(x, y) := K_y(x)$ . Dann ist (i) erfüllt.

(ii) Wegen  $K(y, x) = K_x(y) = \langle K_x, K_y \rangle = \overline{\langle K_y, K_x \rangle} = \overline{K(x, y)}$  ist die Matrix hermitesch. Weiter gilt für  $c \in \mathbb{C}^n$  sogar

$$\sum_{j,k} \overline{c_j} c_k K(x_j, x_k) = \sum_{j,k} \overline{c_j} c_k \langle K_{x_k}, K_{x_j} \rangle = \left\| \sum_j c_j K_{x_j} \right\|^2 \geq 0.$$

- (iii) folgt trivialerweise aus (i).  
 (iv) Das folgt aus

$$K_y = \sum_{j \in J} \langle K_y, e_j \rangle e_j = \sum_{j \in J} \overline{e_j(y)} e_j. \quad \blacksquare$$

**Definition III.1.2.** Eine Funktion  $K: M \times M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *positiv definiten Kern auf  $M$* , wenn für jede endliche Teilmenge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq M$  die Matrix  $(K(x_i, x_j))_{i,j=1,\dots,n}$  positiv semidefinit ist. Wir schreiben  $\mathcal{P}(M)$  für die Menge der positiv definiten Kerne auf  $M$ .  $\blacksquare$

Wir haben in Lemma III.1.1 gesehen, wie man positiv definite Kerne aus Hilberträumen mit stetigen Punktauswertungen erhält. In diesem Fall nennt man  $K$  den *reproduzierenden Kern von  $\mathcal{H}$* . Wir zeigen jetzt die Umkehrung, nämlich daß man jeden positiv definiten Kern so erhält.

**Satz III.1.3.** Sei  $K$  ein positiv definiten Kern auf  $M$ . Dann wird auf  $\mathcal{H}_K^0 := \text{span}\{K_y: y \in M\}$  durch

$$(1.1) \quad \left\langle \sum_j c_j K_{y_j}, \sum_k d_k K_{y_k} \right\rangle := \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} K(y_k, y_j)$$

eine Prä-Hilbertraumstruktur definiert und es gilt  $f(y) = \langle f, K_y \rangle$  für alle  $f \in \mathcal{H}_K^0$ . Die Vervollständigung  $\mathcal{H}_K$  ist ein Hilbertraum in  $\mathbb{C}^M$  mit stetigen Punktauswertungen, und  $K$  ist sein reproduzierender Kern.

**Beweis.** Wir haben zu zeigen, daß (1.1) wohldefiniert ist. Seien dazu  $f = \sum_j c_j K_{y_j}$  und  $h = \sum_k d_k K_{y_k}$ . Dann erhalten wir für die rechte Seite

$$(1.2) \quad \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} K(y_k, y_j) = \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} K_{y_j}(y_k) = \sum_k \overline{d_k} f(y_k).$$

Also ist dieser Ausdruck nicht von der Darstellung von  $f$  als Summe  $f = \sum_j c_j K_{y_j}$  abhängig. Analog sieht man, daß er nicht von der Darstellung von  $h$  abhängt. Also ist

$$\langle f, h \rangle := \sum_{j,k} c_j \overline{d_k} K(y_k, y_j)$$

wohldefiniert. Da  $K$  ein positiv definiten Kern ist, erhalten wir so eine positiv semidefinite Sesquilinearform auf dem Raum  $\mathcal{H}_0$ . Wie man an (1.2) sieht, wenn man  $h = K_y$  setzt, gilt

$$\langle f, K_y \rangle = f(y)$$

für alle  $f \in \mathcal{H}_0$ . Ist  $\langle f, f \rangle = 0$ , so liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung sofort  $|f(y)|^2 \leq K(y, y) \langle f, f \rangle = 0$ , also  $f = 0$ . Daher ist  $\mathcal{H}_0$  ein Prä-Hilbertraum mit den gewünschten Eigenschaften.

Sei nun  $\mathcal{H}_K$  die Vervollständigung von  $\mathcal{H}_K^0$ . Dann ist die Menge  $\{K_y: y \in M\}$  total in  $\mathcal{H}_K$ , denn sie ist es ja schon in  $\mathcal{H}_K^0$ . Wir können daher jedem Element  $f \in \mathcal{H}_K$  die Funktion  $y \mapsto \langle f, K_y \rangle$  zuordnen, und die Zuordnung ist injektiv. Insbesondere dürfen wir  $\mathcal{H}_K$  als Teilraum von  $\mathbb{C}^M$  betrachten. Damit ist klar, daß  $K$  der reproduzierende Kern von  $\mathcal{H}_K$  ist.  $\blacksquare$

**Lemma III.1.4.** *Seien  $K$  und  $L$  positiv definite Kerne auf  $M$ . Dann ist  $K+L$  positiv definit und es gilt*

$$\mathcal{H}_{K+L} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_L := \{f + h : f \in \mathcal{H}_K, h \in \mathcal{H}_L\}.$$

**Beweis.** Da die Summe zweier positiv semidefiniter Matrizen wieder positiv semidefinit ist, ist  $Q := K + L$  ebenfalls ein positiv definiter Kern.

Sei  $\mathcal{K} := \mathcal{H}_K \oplus \mathcal{H}_L$ . Wir definieren eine lineare Abbildung

$$\Phi: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}^M, \quad (f, h) \mapsto f + h.$$

Damit ist  $\Phi(\mathcal{K}) = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_L$ . Der Kern von  $\Phi$  ist gegeben durch die Menge aller Paare  $(f, h)$  mit

$$f(x) + h(x) = \langle f, K_x \rangle + \langle h, L_x \rangle = \langle (f, h), (K_x, L_x) \rangle = 0$$

für alle  $x \in M$ . Insbesondere ist  $\ker \Phi$  abgeschlossen und

$$\ker \Phi^\perp = \overline{\text{span}\{(K_x, L_x) : x \in M\}}.$$

Wegen  $\mathcal{K} = \ker \Phi \oplus \ker \Phi^\perp$  erhalten wir also durch  $\Phi$  eine Realisierung des Hilbertraums  $\ker \Phi^\perp$  als Hilbertraum mit reproduzierendem Kern auf  $M$ . Wegen

$$\Phi(f, h)(x) = \langle (f, h), (K_x, L_x) \rangle$$

ist sein reproduzierender Kern gegeben durch

$$(x, y) \mapsto \langle (K_y, L_y), (K_x, L_x) \rangle = \langle K_y, K_x \rangle + \langle L_y, L_x \rangle = K(x, y) + L(x, y),$$

also durch  $K + L$ . Damit ist  $\mathcal{H}_K + \mathcal{H}_L = \mathcal{H}_{K+L}$  gezeigt.  $\blacksquare$

Für spätere Anwendungen ist das folgende Lemma besonders wichtig.

**Lemma III.1.5.** *Seien  $L$  und  $K$  positiv definite Kerne auf  $M$ . Dann gilt:*

- (i) *Die Beziehung  $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_L$  ist äquivalent dazu, daß ein  $C > 0$  mit  $CL - K$  positiv definit existiert.*
- (ii) *Gilt  $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_L$ , so ist die kanonische Abbildung  $\mathcal{H}_K \rightarrow \mathcal{H}_L$  stetig.*

**Beweis.** Sei zuerst  $Q := CL - K$  ein positiv definiter Kern. Dann ist  $Q + K = CL$  und mit Lemma III.1.4 erhalten wir

$$\mathcal{H}_L = \mathcal{H}_{CL} = \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_Q,$$

insbesondere ist  $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_L$ .

Ist umgekehrt  $\mathcal{H}_K \subseteq \mathcal{H}_L$ , so sei  $A: \mathcal{H}_K \rightarrow \mathcal{H}_L$  die kanonische Abbildung. Wir zeigen, daß  $A$  stetig ist. Hierzu verwenden wir den Satz vom abgeschlossenen Graphen. Sei also  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{H}_K$  und  $A(f_n) = f_n \rightarrow h$  in  $\mathcal{H}_L$ . Wir haben  $h = A.f = f$  zu zeigen, d.h.  $f(x) = h(x)$  für alle  $x \in M$ . Für  $x \in M$  erhalten wir

$$f(x) = \langle f, K_x \rangle_{\mathcal{H}_K} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, K_x \rangle_{\mathcal{H}_K} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, L_x \rangle_{\mathcal{H}_L} = h(x).$$

Hieraus folgt die Stetigkeit von  $A$  mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (vgl. [Ne96]).

Wir zeigen noch die zweite Hälfte von (i). Da  $A$  stetig ist, ist  $AA^* \in B(\mathcal{H}_L)$ . Weiter haben wir  $A^*.L_x = K_x$  für alle  $x \in M$ , denn

$$\langle f, A^*.L_x \rangle = \langle A.f, L_x \rangle = f(x) = \langle f, K_x \rangle$$

gilt für alle  $x \in M$ . Also ist

$$\langle AA^*.L_y, L_x \rangle = \langle A.K_y, L_x \rangle = (A.K_y)(x) = K_y(x) = K(x, y).$$

Sei  $C := \|A\|^2 = \|AA^*\|$  und  $D := C\mathbf{1} - AA^*$ . Dann ist

$$\langle D.v, v \rangle = C\|v\|^2 - \|A^*.v\|^2 \geq 0$$

für alle  $v \in \mathcal{H}_L$  und  $(CL - K)(x, y) = \langle D.L_y, L_x \rangle$ . Für  $(x_1, c_1), \dots, (x_n, c_n) \in M \times \mathbb{C}$  erhalten wir also

$$\sum_{j,k=1}^n \bar{c}_j c_k (CL - K)(x_j, x_k) = \sum_{j,k=1}^n \bar{c}_j c_k \langle D.L_{x_k}, L_{x_j} \rangle = \left\langle D \cdot \sum_{k=1}^n c_k L_{x_k}, \sum_{k=1}^n c_k L_{x_k} \right\rangle \geq 0.$$

Damit ist  $CL - K$  ein positiv definiter Kern.  $\blacksquare$

## III.2. Zustände und positive Funktionale

### Positive Elemente

**Definition III.2.1.** Ein hermitesches Element  $a$  einer  $C^*$ -Algebra  $A$  heißt *positiv*, wenn  $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}^+$  gilt. In Zeichen:  $a \geq 0$ . Wir schreiben  $A_+$  für die Menge der positiven Elemente in  $A$ . ■

**Beispiel III.2.2.** Ist  $X$  kompakt und  $A = C(X)$ , so ist  $\sigma(f) = f(X)$  für jedes  $f \in C(X)$  (Beispiel II.2.7). Also ist  $f \geq 0$  genau dann, wenn  $f$  eine positive Funktion ist. ■

**Lemma III.2.3.** In einer komplexen Algebra  $A$  mit  $\mathbf{1}$  gilt für  $x, y \in A$  die Beziehung

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}.$$

**Beweis.** Wir haben zu zeigen, daß für  $\lambda \neq 0$  das Element  $\lambda\mathbf{1} - xy$  genau dann invertierbar ist, wenn  $\lambda\mathbf{1} - yx$  invertierbar ist. Hierzu dürfen wir o.B.d.A.  $\lambda = \mathbf{1}$  annehmen.

Sei  $\mathbf{1} - xy$  invertierbar und  $z = (\mathbf{1} - xy)^{-1}$ . Wir setzen  $a := \mathbf{1} + yzx$ . Aus  $zxy = xyz = z - \mathbf{1}$  folgt dann

$$\begin{aligned} a(\mathbf{1} - yx) &= (\mathbf{1} + yzx)(\mathbf{1} - yx) = \mathbf{1} + yzx - yx - yzxyx \\ &= \mathbf{1} + yzx - yx - y(z - \mathbf{1})x = \mathbf{1} + yzx - yx - yzx + yx = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - yx)a &= (\mathbf{1} - yx)(\mathbf{1} + yzx) = \mathbf{1} + yzx - yx - yxyzx \\ &= \mathbf{1} + yzx - yx - y(z - \mathbf{1})x = \mathbf{1} + yzx - yx - yzx + yx = \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Also ist  $a = (\mathbf{1} - yx)^{-1}$ . Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Lemma III.2.4.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Zu jedem positiven Element  $a$  existiert genau ein positives  $b \in A$  mit  $b^2 = a$ .
- (ii) Zu jedem hermiteschen Element  $a$  existieren eindeutig bestimmte positive  $a_+, a_- \in A$  mit  $a = a_+ - a_-$  und  $a_+a_- = a_-a_+ = 0$ .
- (iii) Aus  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  folgt  $a + b \geq 0$ .
- (iv) Aus  $-aa^* \geq 0$  folgt  $a = 0$ .

**Beweis.**

(i) Zur Existenz: Ist  $a$  positiv, so ist  $\hat{a}$  eine nicht-negative Funktion auf  $\sigma(a)$  und somit existiert ein  $b \in A_x$  mit  $\hat{b} := \sqrt{\hat{a}}$ . Damit ist  $\hat{b}^2 = \hat{a}$ , also  $b^2 = a$ . Es ist klar, daß  $b$  positiv ist, da  $\sigma(b) = \sqrt{\sigma(a)} \subseteq \mathbb{R}^+$  gilt.

Zur Eindeutigkeit: Sei  $c$  positiv mit  $c^2 = a$ . Dann kommutiert  $c$  mit  $a$  und folglich erzeugen beide eine kommutative  $C^*$ -Unteralgebra  $A_1 \subseteq A$ . Sei  $A_1 \cong C(X)$ . Dann ist  $c$  nach obiger Bemerkung positiv in  $A_1$ , also eine positive Quadratwurzel von  $x$  in  $C(X)$ . Das gleiche gilt für  $b \in A_a \subseteq A_1$ . Da in  $C(X)$  die positiven Quadratwurzeln eindeutig sind, folgt  $b = c$ .

(ii) Sei  $a \in A$  hermitesch. Wir definieren  $a_+$  und  $a_-$  als diejenigen Elemente von  $A_a$  mit der Eigenschaft, daß  $\hat{a}_+ = \max(\hat{a}, 0)$  und  $\hat{a}_- = \max(-\hat{a}, 0)$  gelten. Damit sind  $a_+$  und  $a_-$  positiv mit  $a = a_+ - a_-$  und es gilt  $a_+a_- = a_-a_+ = 0$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $a = y_+ - y_-$  mit positiven Elementen  $y_+, y_-$  für die  $y_+y_- = y_-y_+ = 0$  gilt. Dann kommutieren  $y_+$  und  $y_-$  mit  $x$  und erzeugen folglich zusammen mit

$A_a$  eine kommutative  $C^*$ -Unteralgebra  $A_1 \subseteq A$ . Sei  $A_1 \cong C(X)$ . Wir dürfen nun  $A = C(X)$  annehmen. Für  $p \in X$  mit  $a(p) = 0$  folgt  $y_+(p) = y_-(p) = 0$  aus  $y_+(p) - y_-(p) = 0$  und  $y_+(p)y_-(p) = 0$ . Ist  $a(p) > 0$ , so ist  $y_+(p) > 0$  und daher  $y_-(p) = 0$ , also  $y_+(p) = a(p)$ . Folglich ist  $y_+ = \max(a, 0)$  und  $y_- = \max(-a, 0)$ . Insbesondere sind beide eindeutig bestimmt.

(iii) Sei  $c := a + b$ . Dann ist  $c$  hermitesch und folglich  $\sigma(c) \subseteq \mathbb{R}$  (Lemma II.3.11).

Sei  $\alpha := \|a\|$  und  $\beta := \|b\|$ . Wegen  $\sigma(a) \subseteq [0, \alpha]$  ist  $\sigma(\alpha\mathbf{1} - a) \subseteq [0, \alpha]$ , also  $\|\alpha\mathbf{1} - a\| = r(\alpha\mathbf{1} - a) \leq \alpha$ . Analog folgt  $\|\beta\mathbf{1} - b\| \leq \beta$ . Daher ist

$$\|(\alpha + \beta)\mathbf{1} - c\| \leq \|\alpha\mathbf{1} - a\| + \|\beta\mathbf{1} - b\| \leq \alpha + \beta.$$

Aus  $\lambda \in \sigma(c)$  folgt daher

$$|\alpha + \beta - \lambda| \leq \alpha + \beta$$

wegen  $\alpha + \beta - \lambda \in \sigma((\alpha + \beta)\mathbf{1} - c)$ . Damit ist insbesondere  $\lambda \geq 0$ .

(iv) Aus Lemma III.2.3 erhalten wir zunächst  $\sigma(-a^*a) \setminus \{0\} = \sigma(-aa^*) \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ . Also ist auch  $-a^*a \geq 0$ . Schreiben wir  $a = b + ic$  mit hermiteschen Elementen  $b, c \in A$ , so erhalten wir wie in Lemma II.1.5(v) und mit (iv):

$$aa^* + a^*a = 2(b^2 + c^2) \geq 0,$$

denn  $b^2 \geq 0$  wegen  $\sigma(b^2) = \sigma(b)^2$  (vgl. Bemerkung II.3.17) und ebenso für  $c$ . Damit ist  $a^*a = aa^* + a^*a - (aa^*) \geq 0$ , folglich  $\sigma(a^*a) = \{0\}$  und daher  $\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \{0\}$ , d.h.  $a = 0$ . ■

**Satz III.2.5.** (Kaplansky, 1953) *Ein Element  $a$  einer  $C^*$ -Algebra  $A$  mit Eins ist genau dann positiv, wenn ein  $b \in A$  mit  $a = bb^*$  existiert.*

**Beweis.** Ist  $a \geq 0$  und  $b$  die positive Quadratwurzel von  $a$ , so gilt  $a = b^2 = bb^*$  (Lemma III.2.3(ii)).

Die Umkehrung ist wesentlich schwieriger einzusehen. Sei also  $b \in A$ . Wir haben zu zeigen, daß das hermitesche Element  $a := bb^*$  positiv ist. Sei  $a = a_+ - a_-$  wie in Lemma III.2.3(iii). Es bleibt  $a_- = 0$  zu zeigen. Wegen  $a_+a_- = 0$  haben wir

$$(ba_-)^*(ba_-) = a_-^*b^*ba_- = a_-(a_+ - a_-)a_- = -a_-^3,$$

also ist  $-(ba_-)^*(ba_-)$  positiv und somit  $ba_- = 0$  wegen Lemma III.2.4(iv). Damit ist  $a_-^3 = 0$  und folglich  $a_- = 0$  wegen  $\|a_-\| = r(a_-)$ . ■

### Positive Funktionale

**Definition III.2.6.** (a) Sei  $S$  eine involutive Halbgruppe. Eine Funktion  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *positiv definit*, wenn  $K_\varphi(s, t) := \varphi(st^*)$  ein positiv definiten Kern ist.

(b) Sei  $A$  eine involutive Algebra. Ein lineares Funktional  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *positiv*, wenn  $f$  eine positiv definite Funktion im Sinne von (a) ist. ■

**Lemma III.2.7.** *Für ein lineares Funktional  $f$  auf einer involutiven Algebra  $A$  sind äquivalent:*

- (1) *Das Funktional  $f$  ist positiv.*
- (2) *Die durch  $K_f(a, b) := f(ab^*)$  definierte Sesquilinearform ist positiv semidefinit.*
- (3) *Es gilt  $f(aa^*) \geq 0$  für alle  $a \in A$ .*

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2): Zunächst ist  $K_f$  ein positiv definiten Kern auf  $A$ . Damit ist die Form  $K_f$  aber auch hermitesch und positiv semidefinit, denn es gilt  $K_f(a, a) \geq 0$  für alle  $a \in A$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Das folgt sofort aus  $f(aa^*) = K_f(a, a) \geq 0$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Seine  $x_1, \dots, x_n \in A$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ . Dann ist

$$\sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j f(a_i a_j^*) = \sum_{i,j=1}^n c_i \bar{c}_j K_f(a_i, a_j) = K_f\left(\sum_{i=1}^n c_i a_i, \sum_{i=1}^n c_i a_i\right) \geq 0.$$

Also ist  $K_f$  ein positiv definiten Kern, d.h.  $f$  ist positiv. ■

**Proposition III.2.8.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins und  $f$  ein positives Funktional auf  $A$ . Dann gilt:

- (i)  $f(a^*) = \overline{f(a)}$
- (ii)  $|f(ab^*)|^2 \leq f(aa^*)f(bb^*)$ .
- (iii)  $|f(x)| \leq f(\mathbf{1})\|x\|$  für jedes  $x \in A$ .
- (iv) Das Funktional  $f$  ist stetig mit  $\|f\| = f(\mathbf{1})$ .
- (v) Auf einer  $C^*$ -Algebra  $A$ , die nicht notwendigerweise ein Einselement besitzt, ist jedes positive Funktional stetig.

**Beweis.** (i), (ii) Die Form  $K_f(a, b) := f(ab^*)$  ist nach Lemma III.2.7 positiv semidefinit, insbesondere hermitesch. Also ist

$$f(a^*) = K_f(\mathbf{1}, a) = \overline{K_f(a, \mathbf{1})} = \overline{f(a)}.$$

Die Behauptung (ii) ist gerade die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für  $K_f$ .

(iii) Setzen wir in (ii) die Werte  $a = x$  und  $b = \mathbf{1}$  ein, so erhalten wir  $|f(x)|^2 \leq f(\mathbf{1})f(xx^*)$ . Es bleibt also  $f(xx^*) \leq f(\mathbf{1})\|x\|^2$  zu zeigen. Sei dazu  $t > \|x\|^2 = r(xx^*)$  (Lemma II.2.15). Dann ist  $\sigma(t - xx^*) = t - \sigma(xx^*) \subseteq \mathbb{R}^+$  und daher  $t - xx^*$  positiv. Nach Lemma III.2.3 existiert also ein hermitesches Element  $u \in A$  mit  $t - xx^* = u^2$ . Damit ist

$$tf(\mathbf{1}) - f(xx^*) = f(u^2) \geq 0,$$

also  $f(xx^*) \leq f(\mathbf{1})t$ . Da  $t$  beliebig war, folgt hieraus (iii).

(iv) Aus (iii) folgt sofort die Stetigkeit mit  $\|f\| \leq f(\mathbf{1})$ . Die Gleichheit folgt aus  $f(\mathbf{1}) \leq \|f\| \cdot \|\mathbf{1}\| = \|f\|$ .

(v) Sei  $f$  ein positives Funktional auf  $A$ . Wir zeigen zuerst, daß  $f$  auf der Menge  $M := \{a \in A : 0 \leq a \leq \mathbf{1}\}$  beschränkt ist. Hierbei bedeutet  $a \leq b$ , daß das Element  $b - a$  positiv ist. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann existiert eine Folge  $x_n \in M$  mit  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . Für eine summierbare Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^+$  bilden wir das Element  $x := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$  und beachten, daß die Reihe absolut konvergiert. Für jedes  $m \in \mathbb{N}$  gilt nun

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j x_n \leq x$$

und daher

$$f\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_j f(x_j) \leq f(x).$$

Wegen  $f(x_j) \geq 0$  für alle  $j$  folgt hieraus die Konvergenz der Reihe  $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f(x_j)$ . Da die Folge  $\lambda \in l^1$  beliebig positiv war, erhalten wir hieraus weiter  $(f(x_j))_{j \in \mathbb{N}} \in l^\infty$ , und damit einen Widerspruch. Folglich existiert ein  $C > 0$  mit  $f(x) \leq C$  für alle  $x \in M$ . Ist  $x = x^*$  mit  $\|x\| \leq 1$  und  $x = x_+ - x_-$  die Zerlegung in positiven und negativen Anteil (Lemma III.2.4(iv)), so gilt  $\|x_-\|, \|x_+\| \leq 1$  und daher

$$|f(x)| \leq f(x_+) - f(x_-) \leq 2C.$$

Für ein allgemeines Element folgt hieraus

$$|f(x)| \leq \left|f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x-x^*}{2}\right)\right| \leq 2C + 2C = 4C.$$

Also ist  $f$  stetig mit  $\|f\| \leq 4C$ . ■

### Zustände

**Definition III.2.9.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Einselement. Ein Funktional  $\varphi \in A'$  mit  $\varphi(\mathbf{1}) = \|\varphi\| = 1$  heißt *Zustand*. Die Menge aller Zustände wird mit  $\mathcal{S}(A)$  bezeichnet. ■

**Lemma III.2.10.** Die Menge  $\mathcal{S}(A)$  ist eine konvexe schwach- $*$ -kompakte Teilmenge von  $A'$ .

**Beweis.** Nach dem Satz von Alaoglu-Bourbaki (vgl. [Ne96]) ist  $B' := \{\alpha \in A' : \|\alpha\| \leq 1\}$  eine schwach- $*$ -kompakte konvexe Menge. Gilt  $\alpha(\mathbf{1}) = 1$ , so ist natürlich  $\|\alpha\| = 1$  wegen  $\|\mathbf{1}\| = 1$ . Folglich ist

$$\mathcal{S}(A) = \{\varphi \in B' : \varphi(\mathbf{1}) = 1\},$$

also schwach- $*$ -abgeschlossen und damit auch schwach- $*$ -kompakt. Die Konvexität ist klar. ■

**Beispiel III.2.11.** (a) Ist  $A = C(X)$  für einen kompakten Raum  $X$ , so nennt man die Zustände auch *Radon-Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$* . Wie kommen auf diese Interpretation später zurück.

Beispiele für Zustände bekommt man wie folgt. Für jedes  $x \in X$  sei  $\delta_x: f \mapsto f(x)$  das Auswertungsfunktional. Dann ist  $\|\delta_x\| = 1$  und  $\delta_x(\mathbf{1}) = 1$ . Also ist  $\delta_x$  ein Zustand. Wir werden bald sehen, daß die Auswertungsfunktionale, die ja gerade die Charaktere von  $C(X)$  sind (Beispiel II.2.22(b)), geometrisch die Extrempunkte in der Menge  $\mathcal{S}(C(X))$  bilden (Korollar III.2.23).

(b) Ist  $A = B(\mathcal{H})$  für einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $v \in \mathcal{H}$  mit  $\|v\| = 1$ , so wird durch

$$A \mapsto \langle A.v, v \rangle$$

ein Zustand in  $\mathcal{S}(B(\mathcal{H}))$  definiert (Nachweis als Übung). Solche Zustände nennt man *Vektorzustände*.

Sei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{H}$  mit  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|v_n\|^2 = 1$ . Dann wird durch

$$A \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \langle A.v_n, v_n \rangle$$

ein Zustand von  $B(\mathcal{H})$  definiert. Auch auf diesen Typ von Zuständen werden wir später noch einmal zu sprechen kommen, wenn es um Spurklasse-Operatoren geht. ■

**Lemma III.2.12.** Für ein lineares Funktional  $\varphi$  auf einer  $C^*$ -Algebra  $A$  mit Eins sind äquivalent:

- (1)  $\varphi$  ist positiv mit  $\|\varphi\| = 1$ .
- (2)  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ .

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2): Ist  $\varphi$  positiv, so haben wir  $\|\varphi\| = \varphi(\mathbf{1})$  (Proposition III.2.8(iv)). Gilt also  $\|\varphi\| = 1$ , so ist  $\varphi$  ein Zustand.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Sei nun  $\varphi$  ein Zustand. Wir haben zu zeigen, daß  $\varphi(aa^*) \geq 0$  für alle  $a \in A$  gilt.

Sei  $\alpha := \|aa^*\| = \|a\|^2$ . Da  $aa^*$  positiv ist, gilt  $\sigma(aa^*) \subseteq [0, \alpha]$  (Satz III.2.5), also  $\|\alpha\mathbf{1} - aa^*\| = r(\alpha\mathbf{1} - aa^*) \leq \alpha$ . Daher ist

$$\alpha - \varphi(aa^*) = \varphi(\alpha\mathbf{1} - aa^*) \leq \|\varphi\| \|\alpha\mathbf{1} - aa^*\| \leq 1 \cdot \alpha = \alpha$$

und folglich  $\varphi(aa^*) \geq 0$ . ■

**Satz III.2.13.** Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins und  $x \in A$  hermitesch.

- (i) Für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  ist  $\varphi(x) \in \mathbb{R}$  und für alle  $\lambda \in \sigma(x)$  existiert ein Zustand  $\varphi$  mit  $\varphi(x) = \lambda$ .
- (ii) Das Element  $x$  ist genau dann positiv, wenn  $\varphi(x) \geq 0$  für alle Zustände  $\varphi$  gilt.

**Beweis.** (i) Sei  $x = x_+ - x_-$  die Zerlegung in zwei positive Elemente. Nach Lemma III.2.12 ist  $\varphi$  positiv, und somit  $\varphi(x_+), \varphi(x_-) \in \mathbb{R}^+$ . Also ist  $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ .

Sei nun  $\lambda \in \sigma(x)$  und  $A_x$  die von  $x$  und  $\mathbf{1}$  erzeugte abgeschlossene Unter algebra von  $A$  mit Eins. Nach Korollar II.3.15 ist  $\sigma_A(x) = \sigma_{A_x}(x)$  und gemäß Satz II.3.14 ist  $A_x \cong C(\sigma(x))$ , so daß  $x$  der identischen Funktion entspricht. Sei  $\delta_\lambda: A_x \rightarrow \mathbb{C}$  die Punktauswertung in dem Element  $\lambda \in \sigma(x)$ . Dann ist  $\delta_\lambda \in \mathcal{S}(A_x)$ . Mit dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach (siehe [Ne96]) finden wir eine Fortsetzung  $\nu \in A'$  mit  $\|\nu\| = \|\delta_\lambda\| = 1$ . Wegen  $\nu(\mathbf{1}) = 1$  ist  $\nu \in \mathcal{S}(A)$ . Weiter ist  $\nu(x) = \delta_\lambda(x) = \hat{x}(\lambda) = \lambda$ .

(ii) Ist  $x$  positiv, so haben wir im Beweis von (i) schon bemerkt, daß alle Zustände auf  $x$  positive Werte haben. Die Umkehrung folgt direkt aus  $\sigma(x) \subseteq \mathcal{S}(A)(x)$ , was in (i) gezeigt wurde. ■

**Definition III.2.14.** (a) Eine Teilmenge  $C$  eines reellen Vektorraums  $V$  heißt *konvexer Kegel*, wenn  $C$  konvex ist und  $\mathbb{R}^+C \subseteq C$  gilt.

(b) Ist  $V$  ein topologischer Vektorraum und  $V$  dessen Dualraum, so heißt

$$C^* := \{\alpha \in V': \langle \alpha, C \rangle \subseteq \mathbb{R}^+\}$$

der *Dualkegel* von  $C$ .

Ist  $W \subseteq V'$  eine Teilmenge, so heißt

$$W^* := \{v \in V: \langle W, v \rangle \subseteq \mathbb{R}^+\}$$

der Dualkegel von  $W$  in  $V$ . Man zeige als Übung, daß  $W^*$  ein abgeschlossener Kegel in  $V$  ist. ■

**Satz III.2.15.** (Dualitätssatz für Kegel) Ist  $V$  ein lokalkonvexer reeller Vektorraum und  $C \subseteq V$  ein abgeschlossener konvexer Kegel, so gelten

$$C = (C^*)^* \quad \text{und} \quad (C^*)^\perp = C \cap -C.$$

**Beweis.** Die Inklusion  $C \subseteq (C^*)^*$  ist trivial. Um die Umkehrung zu zeigen, sei  $x \notin C$ . Nach dem Trennungssatz von Masur (siehe [Ne96]) existiert ein lineares Funktion  $\alpha \in V'$  mit  $\inf \alpha(C) > \alpha(x)$ . Da  $C$  ein Kegel ist, folgt hieraus  $\inf \alpha(C) = 0$ , d.h.  $\alpha \in C^*$  und  $\alpha(x) < 0$ . Also ist  $x \notin (C^*)^*$  und folglich  $C = (C^*)^*$ .

Hieraus erhalten wir direkt

$$C \cap (-C) = (C^*)^* \cap -(C^*)^* = (C^*)^\perp$$

und damit ist alles gezeigt. ■

**Lemma III.2.16.** Ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins, so ist die Menge  $A_+$  der positiven Elemente in  $A$  ein abgeschlossener konvexer Kegel.

**Beweis.** In der neu eingeführten Kegel-Terminologie haben wir in Satz III.2.13(ii) gezeigt, daß

$$A_+ = \mathcal{S}(A)^*$$

ist. Hieraus folgt die Behauptung sofort (vgl. Definition III.2.13). ■



### Die Gelfand-Neimark-Segal (GNS)-Konstruktion

In diesem Abschnitt behandeln wir eine Konstruktion, die die Grundlage der Darstellungstheorie der  $C^*$ -Algebren und ebenso von lokalkompakten Gruppen bildet. Sie ist deswegen so wichtig, weil sie zwei mathematische Gebiete miteinander verbindet: Die Darstellungstheorie auf der einen Seite und die Konvexgeometrie auf der anderen Seite. Sie wird uns die Möglichkeit an die Hand geben darstellungstheoretische Fragestellungen in geometrische umzusetzen und so zu lösen. Leider können wir diesen wunderschönen Themenkomplex hier aus Zeitgründen nur streifen.

Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins und  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $A$  auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , d.h.  $\pi: A \rightarrow B(\mathcal{H})$  ist ein Homomorphismus von  $C^*$ -Algebren mit Eins. Wir haben schon in Satz II.2.18 (Stetigkeitssatz für  $C^*$ -Algebren) gesehen, daß  $\pi$  dann automatisch eine Kontraktion, insbesondere also stetig ist. Für jeden Einheitsvektor  $v \in \mathcal{H}$  erhalten wir durch  $\varphi_v(a) := \langle \pi(a).v, v \rangle$  also einen Zustand, denn es gilt  $\varphi_v(\mathbf{1}) = \|v\|^2 = 1$  und  $\varphi_v(a^*a) = \|\pi(a).v\|^2 \geq 0$  (vgl. Lemma III.2.12).

**Theorem III.2.17.** (Die GNS-Konstruktion; Segal, 1947) *Zu jedem Zustand  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  existiert eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  von  $A$  und ein Einheitsvektor  $v \in \mathcal{H}$  mit  $\varphi(s) = \langle \pi(s).v, v \rangle$ .*

*Konkreter sei  $K(s, t) := \varphi(st^*)$  der zu  $\varphi$  assoziierte positiv definite Kern auf  $A$  und  $\mathcal{H}_\varphi := \mathcal{H}_K \subseteq \mathbb{C}^A$  der zugehörige Hilbertraum. Dann wird durch*

$$(\pi_\varphi(s).f)(x) := f(xs)$$

für  $x, s \in A$  eine Darstellung von  $A$  auf  $\mathcal{H}_\varphi$  definiert. Weiter gilt  $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$ ,  $K_s = \pi_\varphi(s^*).\varphi$  und

$$\varphi(s) = \langle \pi(s).\varphi, \varphi \rangle.$$

**Beweis.** Wir wissen aus Lemma III.2.12, daß  $\varphi$  positiv ist. Also wird durch  $K(a, b) := \varphi(ab^*)$  auf  $A$  ein positiv definiter Kern definiert. Sei  $\mathcal{H}_\varphi := \mathcal{H}_K \subseteq \mathbb{C}^A$  der zugehörige Hilbertraum mit reproduzierendem Kern  $K$  (Proposition III.1.3) und  $\mathcal{H}_\varphi^0 = \{K_a : a \in A\}$  der dichte Unterraum, der aus den Punktauswertungen besteht. Daß diese schon einen Unterraum bilden folgt aus der Sesquilinearität von  $K$ .

Für  $s \in A$  betrachten wir die Abbildung

$$\pi_0(s): \mathcal{H}_K^0 \rightarrow \mathcal{H}_K^0, \quad K_a \mapsto K_{as^*}.$$

Wegen  $K_a(x) = K(x, a) = \varphi(xa^*)$  ist damit  $(\pi_0(s).f)(x) = f(xs)$  für alle  $f \in \mathcal{H}_K^0$ . Insbesondere ist  $\pi_0(s)$  linear. Wir haben dann

$$\|\pi_0(s).K_a\|^2 = \|K_{as^*}\|^2 = K(as^*, as^*) = \varphi(as^*sa^*).$$

Nun beachten wir, daß  $\varphi_a(x) := \varphi(axa^*)$  ebenfalls ein positives Funktional auf  $A$  ist. Aus Proposition III.2.8(iii) erhalten wir also

$$\varphi(as^*sa^*) = \varphi_a(s^*s) \leq \varphi_a(\mathbf{1})\|s^*s\| = \varphi(aa^*)\|s\|^2 = \|K_a\|^2\|s\|^2.$$

Also ist  $\pi_0(s)$  eine stetige lineare Abbildung mit  $\|\pi_0(s)\| \leq \|s\|$ . Folglich können wir diese lineare Abbildung zu einer stetigen linearen Abbildung  $\pi_\varphi(s): \mathcal{H}_\varphi \rightarrow \mathcal{H}_\varphi$  fortsetzen.

Für  $f \in \mathcal{H}_\varphi$  wählen wir eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $f_n \rightarrow f$ . Dann ist

$$\begin{aligned} (\pi_\varphi(s).f)(x) &= \langle \pi_\varphi(s).f, K_x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \pi_0(s).f_n, K_x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(xs) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, K_{xs} \rangle = \langle f, K_{xs} \rangle = f(xs). \end{aligned}$$

Der Operator  $\pi_\varphi(s)$  ist also durch die gleiche Formel wie  $\pi_0(s)$  gegeben. Wir haben gesehen, daß die Wirkung von  $A$  auf  $\mathbb{C}^A$ , die durch  $(s.f)(x) := f(xs)$  gegeben ist, den Hilbertraum  $\mathcal{H}_\varphi$  invariant läßt und wir so einen Homomorphismus  $\pi_\varphi: A \rightarrow B(\mathcal{H}_\varphi)$  erhalten. In der Tat ist

$$(\pi_\varphi(st).f)(x) = f(xst) = (\pi_\varphi(t).f)(xs) = \pi_\varphi(s).(\pi_\varphi(t).f)(x).$$

Um zu sehen, daß wir so eine Darstellung erhalten, ist noch  $\pi_\varphi(s^*) = \pi_\varphi(s)^*$  zu zeigen. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \langle \pi_\varphi(s^*).K_x, K_y \rangle &= \langle K_{xs}, K_y \rangle = K(y, xs) = \varphi(ys^*x^*) \\ &= K(ys^*, x) = \langle K_x, K_{ys^*} \rangle = \langle K_x, \pi_\varphi(s).K_y \rangle \end{aligned}$$

für alle  $x, y \in A$ . Da die Abbildungen  $(f, g) \mapsto \langle \pi_\varphi(s).f, g \rangle$  und  $(f, g) \mapsto \langle f, \pi_\varphi(s^*).g \rangle$  auf  $\mathcal{H}_\varphi \times \mathcal{H}_\varphi$  stetig sind und auf dem dichten Unterraum  $\mathcal{H}_\varphi^0$  übereinstimmen, folgt  $\pi_\varphi(s^*) = \pi_\varphi(s)^*$ . Wir haben somit eine Darstellung  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  von  $A$  konstruiert. Wegen  $K_1 = \varphi$  erhalten wir weiter

$$\langle \pi_\varphi(s).\varphi, \varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(s).K_1, K_1 \rangle = \langle K_{s^*}, K_1 \rangle = K(\mathbf{1}, s^*) = \varphi(s).$$

Hiermit ist der Beweis vollständig. ■

**Beispiel III.2.18.** Um die GNS-Konstruktion besser zu verstehen, diskutieren wir ein paar Beispiele.

(a) Sei  $A = B(\mathbb{C}^n)$  und  $\varphi(a) = \frac{1}{n} \operatorname{tr} a$ . Dann ist  $\varphi$  ein Zustand. Der zugehörige Hilbertraum sieht wie folgt aus:  $\mathcal{H} = B(\mathbb{C}^n)$  mit dem Skalarprodukt  $\langle a, b \rangle = \operatorname{tr}(ab^*)$  und die Darstellung ist gegeben durch  $\pi(s).a = sa$ . Der zyklische Vektor ist  $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}$ , denn es gilt

$$\frac{1}{n} \langle \pi(s).\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \frac{1}{n} \langle s, \mathbf{1} \rangle = \frac{1}{n} \operatorname{tr} s = \varphi(s).$$

Übung: Man ergänze die Details in obiger Konstruktion.

(b) Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $v \in \mathcal{H}$  ein Einheitsvektor und  $A = B(\mathcal{H})$ . Wir betrachten den Vektorzustand  $\varphi_v(a) = \langle a.v, v \rangle$ . Zur Übung zeige man, daß die GNS-Konstruktion in diesem Fall die kanonische Darstellung von  $B(\mathcal{H})$  auf  $\mathcal{H}$  liefert. ■

Der hier beschrittene Weg der GNS-Konstruktion hat gegenüber den Konstruktionen, die man in der Literatur findet, den Vorteil, daß er einen kanonischen Hilbertraum liefert, der in  $\mathbb{C}^A$  liegt. (Er liegt sogar in  $A$ ! Übung) Diese Tatsache macht einige Aussagen über diese Darstellungen viel transparenter. Wir wenden uns jetzt den Anwendungen zu.

**Satz III.2.19.** Eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  von  $A$  ist genau dann zyklisch, wenn sie zu einer einem Zustand  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  assoziierten Darstellung  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  äquivalent ist.

**Beweis.** Sei zuerst  $\varphi$  ein Zustand und  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  die zugehörige GNS-Darstellung. Wir behaupten, daß  $\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$  ein zyklischer Vektor ist. In der Tat gilt  $\varphi = K_1$  und  $\pi_\varphi(s).K_1 = K_{s^*}$ , also  $\pi_\varphi(A).\varphi = \mathcal{H}_\varphi^0$ , und dieser Raum ist dicht in  $\mathcal{H}_\varphi$ .

Sei umgekehrt  $(\rho, \mathcal{H})$  eine zyklische Darstellung und  $v \in \mathcal{H}$  ein zyklischer Einheitsvektor. Wir setzen  $\varphi(s) := \langle \rho(s).v, v \rangle$  und beachten, daß  $\varphi$  ein Zustand ist. Wir behaupten, daß  $(\rho, \mathcal{H})$  zu  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  äquivalent ist. Wir betrachten hierzu die Abbildung

$$\Phi: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^A \quad \text{mit} \quad \Phi(w)(s) = \langle \rho(s).w, v \rangle.$$

$\Phi$  ist injektiv: Ist  $\Phi(w) = 0$ , so ist  $\langle \rho(s).w, v \rangle = \langle w, \rho(s^*).v \rangle = 0$  für alle  $s \in A$  und somit  $w \in (\rho(A).v)^\perp = \{0\}$ . Also ist  $\Phi$  injektiv.

$\Phi$  ist äquivariant, d.h.  $\Phi \circ \rho(s) = \pi(s) \circ \Phi$  für alle  $s \in S$ . In der Tat ist

$$(\pi(s).\Phi(w))(x) = \Phi(w)(xs) = \langle \rho(xs).w, v \rangle = \langle \rho(x)\rho(s).w, v \rangle = \Phi(\rho(s).w)(x).$$

$\Phi$  ist eine unitäre Abbildung  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\varphi$ : Zunächst haben wir  $\Phi(v) = \varphi$  und wegen der Äquivarianz  $\Phi(\rho(A).v) = \pi_\varphi(A).\varphi = \mathcal{H}_\varphi^0$ . Für  $s, t \in A$  ist weiter

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\rho(s).v), \Phi(\rho(t).v) \rangle &= \langle \pi_\varphi(s).\varphi, \pi_\varphi(t).\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(t^*s).\varphi, \varphi \rangle \\ &= \varphi(t^*s) = \langle \rho(t^*s).v, v \rangle = \langle \rho(s).v, \rho(t).v \rangle. \end{aligned}$$

Also ist  $\Phi|_{\rho(A).v}: \rho(A).v \rightarrow \mathcal{H}_\varphi^0$  eine Isometrie. Diese Isometrie läßt sich zu einer isometrischen Einbettung  $\tilde{\Phi}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\varphi$  fortsetzen. Für  $x \in A$  ist dann

$$\tilde{\Phi}(w)(x) = \langle \tilde{\Phi}(w), K_x \rangle = \langle \tilde{\Phi}(w), \Phi(\rho(x^*).v) \rangle = \langle w, \rho(x^*).v \rangle = \langle \rho(x).w, v \rangle = \Phi(w)(x),$$

d.h.  $\tilde{\Phi} = \Phi$ . Folglich ist  $\Phi$  eine isometrische Einbettung  $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_\varphi$ . Da das Bild von  $\Phi$  den dichten Unterraum  $\mathcal{H}_\varphi^0$  enthält, ist  $\Phi$  surjektiv. Somit sind die beiden Darstellungen  $(\rho, \mathcal{H})$  und  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  äquivalent. ■

**Satz III.2.20.** (Satz von Gelfand-Neimark) *Jede  $C^*$ -Algebra ist isomorph zu einer abgeschlossenen Unteralgebra einer Algebra  $B(\mathcal{H})$  für einen Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .*

**Beweis.** Da wir jede  $C^*$ -Algebra ohne Eins isometrisch in eine  $C^*$ -Algebra mit Eins einbetten können (Satz III.2.5), dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins ist.

Für einen Zustand  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  sei  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$ , die in Theorem III.2.17 konstruierte Darstellung. Wir betrachten die Darstellung  $\pi := \hat{\bigoplus}_{\varphi \in \mathcal{S}(A)} \pi_\varphi$  (vgl. Satz I.3.8). Hierbei beachten wir, daß diese Darstellung existiert, da

$$\|\pi(s)\| = \sup\{\|\pi_\varphi(s)\|: \varphi \in \mathcal{S}(A)\} \leq \|s\|$$

ist (Satz II.2.18).

Wir zeigen, daß  $\pi$  isometrisch ist. Sei dazu  $s \in A$ . Dann ist  $s^*s$  hermitesch. Also ist  $\|s^*s\| = r(s^*s) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(s^*s)\}$ . Nach Satz III.2.13 existiert ein  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  mit  $\varphi(s^*s) = \|s^*s\|$ . Damit ist  $\|\pi_\varphi(s)\|^2 \geq \|\pi_\varphi(s).\varphi\|^2 = \varphi(s^*s) = \|s^*s\|$ . Das führt zu

$$\|\pi(s)\|^2 \geq \|\pi_\varphi(s)\|^2 = \|\pi_\varphi(s^*s)\| = \|s^*s\| = \|s\|^2.$$

Wir haben hiermit gezeigt, daß  $\pi$  isometrisch ist, d.h. ein Isomorphismus von  $C^*$ -Algebren  $A \rightarrow \pi(A) \subseteq B(\mathcal{H})$ . ■

**Definition III.2.21.** Ein Zustand  $\varphi$  einer  $C^*$ -Algebra  $A$  mit Eins heißt *reiner Zustand*, wenn  $\varphi$  ein Extrempunkt der konvexen Menge  $\mathcal{S}(A)$  ist. ■

**Theorem III.2.22.** *Sei  $A$  eine  $C^*$ -Algebra mit Eins,  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$ , sowie  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  die zugehörige GNS-Darstellung. Dann ist  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  genau dann irreduzibel, wenn  $\varphi$  ein reiner Zustand ist.*

**Beweis.** Sei zunächst  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  nicht irreduzibel. Dann existiert ein echter abgeschlossener Unterraum  $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$  und wir erhalten mit  $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_1^\perp$  eine orthogonale  $A$ -invariante Zerlegung

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2.$$

Da  $\varphi$  ein zyklischer Vektor ist (Satz III.2.19), liegt  $\varphi$  in keinem der beiden Unterräume, für  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  gilt also  $\varphi_1, \varphi_2 \neq 0$ . Für  $s \in A$  ist

$$\varphi_1(s) = \langle \varphi_1, \pi_\varphi(s^*).\varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(s).\varphi_1, \varphi \rangle = \langle \pi_\varphi(s).\varphi_1, \varphi_1 \rangle.$$

Also ist  $\tilde{\varphi}_1 := \frac{1}{\|\varphi_1\|^2} \varphi_1$  ein Zustand und analog  $\tilde{\varphi}_2 = \frac{1}{\|\varphi_2\|^2} \varphi_2$ . Somit erhalten wir eine Darstellung

$$\varphi = \|\varphi_1\|^2 \tilde{\varphi}_1 + \|\varphi_2\|^2 \tilde{\varphi}_2 \quad \text{mit} \quad 1 = \|\varphi\|^2 = \|\varphi_1\|^2 + \|\varphi_2\|^2$$

und sehen, daß  $\varphi$  kein Extrempunkt von  $\mathcal{S}(A)$  ist.

Sei jetzt  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  irreduzibel und  $\lambda \in ]0, 1[$  und  $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}(A)$  mit  $\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2$ . Für die zugehörigen positiv definiten Kerne erhalten wir  $K = \lambda K^1 + (1 - \lambda)K^2$ . Wegen Lemma III.1.5 gilt  $\mathcal{H}_{\varphi_1} = \mathcal{H}_{K^1} \subseteq \mathcal{H}_K = \mathcal{H}_\varphi$ , wobei die kanonische Abbildung  $A: \mathcal{H}_{\varphi_1} \rightarrow \mathcal{H}_\varphi$  stetig ist und der Bedingung  $A^*(\pi_\varphi(s^*) \cdot \varphi) = A^* \cdot K_s = K_s^1 = \pi_{\varphi_1}(s^*) \cdot \varphi_1$  genügt. Insbesondere ist  $A^* \cdot \varphi = \varphi_1$ . Wegen

$$\pi_\varphi(s)(A \cdot f)(x) = (A \cdot f)(xs) = f(xs) = (\pi_{\varphi_1}(s) \cdot f)(x) = (A\pi_{\varphi_1}(s) \cdot f)(x)$$

ist  $A$  sogar ein Vertauschungsoperator für  $A$ . Gleiches gilt für  $A^*: \mathcal{H}_\varphi \rightarrow \mathcal{H}_{\varphi_1}$ . Damit ist  $AA^* \in \pi_\varphi(A)' = \mathbb{C}\mathbf{1}$  (Schursches Lemma, Satz II.3.24). Sei  $AA^* = \lambda\mathbf{1}$ . Dann ist  $\lambda\varphi = AA^* \cdot \varphi = A \cdot \varphi_1 = \varphi_1$  und wegen  $\varphi(\mathbf{1}) = \varphi_1(\mathbf{1}) = 1$  ist sogar  $\lambda = 1$ . Schließlich ist  $\varphi = \varphi_1$  und analog  $\varphi = \varphi_2$ . Wie haben damit gezeigt, daß  $\varphi$  ein Extrempunkt von  $\mathcal{S}(A)$  ist. ■

**Korollar III.2.23.** Sei  $A$  eine kommutative  $C^*$ -Algebra mit Eins. Dann stimmt die Menge der reinen Zustände mit der Menge  $\widehat{A}$  der Charaktere von  $A$  überein.

**Beweis.** Nach Theorem III.2.22 ist  $\varphi$  genau dann extremal, wenn die Darstellung  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  irreduzibel ist. Da  $A$  nach Voraussetzung abelsch ist, ist dies äquivalent zu  $\dim \mathcal{H}_\varphi = 1$  (Korollar II.3.25), d.h.  $\mathcal{H}_\varphi = \mathbb{C}\varphi$ .

Dies ist wiederum äquivalent dazu, daß ein Charakter  $\chi \in \widehat{A}$  so existiert, daß  $\pi_\varphi(s) \cdot \varphi = \chi(s)\varphi$  für alle  $s \in A$  gilt, d.h.  $\varphi(xs) = \chi(s)\varphi(x)$ . Das ist aber genau dann der Fall, wenn  $\varphi = \chi$  ist. ■

**Korollar III.2.24.** (Satz von Gelfand-Raikov) Ist  $A$  eine  $C^*$ -Algebra und  $0 \neq a \in A$ , so existiert eine irreduzible Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  von  $A$  mit  $\pi(a) \neq 0$ , d.h. die irreduziblen Darstellungen von  $A$  trennen die Punkte.

**Beweis.** Wir erinnern uns zuerst an den Satz von Krein-Milman (vgl. [Ne96]), der besagte, daß eine kompakte konvexe Menge die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extrempunkte ist. Wenden wir das auf  $\mathcal{S}(A)$  an, so sehen wir, daß  $\mathcal{S}(A)$  die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge der reinen Zustände ist. Sei jetzt  $s \in A \setminus \{0\}$ . Dann ist  $s^*s \neq 0$  und es existiert ein Zustand  $\varphi \in \mathcal{S}(A)$  mit  $\varphi(s^*s) > 0$ . Damit existiert aber auch ein reiner Zustand mit dieser Eigenschaft, da  $\mathcal{S}(A)(s^*s) \subseteq \mathbb{R}^+$ . Für die irreduzible Darstellung  $(\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi)$  gilt daher  $\varphi(s^*s) = \|\pi_\varphi(s) \cdot \varphi\|^2 > 0$  und somit  $\pi_\varphi(s) \neq 0$ . ■

### III.3. $\sigma$ -Algebren und Maße

Wir haben in Abschnitt III.2 gesehen, welche Bedeutung den positiven Funktionalen bzw. den Zuständen  $\mu$  auf einer  $C^*$ -Algebra zukommt. Ist  $A = C(X)$ , so nennt man Zustände auch Radonsche Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $X$ . In diesem Abschnitt werden wir sehen, woher diese Interpretation kommt. Der wesentliche Gewinn, den man aus der maßtheoretischen Deutung so eines Funktional  $\mu$  ziehen kann, ist der, daß dieser Zugang es erlaubt,  $\mu$  nicht nur auf stetige Funktionen, sondern auch auf die größere Klasse der meßbaren Funktionen anzuwenden. Wendet man  $\mu$  auf die charakteristische Funktion  $\chi_E$  einer meßbaren Teilmenge  $E \subseteq X$  an, so läßt sich  $\mu(E) := \mu(\chi_E)$  als das Maß der Menge  $E$  interpretieren.

Wir werden in diesem Abschnitt die Strategie verfolgen, daß wir zunächst einen abstrakten Zugang zur Maß- und Integrationstheorie beschreiben und die Verbindung zu den positiven Funktionalen auf  $C^*$ -Algebren mit dem Rieszschen Darstellungssatz herstellen.

Wir fangen damit an, einige grundlegende Definitionen und Resultate aus der Maßtheorie zusammenzustellen.

**Definition III.3.1.** Sei  $X$  eine Menge.

(a) Eine Menge  $\mathfrak{S}$  von Teilmengen von  $X$  heißt  $\sigma$ -Algebra, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $\emptyset \in \mathfrak{G}$ .
- (2)  $X \setminus A \in \mathfrak{G}$  für  $A \in \mathfrak{G}$  ( $\mathfrak{G}$  ist abgeschlossen gegenüber Komplementbildung).
- (3)  $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{G}$  für jede Folge  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{G}$  ( $\mathfrak{G}$  ist abgeschlossen gegenüber abzählbaren Vereinigungen).

Man beachte, daß  $\mathfrak{G}$  wegen (2) und (3) auch abgeschlossen gegenüber abzählbaren Durchschnitten ist. Ist  $\mathfrak{G}$  eine  $\sigma$ -Algebra von Teilmengen von  $X$ , so nennt man das Paar  $(X, \mathfrak{G})$  einen *Meßraum* (*Borel-Raum*) und die Elemente von  $\mathfrak{G}$  die *meßbaren Mengen*.

(b) Sind  $(X, \mathfrak{G})$  und  $(X', \mathfrak{G}')$  Meßräume, so nennt man eine Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  *meßbar*, wenn  $f^{-1}(\mathfrak{G}') \subseteq \mathfrak{G}$  gilt, d.h. Urbilder meßbarer Mengen sind meßbar. Man überlege sich, daß Kompositionen meßbarer Funktionen wieder meßbar sind (Übung). ■

**Lemma III.3.2.** *Sei  $X$  eine Menge.*

- (i) *Ist  $\mathcal{A}$  eine Menge von  $\sigma$ -Algebren auf  $X$ , so ist  $\bigcap \mathcal{A}$  wieder eine  $\sigma$ -Algebra.*
- (ii) *Für eine Teilmenge  $E \subseteq 2^X$  gibt es genau eine kleinste  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}(E)$ , die  $E$  enthält.*
- (iii) *Ist  $Y \subseteq X$  und  $\mathfrak{G} \subseteq 2^X$  eine  $\sigma$ -Algebra, so ist  $\mathfrak{G}^Y := \{E \cap Y : E \in \mathfrak{G}\} \subseteq 2^Y$  eine  $\sigma$ -Algebra.*
- (iv) *Ist  $\mathfrak{G} \subseteq 2^X$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mathcal{F} \subseteq Y^X$  eine Menge von Funktionen  $X \rightarrow Y$ , so ist  $\mathcal{F}(\mathfrak{G}) := \{E \subseteq Y : (\forall f \in \mathcal{F}) f^{-1}(E) \in \mathfrak{G}\}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ . Das ist die größte  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$  bzgl. der die Funktionen aus  $\mathcal{F}$  meßbar sind.*

**Beweis.** Übung. ■

Für  $E \subseteq 2^X$  nennt man die  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{G}(E)$  die von  $E$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.

**Beispiel III.3.3.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\mathcal{O}$  das System der offenen Teilmengen, so heißt  $\mathfrak{B}(X) := \mathfrak{G}(\mathcal{O})$  die  $\sigma$ -Algebra der *Borel-Mengen* auf  $X$ . Insbesondere ist damit klar, was es heißen soll, daß eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar ist.

Versehen wir die Räume  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  mit der natürlichen Topologie, so erhalten wir die  $\sigma$ -Algebren  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathfrak{B}(\mathbb{C}^n)$ . ■

**Lemma III.3.4.** *Sei  $(X, \mathfrak{G})$  ein Meßraum,  $Y$  ein separabler metrischer Raum und  $f: X \rightarrow Y$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  *$f$  ist meßbar.*
- (ii) *Für alle abgeschlossenen Mengen  $F \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(F)$  meßbar.*
- (iii) *Für alle offenen Mengen  $O \subseteq Y$  ist  $f^{-1}(O)$  meßbar.*
- (iv) *Für alle Kugeln  $B_r(y) := \{z \in Y : d(y, z) < r\}$ ,  $y \in Y$ ,  $r > 0$  ist  $f^{-1}(B_r(y))$  meßbar.*

*Ist  $f$  stetig, so ist  $f$  meßbar.*

**Beweis.** (i)  $\Rightarrow$  (ii): trivial.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii): Das folgt sofort aus  $f(Y \setminus E) = X \setminus f^{-1}(E)$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Das ist trivial, da die Kugeln  $B_r(y)$  alle offen sind.

(iv)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $O \subseteq Y$  eine offene Menge. Da  $Y$  separabel ist, können wir  $O$  als abzählbare Vereinigung von Kugeln  $B_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  darstellen (Übung). Dann ist  $f^{-1}(O) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(B_j)$  meßbar. Damit enthält die  $\sigma$ -Algebra  $f(\mathfrak{G})$  alle offenen Mengen, somit auch  $\mathfrak{B}(Y)$ . Folglich ist  $f$  meßbar.

Daß aus der Stetigkeit die Meßbarkeit folgt, ist eine direkte Konsequenz aus (iii). ■

**Lemma III.3.5.** *Sei  $(X, \mathfrak{G})$  ein Meßraum und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i)  *$f$  ist meßbar.*
- (ii) *Für alle offenen Intervalle  $]a, b[ \subseteq \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}(]a, b[)$  meßbar.*
- (iii) *Für alle abgeschlossenen Intervalle  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}([a, b])$  meßbar.*
- (iv) *Für alle Intervalle  $] - \infty, b] \subseteq \mathbb{R}$  ist  $f^{-1}(] - \infty, b])$  meßbar.*

**Beweis.** (i)  $\Leftrightarrow$  (ii): Folgt sofort aus Lemma III.3.4.

(i)  $\Rightarrow$  (iii): trivial.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv): Folgt aus  $] -\infty, b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, b]$ ,

(iv)  $\Rightarrow$  (ii): Folgt aus

$$]a, b[ = \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ] -\infty, b - \frac{1}{n} ] \right) \setminus ] -\infty, a]. \quad \blacksquare$$

**Lemma III.3.6.** Sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum und  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)  $f$  ist meßbar.

(ii)  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  sind meßbar.

**Beweis.** (i)  $\Rightarrow$  (ii): Da die Funktionen  $\operatorname{Im}, \operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und damit auch meßbar sind, sind auch  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  als Kompositionen meßbarer Funktionen meßbar.

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sind  $\operatorname{Re} f$  und  $\operatorname{Im} f$  meßbar, so sind die Urbilder von offenen Quadern  $]a, b[ + i \cdot ]c, d[$  meßbar. Da sich jede offene Menge als abzählbare Vereinigung von solchen darstellen läßt, erhalten wir mit Lemma III.3.4 die Meßbarkeit von  $f$ .  $\blacksquare$

Analog zu Lemma III.3.6 zeigt man, daß eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  genau dann meßbar ist, wenn alle ihre Komponentenfunktionen meßbar sind.

**Lemma III.3.7.** Sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum. Sind  $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar, so gilt dies auch für  $f + g, fg, |f|$ .

**Beweis.** Das folgt sofort aus der Stetigkeit der Abbildungen  $(x, y) \mapsto x + y, xy$  und der Betragsfunktion.  $\blacksquare$

Für viele Anwendungen ist es wichtig auch die Werte  $\pm\infty$  für Funktionen nach  $\mathbb{R}$  zuzulassen. Wir definieren daher eine Metrik auf  $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  durch

$$d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|.$$

Hierdurch wird  $\overline{\mathbb{R}}$  zu einem metrischen Raum, der zu  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  isometrisch ist. Insbesondere erhalten wir damit eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$  und der Begriff der meßbaren  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertigen Funktion bekommt einen Sinn. Zur Übung verallgemeinere man Lemma III.3.5 geeignet auf  $\overline{\mathbb{R}}$ -wertige Funktionen.

**Lemma III.3.8.** Sei  $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine Folge meßbarer Funktionen. Dann sind die Funktionen

$$g := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \quad \text{und} \quad h := \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} f_j$$

meßbar.

**Beweis.** Zunächst ist  $g^{-1}([x, \infty]) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n^{-1}([x, \infty])$  und damit  $g$  meßbar (vgl. Lemma III.3.5). Analog ist  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  meßbar und damit ist auch  $h$  meßbar.  $\blacksquare$

**Korollar III.3.9.** Punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen sind meßbar. Ist  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  meßbar, so gilt dies auch für die Funktionen

$$f_+ := \max(f, 0) \quad \text{und} \quad f_- := -\min(f, 0). \quad \blacksquare$$

### Stufenfunktionen

**Definition III.3.10.** Sei  $X$  eine Menge. Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Stufenfunktion*, wenn  $f(X)$  endlich ist. Wir schreiben  $\mathcal{S}(X)$  für den Vektorraum der Stufenfunktionen auf  $X$ .  $\blacksquare$

Für  $E \subseteq X$  definieren wir die *charakteristische Funktion* durch

$$\chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in E \\ 0 & \text{für } x \notin E \end{cases}.$$

Eine charakteristische Funktion  $\chi_E$  ist genau dann meßbar bzgl.  $\mathfrak{S}$ , wenn  $E \in \mathfrak{S}$  ist.

**Lemma III.3.11.**

- (i) Eine Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine Stufenfunktion, wenn endlich viele komplexe Zahlen  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  und Teilmengen  $A_j \subseteq X$  so existieren, daß  $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$  gilt.
- (ii) Ist  $\mathfrak{S} \subseteq 2^X$  eine  $\sigma$ -Algebra, so ist eine Stufenfunktion  $f$  genau dann meßbar, wenn man die  $A_j \in \mathfrak{S}$  wählen kann.

**Beweis.** (i) Da die Funktion  $f := \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$  nur endlich viele Werte annehmen kann (alle Summen der Zahlen  $\alpha_j$ ), ist jede solche Funktion eine Stufenfunktion.

Ist umgekehrt  $f$  eine Stufenfunktion und  $f(X) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$  so setzen wir  $A_j := f^{-1}(\alpha_j)$  und erhalten  $f = \sum_{j=1}^k \alpha_j \chi_{A_j}$ .

(ii) Das folgt daraus, daß die Meßbarkeit einer Stufenfunktion  $f$  äquivalent zur Meßbarkeit der Mengen  $f^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$  ist. ■

**Korollar III.3.12.** Ist  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum, so ist die Menge der komplexwertigen meßbaren Stufenfunktionen eine involutive Algebra bzgl. der Involution  $f^*(x) := \overline{f(x)}$ . ■

**Satz III.3.13.** (Approximationssatz) (a) Sei  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  eine meßbare Funktion. Dann existiert eine monoton steigende Folge von Stufenfunktionen  $s_n: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in X$ .

(b) Ist  $f$  beschränkt, so konvergiert  $s_n$  gleichmäßig gegen  $f$ .

**Beweis.** Zu  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$s_n(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{für } f(x) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[, k \leq n2^n - 1 \\ n & \text{für } f(x) \geq n. \end{cases}$$

Damit ist  $s_n$  eine meßbare Stufenfunktion und  $s_n \leq s_{n+1}$  mit  $s_n \rightarrow f$ .

Ist  $f$  beschränkt und  $n \geq \|f\|_\infty$ , so gilt sogar  $\|f - s_n\|_\infty \leq \frac{1}{2^n}$ . Hieraus folgt (b). ■

**Maße**

**Definition III.3.14.** Sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum.

(a) Ein *positives Maß* ist eine Funktion  $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow [0, \infty]$  mit  $\mu(\emptyset) = 0$ , die *abzählbar additiv* ist, d.h. für jede disjunkte Folge  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

(b) Ein *Maßraum* ist ein Tripel  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ , wobei  $\mu$  ein positives Maß ist.

(c) Ein *komplexes Maß* ist eine Funktion  $\mu: \mathfrak{S} \rightarrow \mathbb{C}$ , die abzählbar additiv ist. Insbesondere verlangen wir also, daß  $\mu(E) \neq \infty$  für alle  $E \in \mathfrak{S}$  gilt. ■

**Satz III.3.15.** Sei  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i)  $\mu$  ist monoton, d.h.  $\mu(E) \leq \mu(F)$  für  $E \subseteq F$  in  $\mathfrak{S}$ .
- (ii) Ist  $E_j \subseteq E_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j).$$

(iii) Ist  $E_j \supseteq E_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$  und  $\mu(E_1) < \infty$ , so gilt

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(E_j).$$

**Beweis.** (i) Wir schreiben  $F = E \cup (F \setminus E)$  und wenden  $\mu$  an.

(ii) Sei  $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Wir setzen  $E_0 := \emptyset$  und  $A_j := E_j \setminus E_{j-1}$  für  $j \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$  und aus der abzählbaren Additivität folgt

$$\mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Weiter ist

$$\mu(E_n) = \mu(A_n) + \mu(A_{n-1}) + \dots + \mu(A_1)$$

und folglich  $\mu(E_n) \rightarrow \mu(E)$ .

(iii) Sei  $C_j := E_1 \setminus E_j$ . Dann ist  $\mu(E_j) = \mu(E_1) - \mu(C_j)$ . Die Folge  $C_j$  wächst mit  $\bigcup_j C_j = E_1 \setminus E$  für  $E = \bigcap_j E_j$ . Aus (ii) folgt nun

$$\lim_j \mu(E_j) = \mu(E_1) - \lim_j \mu(C_j) = \mu(E_1) - \mu(E_1 \setminus E) = \mu(E). \quad \blacksquare$$

**Beispiel III.3.16.** (a) Setzen wir  $\mu(E) := |E|$  für  $E \subseteq X$  so definiert dies ein Maß auf  $\mathfrak{S} = 2^X$ , das wir das *Zählmaß* nennen.

(b) Sei  $x \in X$ . Dann wird durch  $\delta_x(E) := \chi_E(x)$  ein Maß auf  $2^X$  definiert, das wir *Punktmaß* in  $x$  nennen. Manchmal nennt man  $\delta_x$  auch *Dirac-Maß* in  $x$ .  $\blacksquare$

### Integration positiver Funktionen

In diesem Abschnitt sei  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum.

Sei  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  eine meßbare Stufenfunktion, die wir als  $f = \sum_i \alpha_j \chi_{A_j}$  mit  $A_j = f^{-1}(\alpha_j)$  schreiben. Dann sind die Mengen  $A_j$  alle meßbar und wir definieren

$$\mu(f) := \int_X f(x) d\mu(x) := \sum_j \alpha_j \mu(A_j),$$

wobei wir die Konventionen  $\alpha \cdot \infty = \infty$  für  $\alpha > 0$  und  $0 \cdot \infty = 0$  beachten. Für eine beliebige meßbare Funktion  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  definieren wir das *Lebesgue-Integral*

$$\mu(f) := \int_X f(x) d\mu(x) := \sup \int_X s(x) d\mu(x),$$

wobei das Supremum über alle meßbaren Stufenfunktionen  $s \leq f$  gebildet wird. Man beachte, daß man hier für eine Stufenfunktion wieder den alten Wert erhält, da  $s \leq f$  auch  $\mu(s) \leq \mu(f)$  zur Folge hat.

Für eine Teilmenge  $E \in \mathfrak{S}$  setzen wir

$$\int_E f(x) d\mu(x) := \int_X f(x) \chi_E(x) d\mu(x),$$

wobei  $\chi_E$  die charakteristische Funktion von  $E$  ist. Beachte hierbei, daß  $f \chi_E$  meßbar ist.

**Lemma III.3.17.** *Das Integral positiver Funktionen hat folgende Eigenschaften:*

- (i)  $\mu(f) \leq \mu(g)$  für  $f \leq g$ .
- (ii)  $\mu(cf) = c\mu(f)$  für  $c \in \mathbb{R}^+$ .
- (iii) Für  $\mu(E) = 0$  gilt  $\mu(f \chi_E) = 0$  für alle meßbaren Funktionen  $f \geq 0$ , sogar für  $f(x) = \infty$  auf  $E$ .
- (iv)  $\mu(s + t) = \mu(s) + \mu(t)$  für nichtnegative meßbare Stufenfunktionen  $s, t$ .

**Beweis.** (i)-(iii) sind klar.



(iv) Sei  $s = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}$  und  $t = \sum_k \beta_k \chi_{B_k}$ . Wir setzen  $C_{j,k} := A_j \cap B_k$ . Dann ist  $s + t = \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k) \chi_{C_{j,k}}$ . Wegen der Additivität von  $\mu$  ist dann

$$\begin{aligned} \mu(s+t) &= \sum_{j,k} \int_{C_{j,k}} (s+t)(x) d\mu(x) \\ &= \sum_{j,k} (\alpha_j + \beta_k) \mu(C_{j,k}) \\ &= \sum_{j,k} \alpha_j \mu(C_{j,k}) + \sum_{j,k} \beta_k \mu(C_{j,k}) \\ &= \sum_j \alpha_j \mu(A_j) + \sum_k \beta_k \mu(B_k) \\ &= \mu(s) + \mu(t). \end{aligned}$$

■

**Lemma III.3.18.** Sei  $s: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  eine meßbare Stufenfunktion auf  $X$ . Dann wird durch  $\nu(E) := \mu(\chi_E s)$  ein positives Maß auf  $X$  definiert.

**Beweis.** Sei  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge von meßbaren Mengen. Wir haben zu zeigen, daß  $\sum_j \nu(E_j) = \nu(E)$  für  $E := \bigcup_j E_j$  gilt.

Dazu schreiben wir  $s = \sum_k \alpha_k \chi_{A_k}$ . Dann ist

$$\nu(E) = \mu(\chi_E s) = \sum_k \alpha_k \mu(\chi_{A_k} \cap \chi_E) = \sum_k \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

(Lemma III.3.17) und die Behauptung folgt aus der evidenten Tatsache, daß  $E \mapsto \mu(A_k \cap E)$  für jedes  $k$  ein positives Maß definiert. In der Tat ist

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \sum_k \alpha_k \mu(A_k \cap E) = \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_k \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_k \alpha_k \mu(A_k \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j). \end{aligned}$$

■

**Theorem III.3.19.** (Lebesgues Satz von der monotonen Konvergenz) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge meßbarer Funktionen mit

- (1)  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$  für jedes  $x \in X$ .
- (2)  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  für alle  $x \in X$ .

Dann ist  $f$  meßbar und es gilt

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

**Beweis.** Wir haben schon gesehen, daß punktweise Grenzwerte meßbarer Funktionen meßbar sind (Korollar III.3.9). Also ist  $f$  meßbar.

Die Folge  $\mu(f_n)$  ist monoton wachsend. Sei  $\mu(f_n) \rightarrow \alpha \in [0, \infty]$ . Für jede Stufenfunktion  $s \leq f_n$  gilt  $s \leq f$  und somit  $\mu(f_n) \leq \mu(f)$ . Folglich gilt auch  $\alpha \leq \mu(f)$ .

Wir zeigen noch  $\mu(f) \leq \alpha$ . Hierzu dürfen wir  $\alpha < \infty$  annehmen. Sei dazu  $s$  eine Stufenfunktion mit  $s \leq f$ ,  $c < 1$  und  $E_n := \{x \in X: f_n(x) \geq cs(x)\}$ . Dann ist  $E_n$  aufsteigend mit  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , denn für  $x \in X$  ist  $s(x) \leq f(x) = \lim_n f_n(x)$ . Für  $s(x) > 0$  existiert also ein  $n$  mit  $f_n(x) > cs(x)$  und für  $s(x) = 0$  ist  $x$  sowieso in  $E_n$ .

Weiter ist

$$\mu(f_n) \geq \mu(f_n \chi_{E_n}) \geq \mu(cs \chi_{E_n}) = c\mu(s \chi_{E_n}).$$

Lassen wir  $n \rightarrow \infty$  gehen, so erhalten wir

$$\alpha \geq c \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(s \chi_{E_n}) = c\mu(s)$$

wegen Lemma III.3.18. Da  $c < 1$  beliebig war, folgt  $\mu(s) \leq \alpha$ , und somit  $\mu(f) \leq \alpha$ . ■

**Satz III.3.20.** Seien  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar und  $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ . Dann ist

$$\mu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(f_n).$$

**Beweis.** Wir betrachten zuerst die Summe zweier Funktionen. Seien dazu  $s_j$  bzw.  $t_j$  monoton wachsende Folgen von Stufenfunktionen mit  $s_j \rightarrow f_1$  und  $t_j \rightarrow f_2$  (Satz III.3.13). Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz gilt dann

$$\mu(s_j) \rightarrow \mu(f_1) \quad \text{und} \quad \mu(t_j) \rightarrow \mu(f_2).$$

Ebenso gilt natürlich  $s_j + t_j \rightarrow f_1 + f_2$  und  $\mu(s_j + t_j) \rightarrow \mu(f_1 + f_2)$ . Wegen  $\mu(s_j + t_j) = \mu(s_j) + \mu(t_j)$  (Lemma III.3.17(iv)) folgt also

$$\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2).$$

Sei nun  $g_n := \sum_{j=1}^n f_j$ . Dann ist  $g_n$  monoton wachsend mit  $g_n \rightarrow f$ . Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und der endlichen Additivität von  $\mu$  erhalten wir

$$\mu(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\sum_{j=1}^n f_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mu(f_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(f_j). \quad \blacksquare$$

**Satz III.3.21.** Sei  $(X, \mathfrak{G}, \mu)$  ein Maßraum und  $f: X \rightarrow [0, \infty]$  meßbar. Dann ist  $\nu(E) := \mu(f\chi_E)$  ein positives Maß auf  $\mathfrak{G}$ . Für jede meßbare Funktion  $g: X \rightarrow [0, \infty]$  gilt  $\nu(g) = \mu(fg)$ .

**Beweis.** Sei  $E_j$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen in  $\mathfrak{G}$  und  $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Dann ist

$$\chi_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n} f.$$

Aus Satz III.3.20 folgt also

$$\nu(E) = \mu(\chi_E f) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\chi_{E_n} f) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n).$$

D.h.  $\nu$  ist ein Maß.

Ist  $g = \chi_E$  mit  $E \in \mathfrak{G}$ , so zeigt die Definition von  $\nu$ , daß  $\nu(g) = \mu(gf)$  gilt. Mit der endlichen Additivität erhält man diese Beziehung nun für Stufenfunktionen und mit dem Satz der monotonen Konvergenz für beliebiges  $g$ .  $\blacksquare$

**Bemerkung III.3.22.** Sind  $\nu$  und  $\mu$  wie in Satz III.3.11, so schreibt man  $d\nu = f d\mu$  und sagt  $\nu$  ist absolutstetig bzgl.  $\mu$ . Kürzer schreibt man auch  $\nu \ll \mu$ . Die Relation  $\ll$  definiert eine Quasiordnung auf der Menge aller positiven Maße auf  $\mathfrak{G}$ , d.h. eine reflexive und transitive Relation. Die dazugehörigen Äquivalenzklassen, auch Maßklassen genannt, sind durch

$$[\mu] = \{\nu: \nu \ll \mu \ll \nu\}$$

gegeben.  $\blacksquare$

**Integration komplexwertiger Funktionen**

**Definition III.3.23.** Sei  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum. Wir definieren  $\mathcal{L}^1(\mu)$  als den Vektorraum aller meßbarer komplexwertiger Funktionen auf  $X$  für die

$$\|f\|_1 := \mu(|f|) < \infty$$

ist (Warum ist das ein Vektorraum?). Auf  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  ist durch  $\|\cdot\|_1$  eine *Halbnorm* gegeben, d.h. alle Normeigenschaften sind erfüllt, bis auf die, daß  $\|f\|_1 = 0$  schon  $f = 0$  impliziert. Die Funktionen in  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  nennt man *Lebesgue-integrierbar*.

Wir dehnen das Integral auf  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  aus, indem wir es für  $f = u + iv$  durch

$$\mu(f) := \mu(u_+) - \mu(u_-) + i(\mu(v_+) - \mu(v_-))$$

definieren (vgl. Korollar III.3.9). Man beachte hierbei, daß  $|u_{\pm}|, |v_{\pm}| \leq |f|$  die Endlichkeit der Integrale auf der rechten Seite zur Folge hat.

Da  $\|\cdot\|_1$  lediglich eine Seminorm auf  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  ist, definieren wir

$$L^1(X, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu)/N,$$

wobei  $N := \{f \in \mathcal{L}^1(X, \mu) : \|f\|_1 = 0\}$  (Warum ist das ein Untervektorraum?). Die Elemente von  $L^1(X, \mu)$  sind also Äquivalenzklassen von Funktionen. ■

**Satz III.3.24.** *Das Integral auf  $\mathcal{L}^1(X, \mu)$  ist ein komplex lineares Funktional.*

**Beweis.** Zuerst rechnet man  $\mu(if) = i\mu(f)$  nach. Dann reicht es aus, die  $\mathbb{R}$ -Linearität zu zeigen. Die Beziehung  $\mu(\lambda f) = \lambda\mu(f)$  erhält man für  $\lambda \geq 0$  sofort aus der Definition des Integrals für positive Funktionen und für  $\lambda < 0$  durch die Beobachtung  $\mu(-f) = -\mu(f)$ .

Am interessantesten ist die Additivität. Seien also  $f, g$  meßbar und reellwertig. Dann ist  $f + g = f_+ + g_+ - f_- - g_- = (f + g)_+ - (f + g)_-$  und somit

$$f_+ + g_+ + (f + g)_- = f_- + g_- + (f + g)_+.$$

Wenden wir  $\mu$  an, so ergibt sich

$$\mu(f_+) + \mu(g_+) + \mu((f + g)_-) = \mu(f_-) + \mu(g_-) + \mu((f + g)_+)$$

und damit sofort  $\mu(f + g) = \mu(f) + \mu(g)$ . ■

**Lemma III.3.25.** *Für  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  gilt  $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$ .*

**Beweis.** Sei  $|\mu(f)| = \zeta\mu(f)$  mit  $|\zeta| = 1$ . Dann ist

$$|\mu(f)| = \mu(\zeta f) = \text{Re}(\mu(\zeta f)) = \mu(\text{Re}(\zeta f)) \leq \mu(|f|),$$

da  $\text{Re}(\zeta f) \leq |\zeta f| = |f|$ . ■

**Lemma III.3.26.** (Lemma von Fatou) *Ist  $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$  eine Folge meßbarer Funktionen, so gilt*

$$\mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f_n).$$

**Beweis.** Sei  $g_k := \inf_{j \geq k} f_j$ . Dann gilt  $g_k \leq f_k$  und somit  $\mu(g_k) \leq \mu(f_k)$ . Die Folge  $g_k$  ist monoton wachsend mit  $g_k \rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz (Theorem III.3.19) folgt hiermit

$$\mu(f_k) \geq \mu(g_k) \rightarrow \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n)$$

und damit

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu(f_k) \geq \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n). \quad \blacksquare$$

Der folgende Satz ist, zusammen mit dem Satz von der monotonen Konvergenz, das wichtigste Kriterium für die Vertauschbarkeit von Integration und Grenzübergängen.

**Theorem III.3.27.** (Satz von der majorisierten Konvergenz) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexwertiger meßbarer Funktionen auf  $X$  und

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

für alle  $x \in X$ . Existiert eine Funktion  $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  mit  $|f_n| \leq g$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  und  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ . Insbesondere gilt also

$$\int_X f_n(x) d\mu(x) \rightarrow \int_X f(x) d\mu(x).$$

**Beweis.** Zunächst erhalten wir  $|f| \leq g$  und damit  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ . Weiter ist  $|f_n - f| \leq 2g$ . Wir wenden nun das Fatousche Lemma auf die Folge  $2g - |f_n - f|$  an und erhalten

$$\begin{aligned} \mu(2g) &= \mu(\liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|)) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(2g - |f_n - f|) \\ &= \mu(2g) + \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(-|f_n - f|) \\ &= \mu(2g) - \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(|f_n - f|) \leq \mu(2g). \end{aligned}$$

Da  $\mu(g) < \infty$  ist, folgt hieraus  $\mu(|f_n - f|) = \|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ . ■

### Der Hilbertraum $L^2(X, \mu)$

Sei  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum. Für eine meßbare Funktion auf  $X$  definieren wir

$$\|f\|_2 := \left( \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}$$

und setzen

$$\mathcal{L}^2(X, \mu) := \{f: \|f\|_2 < \infty\}.$$

Sind  $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ , so sind  $|f|^2, |g|^2 \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  und somit auch  $(|f| + |g|)^2$ , denn  $(|f| + |g|)^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$ . Damit ist aber auch  $|f||g| = \frac{1}{2}((|f| + |g|)^2 - |f|^2 - |g|^2) \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ . Für  $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$  definieren wir nun

$$\langle f, g \rangle := \mu(f\bar{g}).$$

Dieser Ausdruck macht Sinn, da  $f\bar{g} \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$  ist. Man prüft nun sofort nach, daß hierdurch eine positiv semidefinite hermitesche Form auf  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$  definiert wird, und daß  $\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle$  gilt.

Setzen wir  $N := \{f \in \mathcal{L}^2(X, \mu): \|f\|_2 = 0\}$ , so wird

$$L^2(X, \mu) := \mathcal{L}^2(X, \mu)/N$$

also zu einem Prä-Hilbertraum. Wir zeigen nun, daß dieser Raum schon vollständig ist.

**Theorem III.3.28.** (i)  $L^2(X, \mu)$  ist ein Hilbertraum.

(ii) Die Stufenfunktionen liegen dicht in  $L^2(X, \mu)$ .

**Beweis.** (i) Wir schreiben  $[f]$  für die Klasse der Funktion  $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$  in  $L^2(X, \mu)$ . Sei  $([f_n])_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(X, \mu)$ . Wir finden nun eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  mit

$$\|f_{n_j} - f_{n_{j+1}}\|_2 \leq \frac{1}{2^j}$$

für  $j \in \mathbb{N}$ .

Wir setzen  $g_k := \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$  und  $g := \sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$ . Dann ist  $\|g_k\|_2 \leq 1$  für alle  $k$ . Wenden wir nun Fatous Lemma (Lemma III.3.26) auf die Folge  $|g_k|^2$  an, so erhalten wir  $\mu(|g|^2) < \infty$ , d.h.  $g \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ . Insbesondere ist also  $\mu(N) = 0$  für  $N := \{x \in X : |g(x)| = \infty\}$ . Für  $x \in X \setminus N$  konvergiert die Reihe

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

also absolut. Wir definieren die meßbare Funktion  $f$  durch den Grenzwert dieser Reihe für  $x \in X \setminus N$  und setzen  $f(x) = 0$  für  $x \in N$ . Aus

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{j=1}^k (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

folgt nun  $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$  für  $x \notin N$ .

Wir zeigen  $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ . Zu  $\varepsilon > 0$  finden wir ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\|f_n - f_m\|_2 < \varepsilon$  für  $n, m > N$ . Für jedes  $m > N$  erhalten wir mit Fatous Lemma:

$$\int_X |f - f_m|^2 d\mu(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_{n_k} - f_m|^2 d\mu(x) \leq \varepsilon^2.$$

Damit ist  $f - f_m \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ , also auch  $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ . Weiter sehen wir, daß  $\|f - f_m\|_2 \leq \varepsilon$  gilt. Also gilt  $[f_m] \rightarrow [f]$  in  $L^2(X, \mu)$  und die Behauptung ist bewiesen.

(ii) Sei  $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ ,  $M_n := \{x \in X : 2^n \leq |f(x)| \leq 2^{n+1}\}$  für  $n \in \mathbb{Z}$ , sowie  $f_n := f \cdot \chi_{M_n}$ . Dann ist  $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$  eine orthogonale Zerlegung in  $\mathcal{L}^2(X, \mu)$  und wegen

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|f_n\|_2^2$$

(Satz von der monotonen Konvergenz) konvergiert die Reihe in  $L^2(X, \mu)$ . Weiter erhalten wir mit

$$2^n \mu(M_n) \leq \int_{M_n} |f(x)|^2 d\mu(x) \leq \|f\|_2^2$$

die Ungleichung  $\mu(M_n) \leq \|f\|_2^2 2^{-n} < \infty$ . Wir haben also nur noch zu zeigen, daß sich die beschränkten Funktionen  $f_n$  durch Stufenfunktionen approximieren lassen. Mit dem Approximationsatz (Satz III.3.13) finden wir auf der Menge  $M_n$  eine Folge  $h_m$  von Stufenfunktionen, die gleichmäßig gegen  $f_n$  konvergiert. Hierzu hat man  $f_n$  als Linearkombination von 4 nichtnegativen Funktionen zu schreiben. Da die gleichmäßige Konvergenz auf der Menge  $M_n$  endlichen Maßes die Konvergenz in  $L^2(X, \mu)$  impliziert, folgt hieraus die Behauptung. ■

**Korollar III.3.29.** Gilt  $[f_n] \rightarrow [f]$  in  $L^2(X, \mu)$ , so existiert eine meßbare Menge  $N \subseteq X$  mit  $\mu(N) = 0$  und eine Teilfolge  $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ , so daß

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x)$$

für alle  $x \in X \setminus N$  gilt.

**Beweis.** Das folgt sofort aus dem Beweis von Theorem III.3.28. ■

Zur Übung verallgemeinere man die Ergebnisse dieses Abschnitts auf die Räume  $L^p(X, \mu)$ , wobei  $1 \leq p < \infty$ . Man beachte, daß man hierbei die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung durch die Hölder-Ungleichung ersetzen muß.

### Der Rieszsche Darstellungssatz

Der folgende Satz stellt einen Bezug zu der Radon-Integrationstheorie auf kompakten bzw. lokalkompakten Räumen her.

**Definition III.3.30.** Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum. Ein *positives Radon-Maß auf  $X$*  ist ein positives Funktional  $\mu$  auf der involutiven Algebra  $C_c(X)$  der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Da die Funktionen der Gestalt  $ff^*$  genau die nichtnegativen Funktionen sind, bedeutet die Positivität genau

$$f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(f) \geq 0.$$

Ist speziell  $X$  kompakt, so ist  $C_c(X) = C(X)$  eine  $C^*$ -Algebra. Jedes positive Funktional  $\mu$  auf  $C(X)$  ist stetig (Proposition III.2.8), und es ist genau dann ein Zustand, wenn  $\mu(\mathbf{1}) = 1$  ist. Solchen Radon-Maße heißen *Radonsche Wahrscheinlichkeitsmaße*. ■

**Theorem III.3.31.** (Rieszscher Darstellungssatz für positive Maße) *Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum.*

(a) *Ist  $\mu$  ein positives Maß auf  $\mathcal{B}(X)$  mit  $\mu(K) < \infty$  für alle kompakten Mengen  $K$ , so ist das Integral*

$$\mu: C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \mu(f)$$

*ein positives Radon-Maß auf  $X$ .*

(b) *Zu jedem positiven Funktional  $\mu$  auf  $C_c(X)$  existiert ein Borel-Maß  $\nu$  auf  $X$ , das durch folgende Eigenschaften eindeutig bestimmt ist:*

- (i)  $\mu(f) = \int_X f(x) d\nu(x)$  für alle  $f \in C_c(X)$ .
- (ii)  $\nu(K) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge  $K \subseteq X$ .
- (iii) (Äußere Regularität) Für jede Borelmenge  $E \subseteq X$  ist

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U): E \subseteq U, U \text{ offen}\}.$$

(iv) *Ist  $E \subseteq X$  offen oder  $E$  eine Borelmenge mit  $\nu(E) < \infty$ , so gilt*

$$\nu(E) = \sup\{\nu(K): K \subseteq E, K \text{ kompakt}\}.$$

**Beweis.** (a) Zunächst ist jede stetige Funktion meßbar. Sei  $\text{supp}(f) \subseteq K$  und  $K$  kompakt. Dann ist  $|f| \leq \|f\|_\infty \chi_K$  und damit ist  $\mu(|f|) \leq \|f\|_\infty \mu(K) < \infty$ . Also ist  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ . Die Behauptung folgt nun sofort aus der Positivität des Maßes  $\mu$ .

(b) Der einfachere Teil ist die Eindeutigkeit. Wegen (iii) und (iv) ist  $\nu$  eindeutig durch seine Werte auf den kompakten Mengen bestimmt. Seien also  $\nu_1$  und  $\nu_2$  Maße, die (i)-(iv) erfüllen und  $K \subseteq X$  kompakt. Wir haben nur  $\nu_1(K) = \nu_2(K)$  zu zeigen. Sei dazu  $\varepsilon > 0$ . Wegen (ii) existiert eine offene Menge  $U \supseteq K$  mit  $\nu_2(U) \leq \nu_2(K) + \varepsilon$ . Mit dem Satz von Urysohn finden wir nun ein  $f \in C_c(X)$  mit  $f|_K = 1$  und  $\text{supp}(f) \subseteq U$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \nu_1(K) &= \int_X \chi_K(x) d\nu_1(x) \leq \int_X f(x) d\nu_1(x) = \mu(f) = \int_X f(x) d\nu_2(x) \\ &\leq \int_X \chi_U(x) d\nu_2(x) = \nu_2(U) \leq \nu_2(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt  $\nu_1(K) \leq \nu_2(K)$  und aus Symmetriegründen Gleichheit. Hiermit ist die Eindeutigkeit von  $\nu$  schon gezeigt. Ebenso haben wir schon gesehen, daß (ii) aus (i) folgt.

Wir kommen zur Existenz. Für eine offene Teilmenge  $U \subseteq X$  setzen wir

$$\nu(U) := \sup\{\mu(f): \text{supp}(f) \subseteq U\}$$

und beachten, daß  $\nu(U_1) \leq \nu(U_2)$  für  $U_1 \subseteq U_2$  dann trivialerweise gilt. Hieraus folgt insbesondere, daß

$$\nu(E) = \inf\{\nu(U) : E \subseteq U, U \text{ offen}\}$$

für alle offenen Teilmengen  $E \subseteq X$  gilt. Folglich können wir  $\nu(E)$  für eine beliebige Teilmenge  $E \subseteq X$  durch diesen Ausdruck definieren.

Für den etwas technischeren Rest des Beweises verweisen wir auf W. Rudin: "Real and complex analysis", S.40ff. ■

Die Eigenschaft (iv) aus dem Rieszschen Darstellungssatz drückt man auch so aus, daß man sagt, die offene Menge und die Mengen mit endlichem Maß sind von *innen regulär*. Mann nennt  $\nu$  ein *reguläres Maß*, wenn alle Borelmengen von außen und alle offenen Mengen von innen regulär sind. Ist dies, der Fall, so zeigt eine leichte Modifikation des folgenden Beweises, daß auch jede meßbare Menge endlichen Maßes von innen regulär ist. In „schönen“ Räumen folgt dies automatisch aus (b), wie der folgende Satz zeigt.

**Satz III.3.32.** *Ist  $X$  ein lokalkompakter Raum in dem jede offene Teilmenge eine Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist, so ist jedes positive Borel-Maß  $\nu$  auf  $X$  mit  $\nu(K) < \infty$  für jede kompakte Teilmenge regulär.*

**Beweis.** Zunächst wird durch  $\mu(f) := \int_X f(x) d\nu(x)$  ein positives Funktional auf  $C_c(X)$  definiert. Sei  $\mu$  das Borel-Maß aus dem Rieszschen Darstellungssatz (Theorem III.3.31). Wir zeigen  $\nu = \mu$ .

Sei dazu  $V \subseteq X$  offen. Nach Voraussetzung ist  $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$  mit kompakten Teilmengen  $K_j \subseteq V$ . Mit dem Satz von Urysohn finden wir  $f_j \in C_c(X)$  mit  $f_j|_{K_j} = 1$  und  $\text{supp}(f_j) \subseteq V$ . Sei  $g_n := \max(f_1, \dots, f_n)$ . Dann ist  $g_n \in C_c(X)$  und die Funktionenfolge  $g_n$  konvergiert monoton gegen  $\chi_V$ . Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt also

$$(3.1) \quad \nu(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\nu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x) = \int_X \chi_V(x) d\mu(x) = \mu(V).$$

Sei jetzt  $E \subseteq X$  eine Borelmenge und  $\varepsilon > 0$ . Wir zeigen die Existenz einer abgeschlossenen Menge  $F$  und einer offenen Menge  $U$  mit  $F \subseteq E \subseteq U$  und  $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$ .

Hierzu sei  $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$  mit kompakten Menge  $Q_j \subseteq X$ . Dann ist  $\mu(E \cap Q_j) < \infty$  für alle  $j$  und nach Theorem III.3.31 existiert eine offene Teilmenge  $U_j \supseteq E \cap Q_j$  mit

$$\mu(E \cap Q_j) \leq \mu(U_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Sei  $U := \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ . Dann ist

$$U \setminus E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} (U_j \setminus (Q_j \cap E))$$

und folglich  $\mu(U \setminus E) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Wenden dies auf das Komplement  $E^c$  von  $E$  an, so finden wir eine offene Menge  $W \subseteq E^c$  mit  $\mu(W \setminus E^c) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Für  $F := X \setminus W$  ist dann  $E \subseteq F$  mit  $E \setminus F = W \setminus E^c$ . Also ist  $\mu(U \setminus F) \leq \varepsilon$ . Insbesondere haben wir damit  $\mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon$ . Da  $U \setminus F$  offen ist, folgt  $\nu(U \setminus E) \leq \nu(U \setminus F) \leq \mu(U \setminus F) \leq \varepsilon$  aus (3.1), also auch  $\nu(U) \leq \nu(E) + \varepsilon$ . Damit ist

$$\nu(E) \leq \nu(U) = \mu(U) \leq \mu(E) + \varepsilon \quad \text{und} \quad \mu(E) \leq \mu(U) = \nu(U) \leq \nu(E) + \varepsilon,$$

somit  $|\mu(E) - \nu(E)| \leq \varepsilon$  und schließlich  $\nu(E) = \mu(E)$ , da  $\varepsilon$  beliebig war.

Es bleibt nur zu zeigen, daß  $\mu$  von innen regulär ist. Ist  $E \subseteq X$  eine Borelmenge und  $\varepsilon > 0$ , so finden wir wie oben eine abgeschlossene Teilmenge  $F \subseteq E$  mit  $\mu(E \setminus F) \leq \varepsilon$ . Aus  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$  mit den kompakten Menge  $F_n := \bigcup_{j=1}^n (F \cap Q_j)$  folgt nun  $\mu(F_n) \rightarrow \mu(F)$ . Also ist

$$\sup\{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ kompakt}\} \geq \mu(E) - \varepsilon.$$

Da  $\varepsilon$  beliebig war, folgt die Behauptung. ■

**Bemerkung III.3.33.** Wenden man obige Sätze auf das Riemann-Integral  $\mu$  auf dem Raum  $C_c(\mathbb{R}^n)$  der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf  $\mathbb{R}^n$  an, so liefert uns der Rieszsche Darstellungssatz das Lebesgue-Maß auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . ■

Der folgende Satz zeigt, daß man die Räume  $L^2(X, \mu)$  auch als Vervollständigung von  $C_c(X)/N$  bekommt, wobei  $N = \{f \in C_c(X) : \|f\|_2^2 = \mu(f\bar{f}) = 0\}$ . Da diese Definition ohne Maßtheorie auskommt, ist es oft zweckmäßiger, diese Räume so zu definieren.

**Satz III.3.34.** *Ist  $\mu$  ein Radon-Maß auf dem lokalkompakten Raum, so ist  $C_c(X)$  dicht in  $L^2(X, \mu)$  bzw.  $L^2(X, \mu)$ .*

**Beweis.** Da nach Theorem III.3.28 die Stufenfunktionen in  $L^2(X, \mu)$  dicht liegen, reicht es aus, die charakteristischen Funktionen  $\chi_E$  mit  $\mu(E) < \infty$  durch Funktionen in  $C_c(X)$  zu approximieren. Da jede Borelmenge endlichen Masses von innen regulär ist, dürfen wir sogar annehmen, daß  $E$  kompakt ist. Wegen der Regularität von außen finden wir eine offene Menge  $U \subseteq X$  mit  $\mu(U \setminus E) < \varepsilon$ . Weiter finden wir mit dem Satz von Urysohn eine stetige Funktion  $f \in C_c(X)$  mit  $f(X) \subseteq [0, 1]$ ,  $f|_E = 1$  und  $\text{supp}(f) \subseteq U$ . Damit ist

$$\|f - \chi_E\|^2 = \int_X |f(x) - \chi_E(x)|^2 d\mu(x) = \int_{U \setminus E} |f(x)|^2 d\mu(x) \subseteq \mu(U \setminus E) < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Lemma III.3.35.** *Ist  $\mu$  ein reguläres Borel-Maß auf dem lokalkompakten Raum  $X$  und  $f \in L^2(X, \mu)$ , so ist auch das durch  $\mu_f(E) := \int_E |f(x)|^2 d\mu(x)$  definierte Maß regulär.*

**Beweis.** Sei  $E \subseteq X$  eine Borelmenge. Wir haben zu zeigen, daß  $E$  von außen regulär ist. Hierzu dürfen wir o.B.d.A.  $\mu(E) < \infty$  annehmen. Sei  $\varepsilon > 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $F_n := \{x \in X : |f(x)| \geq n\}$ . Dann ist

$$n^2 \mu_f(F_n) \leq \int_{F_n} |f(x)|^2 d\mu(x) \leq \|f\|^2.$$

Ist nun  $V \supseteq E$  offen mit  $\mu(V) \leq \mu(E) + \delta$ , so erhalten wir

$$\mu_f(V \setminus E) = \mu_f((V \cap F_n) \setminus E) + \mu_f((V \setminus F_n) \setminus E) \leq \mu_f(F_n) + \mu_f((V \setminus F_n) \setminus E) \leq \frac{1}{n^2} \|f\|^2 + \delta n^2.$$

Wir wählen nun  $n$  so groß, daß  $\frac{1}{n^2} \|f\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\delta$  so, daß  $\delta n^2 < \frac{\varepsilon}{2}$  ist. Damit ist  $\mu_f(V \setminus E) \leq \varepsilon$ . Hiermit haben wir die äußere Regularität von  $E$  gezeigt.

Sei nun  $U \subseteq X$  offen. Ist  $\mu_f(U) < \infty$ , so argumentiert man für die innere Regularität wie oben. Fall nicht, so beachten wir, daß  $\mu_f(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_f(U_n)$  mit  $U_n = \{x \in U : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$  gilt. Nun ist  $\mu(U_n) < \infty$  und mit der inneren Regularität der Mengen  $U_n$  erhalten wir die innere Regularität von  $U$ . ■

### III.4. Spektralmaße

**Definition III.4.1.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Ist  $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $B(\mathcal{H})$  so sagen wir die Folge konvergiert stark gegen  $A$ , in Zeichen  $A := s - \lim_{j \rightarrow \infty} A_j$ , wenn

$$A.v = \lim_{j \rightarrow \infty} A_j.v$$

für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt. ■

**Definition III.4.2.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}} := \{P \in B(\mathcal{H}) : P = P^2 = P^*\}$$



die Menge aller symmetrischer Projektionen. Weiter sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein Maßraum. Eine Abbildung  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  heißt *Spektralmaß*, wenn

- (1)  $P(X) = \mathbf{1}$ .
- (2) Ist  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{S}$ , so ist

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j) := s - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(E_j). \quad \blacksquare$$

Ist  $(X, \mathfrak{S})$  ein Maßraum, so ist  $\mathfrak{S}$  eine involutive Halbgruppe bzgl.  $A \cdot B := A \cap B$  und  $A^* := A$ . In diesem Sinn ist ein Spektralmaß eine Darstellung der involutiven Halbgruppe  $(\mathfrak{S}, *)$ , die zusätzlich eine gewisse Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Das folgende Lemma beschreibt eine typische Situation in der Spektralmaße auftreten.

**Lemma III.4.3.** *Sei  $(X, \mathfrak{S}, \mu)$  ein Maßraum und  $\mathcal{H} := L^2(X, \mu)$ . Für  $E \in \mathfrak{S}$  definieren wir einen Operator auf  $\mathcal{H}$  durch  $P(E) \cdot [f] := [\chi_E f]$ . Dann wird durch  $P$  ein Spektralmaß definiert.*

**Beweis.** Wegen  $\|\chi_E f\|_2 \leq \|f\|_2$  ist  $\chi_E f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ , wenn dies für  $f$  der Fall ist. Damit ist  $P(E)$  wohldefiniert und ein beschränkter Operator. Für  $f, h \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$  haben wir

$$\langle P(E) \cdot [f], [h] \rangle = \langle \chi_E f, h \rangle = \mu(\chi_E f \bar{h}) = \langle f, \chi_E h \rangle = \langle [f], P(E) \cdot [h] \rangle$$

und wegen  $\chi_E^2 = \chi_E$  gilt  $P(E)^2 = P(E)$ . Also ist  $P(E) \in \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$ .

Es ist klar, daß  $P(X) = \mathbf{1}$  gilt. Sei nun  $E_j$  eine disjunkte Folge in  $X$ . Wir setzen  $F_k := \bigcup_{j=1}^k E_j$  und  $F := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ . Dann ist

$$\|P(F) \cdot f - P(F_k) \cdot f\|^2 = \|P(F \setminus F_k) \cdot f\|^2 = \mu(\chi_{F \setminus F_k} |f|^2) \rightarrow 0$$

nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz (Theorem III.3.27). Also gilt  $P(F) = s - \lim_{k \rightarrow \infty} P(F_k)$  und das zeigt die Behauptung.  $\blacksquare$

**Satz III.4.4.** *Sei  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß auf  $\mathcal{H}$ . Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i)  $P(\emptyset) = \mathbf{0}$ .
- (ii)  $P(E \cup F) + P(E \cap F) = P(E) + P(F)$ .
- (iii)  $P(E \cap F) = P(E)P(F) = P(F)P(E)$ .
- (iv) Ist  $E_j \subseteq E_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so gilt  $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = s - \lim_{j \rightarrow \infty} P(E_j)$ .
- (v) Ist  $E_j \supseteq E_{j+1}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ , so gilt  $P(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j) = s - \lim_{j \rightarrow \infty} P(E_j)$ .
- (vi) Für  $F \in \mathfrak{S}$  definiert  $Q(E) := P(E \cap F)$  ein Spektralmaß  $Q: \mathfrak{S}^F \rightarrow \mathcal{P}_{P(F) \cdot \mathcal{H}}$ .

**Beweis.** (i) Aus  $\mathbf{1} = P(X \cup \emptyset) = P(X) + P(\emptyset) = \mathbf{1} + P(\emptyset)$  folgt  $P(\emptyset) = \mathbf{0}$ .

(ii) Wir schreiben

$$F \cup E = (E \cap F) \cup (F \setminus E) \cup (E \setminus F)$$

und  $F = (F \cap E) \cup (F \setminus E)$ . Dann ist zunächst  $P(F) = P(E \cap F) + P(F \setminus E)$  und damit

$$\begin{aligned} P(E \cup F) &= P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F) + P(E) - P(E \cap F) \\ &= P(E) + P(F) - P(E \cap F). \end{aligned}$$

(iii) Wir nehmen zunächst an,  $E$  und  $F$  seien disjunkt. Dann ist

$$\begin{aligned} P(E) + P(F) &= P(E \cup F) = P(E \cup F)^2 \\ &= P(E)^2 + P(F)^2 + P(E)P(F) + P(F)P(E) \\ &= P(E) + P(F) + P(E)P(F) + P(F)P(E), \end{aligned}$$

also

$$(4.1) \quad P(E)P(F) = -P(F)P(E).$$

Multiplizieren wir (4.1) von links bzw. rechts mit  $P(E)$ , so erhalten wir

$$P(E)P(F) = -P(E)P(F)P(E) = -P(F)P(E).$$

Also ist  $P(E)P(F)$  symmetrisch, d.h.  $P(E)P(F) = P(F)^*P(E)^* = P(F)P(E)$ . Hieraus folgt  $P(E)P(F) = P(F)P(E) = \mathbf{0}$ .

Seien  $E$  und  $F$  beliebig in  $\mathfrak{S}$ . Aus  $P(F) = P(E \cap F) + P(F \setminus E)$  und obiger Rechnung erhalten durch Multiplikation mit  $P(E \cap F)$  von links bzw. rechts die Beziehung

$$(4.2) \quad P(E \cap F)P(F) = P(E \cap F) = P(F)P(E \cap F).$$

Multiplizieren wir (ii) mit  $P(E)$  und berücksichtigen (4.2), so folgt

$$P(E) + P(E \cap F) = P(E) + P(E)P(F),$$

und somit  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ . Aus Symmetriegründen gilt dann auch  $P(E \cap F) = P(F)P(E)$ .

(iv), (v) Das zeigt man analog zu Satz III.3.15(ii), (iii).

(vi) (Übung) ■

**Korollar III.4.5.** Ist  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine disjunkte Folge in  $\mathfrak{S}$ , so gilt

$$\|P(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|P(E_j).v\|^2.$$

**Beweis.** Wegen der Definition eines Spektralmaßes können wir die linke Seite als  $\|\sum_j P(E_j).v\|^2$  schreiben. Wegen Satz III.4.4(ii) sind die Summanden paarweise orthogonal. Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Definition III.4.6.** Sei  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß und  $v, w \in \mathcal{H}$ . Dann ist

$$\mu_{v,w}(E) := \langle P(E).v, w \rangle = \langle P(E).v, P(E).w \rangle$$

ein komplexes Maß auf  $\mathfrak{S}$  und für  $v = w$  erhalten wir ein positives Maß  $\mu_v := \mu_{v,v}$ . Für  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu_v)$  schreiben wir auch

$$\int_X f(x) d\|P(x).v\|^2 := \int_X f(x) d\mu_v(x).$$

Um einer ähnlichen Formel für das Maß  $\mu_{v,w}$  Sinn zu geben, beachten wie zunächst, daß wegen der Polarisierungsidentität

$$\mu_{v,w} = \frac{1}{4}(\mu_{v+w} - \mu_{v-w} + i\mu_{v+iw} - i\mu_{v-iw})$$

gilt, und weiter

$$\mu_{v+w} \leq \mu_{v+w} + \mu_{v-w} \leq 2(\mu_v + \mu_w) \quad \text{sowie} \quad \mu_{iv} = \mu_v.$$

Für  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu_v) \cap \mathcal{L}^1(X, \mu_w) = \mathcal{L}^1(X, \mu_v + \mu_w)$  existieren dann alle 4 Integrale von  $f$  in der Darstellung von  $\mu_{v,w}$  über die Polarisierungsidentität. Wir schreiben

$$\int_X f(x) d\langle P(x).v, w \rangle := \int_X f(x) d\mu_{v,w}(x) = \mu_{v,w}(f)$$

für das so erhaltene Integral. Man rechnet leicht nach, daß

$$(4.3) \quad \overline{\mu_{v,w}(f)} = \mu_{w,v}(\bar{f})$$

dann für alle  $f$  gilt. ■

**Lemma III.4.7.** Seien  $f, g \in \mathcal{L}^2(X, \mu_u + \mu_v)$ . Dann ist  $fg$  integrierbar bzgl.  $\mu_{u,v}$  und es gilt

$$(4.4) \quad \left| \int_X f(x)g(x) d\mu_{u,v}(x) \right|^2 \leq \mu_u(|f|^2)\mu_v(|g|^2).$$

Insbesondere ist

$$\left| \int_X f(x) d\mu_{u,v}(x) \right|^2 \leq \mu_u(|f|^2)\|v\|^2$$

und  $|\mu_{u,v}(E)|^2 \leq \mu_u(E) \cdot \mu_v(E)$  für  $E \in \mathfrak{G}$ .

**Beweis.** Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt sofort

$$(4.5) \quad |\mu_{u,v}(E)|^2 = |\langle P(E).u, P(E).v \rangle|^2 \leq \|P(E).u\|^2 \cdot \|P(E).v\|^2 = \mu_u(E) \cdot \mu_v(E).$$

Wir zeigen jetzt (4.4) für Stufenfunktionen. Seien also

$$f = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j} \quad \text{und} \quad g = \sum_k \beta_k \chi_{B_k},$$

wobei die  $A_j$  und  $B_k$  jeweils paarweise disjunkt sind. Wegen  $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$  erhalten wir mit (4.5) und der CS-Ungleichung für  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_X f(x)g(x) d\mu_{u,v}(x) \right|^2 &= \left| \sum_{j,k} \alpha_j \beta_k \mu_{u,v}(A_j \cap B_k) \right|^2 \\ &\leq \left| \sum_{j,k} |\alpha_j| \cdot |\beta_k| \cdot |\mu_{u,v}(A_j \cap B_k)| \right|^2 \\ &\leq \left| \sum_{j,k} |\alpha_j| \cdot |\beta_k| \mu_u(A_j \cap B_k)^{\frac{1}{2}} \mu_v(A_j \cap B_k)^{\frac{1}{2}} \right|^2 \\ &\leq \sum_{j,k} |\alpha_j|^2 \mu_u(A_j \cap B_k) \sum_{j,k} |\beta_k|^2 \mu_v(A_j \cap B_k) \\ &= \sum_j |\alpha_j|^2 \mu_u(A_j) \sum_k |\beta_k|^2 \mu_v(B_k) \\ &= \mu_u(|f|^2) \mu_v(|g|^2). \end{aligned}$$

Um den allgemeinen Fall zu erhalten, beachten wir zunächst, daß wegen

$$\mu_{u+v}, \mu_{u-v}, \mu_{u+iv}, \mu_{u-iv} \leq 2(\mu_u + \mu_v)$$

die Abbildung  $(f, g) \mapsto \mu_{u,v}(fg)$  eine stetige Bilinearform auf  $\mathcal{L}^2(X, \mu_u + \mu_v)$  definiert. Da die Stufenfunktionen in diesem Raum einen dichten Unterraum bilden, folgt die gewünschte Abschätzung wegen der Stetigkeit aus obiger Rechnung. ■

**Lemma III.4.8.** Sei  $P$  ein Spektralmaß.

(i) Für  $E, F \in \mathfrak{G}$  ist  $\mu_{P(E).v,w}(F) = \mu_{v,P(E).w}(F) = \mu_{v,w}(E \cap F)$ .

(ii) Für  $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu_v + \mu_w)$  gilt  $\mu_{P(E).v,w}(f) = \mu_{v,w}(\chi_E f)$ .

**Beweis.** (i) Wir rechnen mit Satz III.4.4(iii):

$$\begin{aligned} \mu_{P(E).v,w}(F) &= \langle P(F)P(E).v, w \rangle = \langle P(F \cap E).v, w \rangle \\ &= \langle P(E)P(F).v, w \rangle = \langle P(F).v, P(E).w \rangle. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung sofort.

(ii) Wegen (i) gilt die Behauptung für Stufenfunktionen. Der allgemeine Fall folgt aus der Stetigkeit beider Seiten und der Dichtheit der Stufenfunktionen in  $\mathcal{L}^1(X, \mu_u + \mu_v)$ . ■

Ein Spektralmaß ordnet meßbaren Mengen, also charakteristischen Funktionen, Operatoren auf einem Hilbertraum zu. Wir wollen diese Zuordnung nun möglichst weit auf meßbare Funktionen ausdehnen.

**Satz III.4.9.** Sei  $P$  ein Spektralmaß und  $f, h$  meßbare Funktionen auf  $X$ . Wir setzen

$$D(f) := \{v \in \mathcal{H} : f \in \mathcal{L}^2(X, \mu_v)\}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

(i)  $D(f)$  ist ein Untervektorraum von  $\mathcal{H}$  und es existiert eine lineare Abbildung

$$P(f): D(f) \rightarrow \mathcal{H} \quad \text{mit} \quad \langle P(f).v, w \rangle = \mu_{v,w}(f)$$

für alle  $w \in \mathcal{H}$ .

(ii)  $D(f) = D(\bar{f})$  und  $\langle P(f).v, w \rangle = \langle v, P(\bar{f}).w \rangle$  für  $v, w \in D(f)$ .

(iii) Für  $E \in \mathfrak{S}$  ist  $P(E)D(f) \subseteq D(f) \subseteq D(\chi_E f)$  und

$$P(f)P(E).v = P(E)P(f).v = P(\chi_E f).v$$

für alle  $v \in D(f)$ .

(iv)  $\langle P(f).v, P(h).w \rangle = \mu_{v,w}(f\bar{h})$  für  $v, w \in D(f) \cap D(h)$ . Insbesondere gilt

$$\|P(f).v\|^2 = \mu_v(|f|^2) = \int_X |f(x)|^2 d\mu_v(x).$$

(v) Für  $a \in \mathbb{C}$  ist  $D(f) \subseteq D(af)$  und  $P(af).v = aP(f).v$  für  $v \in D(f)$ .

(vi)  $D(f) \cap D(h) \subseteq D(f+h)$  und  $P(f+h).v = P(f).v + P(h).v$  für  $v \in D(f) \cap D(h)$ .

(vii)  $D(hf) \cap D(f) = P(f)^{-1}(D(h))$  und für  $v \in D(hf) \cap D(f)$  gilt

$$P(hf).v = P(h)P(f).v.$$

(viii) Ist  $f$  beschränkt, so ist  $D(f) = \mathcal{H}$ ,  $P(f) \in B(\mathcal{H})$  und  $P(f)^* = P(\bar{f})$ .

**Beweis.** (i) Seien  $v, w \in D(f)$ . Aus der Parallelogrammgleichung folgt  $\mu_{v+w} \leq 2\mu_v + 2\mu_w$  und hieraus  $v+w \in D(f)$ . Wegen  $\mu_{av} = |a|^2\mu_v$  für  $a \in \mathbb{C}$  ist damit klar, daß  $D(f)$  ein Unterraum von  $\mathcal{H}$  ist.

Sei nun  $v \in D(f)$ . Wir betrachten die Abbildung

$$D(f) \rightarrow \mathcal{H}, \quad w \mapsto T_v(w) := \mu_{v,w}(f).$$

Zunächst ist  $T_v(w)$  wegen Lemma III.4.7 wohldefiniert, da  $f = f \cdot 1$  und  $v, w \in D(1) = \mathcal{H}$  gilt. Weiter ist  $T_v$  komplex antilinear und mit Lemma III.4.7 sehen wir

$$|T_v(w)|^2 = |\mu_{v,w}(f)|^2 \leq \mu_v(|f|^2)\mu_w(1) = \mu_v(|f|^2)\|w\|^2.$$

Folglich ist  $T_v$  stetig und nach dem Fréchet-Rieszschen Darstellungssatz für Hilberträume existiert ein Element  $P(f).v \in \mathcal{H}$  mit  $T_v(w) = \langle P(f).v, w \rangle$  für alle  $w \in \mathcal{H}$ . Es ist klar, daß hierdurch eine lineare Abbildung  $P(f): D(f) \rightarrow \mathcal{H}$  definiert wird.

(ii) Die Beziehung  $D(f) = D(\bar{f})$  ist klar. Seien  $v, w \in D(f)$ . Dann ist

$$\langle P(f).v, w \rangle = \mu_{v,w}(f) = \overline{\mu_{w,v}(\bar{f})} = \overline{\langle P(\bar{f}).w, v \rangle} = \langle v, P(\bar{f}).w \rangle.$$

(iii) Seien  $v \in D(f)$  und  $E \in \mathfrak{S}$ . Nach Lemma III.4.8 haben wir

$$\mu_{P(E).v}(|f|^2) = \mu_v(\chi_E |f|^2) = \int_E |f(x)|^2 d\mu_v(x) \leq \int_X |f(x)|^2 d\mu_v(x) < \infty,$$

d.h.  $P(E).D(f) \subseteq D(f)$ . Die Beziehung  $D(f) \subseteq D(\chi_E f)$  ist trivial.

Weiter erhalten wir mit Lemma III.4.8 für  $w \in \mathcal{H}$  die Beziehung

$$\begin{aligned}\langle P(f)P(E).v, w \rangle &= \mu_{P(E).v, w}(f) = \mu_{v, w}(\chi_E f) = \langle P(\chi_E f).v, w \rangle \\ &= \mu_{v, P(E).w}(f) = \langle P(f).v, P(E).w \rangle = \langle P(E)P(f).v, w \rangle.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(iv) Sei zunächst  $v \in D(f)$ . Wir betrachten das komplexe Maß  $\mu_{P(f).v, w}$  und finden mit (iii) für  $E \in \mathfrak{S}$ ,  $w \in \mathcal{H}$ :

$$\mu_{P(f).v, w}(E) = \langle P(E)P(f).v, w \rangle = \langle P(f)P(E).v, w \rangle = \mu_{P(E).v, w}(f) = \mu_{v, w}(\chi_E f)$$

Hieraus folgt für  $w \in D(h) \cap D(f)$  weiter

$$\langle P(f).v, P(h).w \rangle = \mu_{v, P(h).w}(f) = \overline{\mu_{P(h).w, v}(\bar{f})} = \overline{\mu_{w, v}(h\bar{f})} = \mu_{v, w}(f\bar{h}).$$

(v) Das ist trivial.

(vi) Die Beziehung  $D(f) \cap D(h) \subseteq D(f+h)$  folgt daraus, daß  $\mathcal{L}^2(X, \mu_v)$  für  $v \in D(f) \cap D(h)$  ein Vektorraum ist. Wegen der Additivität der Maße  $\mu_{v, w}$  folgt weiter  $P(f+h).v = P(f).v + P(h).v$ .

(vii) Sei  $v \in D(f)$ . Dann ist wegen (iv) die Beziehung  $P(f).v \in D(h)$  äquivalent zu

$$\mu_{P(f).v}(|h|^2) = \mu_v(|f|^2|h|^2) < \infty.$$

Dies bedeutet gerade  $v \in D(fh)$ . Ist  $v \in D(fh) \cap D(f)$ , so finden wir

$$\langle P(fh).v, w \rangle = \mu_{v, w}(fh) = \mu_{P(f).v, w}(h) = \langle P(h)P(f).v, w \rangle.$$

(viii) Da die Maße  $\mu_v$  alle beschränkt sind, folgt  $D(f) = \mathcal{H}$  für jede beschränkte Funktion. In diesem Fall haben wir wegen (iv)

$$\|P(f).v\|^2 = \int_X |f(x)|^2 d\mu_v(x) \leq \|f\|_\infty \|v\|^2.$$

Aus (ii) folgt  $P(f)^* = P(\bar{f})$ . ■

**Definition III.4.10.** Sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum und  $\mathfrak{S}_0 \subseteq \mathfrak{S}$  ein Teilsystem, das abgeschlossen ist unter abzählbaren Vereinigungen und die Eigenschaft hat, daß mit einer Menge  $E$  auch deren Teilmengen, die in  $\mathfrak{S}$  enthalten sind, dazugehören. Wichtige Beispiele für solche Systeme  $\mathfrak{S}_0$  erhält man, wenn  $P$  ein Spektralmaß auf  $(X, \mathfrak{S})$  ist und  $\mathfrak{S}_0 = \{E \in \mathfrak{S} : P(E) = \mathbf{0}\}$ .

Wir betrachten die Algebra  $\mathcal{L}^\infty(X)$  der beschränkten meßbaren Funktionen auf  $X$  und definieren

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0 : (\exists N \in \mathfrak{S}_0)(\forall x \in X \setminus N)|f(x)| \leq C\}.$$

Man überzeugt sich nun davon, daß  $\|af\|_\infty = |a|\|f\|_\infty$  für  $a \in \mathbb{C}$  gilt, sowie  $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ . Daher ist  $E := \{f \in \mathcal{L}^\infty(X) : \|f\|_\infty = 0\}$  ein Untervektorraum und  $L^\infty(X, \mathfrak{S}_0) := \mathcal{L}^\infty(X)/E$  wird zu einem normierten Vektorraum. Nun überlegt man sich, daß in diesem Raum für jede Cauchy-Folge  $[f_n]$  eine Menge  $N \in \mathfrak{S}_0$  so existiert, daß die Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $X \setminus N$  gleichmäßig gegen eine meßbare Funktion  $f$  konvergiert. Ersetzt man die Funktionen dieser Folge durch 0 auf  $N$ , so sieht man, daß  $[f] \in L^\infty(X, \mathfrak{S}_0)$  gilt. Also ist  $L^\infty(X, \mathfrak{S}_0)$  ein Banachraum.

Dieser Raum trägt noch mehr Strukturen. Zum einen haben wir die Multiplikation  $[f] \cdot [g] := [fg]$  (das ist wohldefiniert) und die Involution  $[f]^* := [f^*]$  mit  $f^*(x) = \overline{f(x)}$ . Von nun an schreiben wir auch  $f$  statt  $[f]$ , wobei wir uns die Elemente von  $L^\infty(X, \mu)$  immer als Äquivalenzklassen von Funktionen vorstellen. Wegen  $\|f\|^2 = \|ff^*\|$  ist er sogar eine  $C^*$ -Algebra. ■

**Satz III.4.11.** Ist  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß auf  $X$  und  $\mathfrak{S}_0 := \{E \in \mathfrak{S}: P(E) = \mathbf{0}\}$ , so faktorisiert die Darstellung

$$\mathcal{L}^\infty(X) \rightarrow B(\mathcal{H}), \quad f \mapsto P(f)$$

zu einer isometrischen Einbettung

$$P: L^\infty(X, \mathfrak{S}_0) \rightarrow B(\mathcal{H})$$

von  $C^*$ -Algebren.

**Beweis.** Ist  $f$  eine beschränkte meßbare Funktion für die eine Nullmenge  $N$  mit  $\text{supp } f \subseteq N$  existiert, so ist  $P(f) = 0$ , da  $\mu_{v,w}(f) = 0$  für alle  $v, w \in \mathcal{H}$  gilt. Damit ist  $P$  auf  $L^\infty(X, \mathfrak{S}_0)$  wohldefiniert. Aus Satz III.4.9(v),(vi),(viii) sieht man nun, daß  $P$  ein Homomorphismus von Algebren ist und daß  $P(f^*) = P(f)^*$  gilt.

Aus dem Beweis von Satz III.4.9(viii) folgt sogar  $\|P(f)\| \leq \|f\|_\infty$ . Wir zeigen, daß sogar Gleichheit gilt. Wegen  $\|P(f)\|^2 = \|P(f)^*P(f)\| = \|P(f^*f)\|$  reicht es dazu aus anzunehmen, daß  $f$  eine nichtnegative Funktion ist.

Sei also  $C < \|f\|_\infty$  und  $E := \{x \in X: f(x) > C\}$ . Dann ist  $P(E) \neq \mathbf{0}$ . Für  $v \in P(E)\mathcal{H}$  haben wir

$$\|P(f).v\|^2 = \|P(f)P(E).v\|^2 = \|P(\chi_E f).v\|^2 = \int_E |f(x)|^2 d\mu_v(x) \geq C \int_E d\mu_v(x) = C\|v\|^2$$

(Satz III.4.9(iv)). Also ist  $\|P(f)\| \geq C$  und somit  $\|P(f)\| = \|f\|_\infty$ . ■

### Spektralsätze für beschränkte normale Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir einen Spektralsatz für beschränkte normale Operatoren ableiten. Da jeder solche Operator  $a \in B(\mathcal{H})$  zusammen mit  $\mathbf{1}$  eine kommutative  $C^*$ -Unteralgebra  $C^*(a) \subseteq B(\mathcal{H})$  erzeugt, betrachten wir zunächst den allgemeinen Fall von Darstellungen von kommutativen Banach- $*$ -Algebren.

**Lemma III.4.12.** Ist  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem Hilbertraum, die schwach gegen  $v \in \mathcal{H}$  konvergiert und gilt weiter  $\|v_n\| \rightarrow \|v\|$ , so gilt  $v_n \rightarrow v$ .

**Beweis.** Es ist

$$\|v - v_n\|^2 = \|v\|^2 + \|v_n\|^2 - 2\text{Re}\langle v, v_n \rangle \rightarrow 2\|v\|^2 - 2\text{Re}\langle v, v \rangle = 0. \quad \blacksquare$$

**Theorem III.4.13.** (Spektralsatz für kommutative Banach- $*$ -Algebren) Sei  $A$  eine kommutative Banach- $*$ -Algebra mit Eins. Dann gilt:

- (i) Ist  $P: \mathfrak{B}(\hat{A}) \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß auf  $\hat{A}$ , so wird durch  $a \mapsto P(\hat{a})$  eine Darstellung von  $A$  auf  $\mathcal{H}$  mit  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  definiert.
- (ii) Ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine Darstellung von  $A$  mit  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ , so existiert ein eindeutiges Spektralmaß  $P$  auf  $\hat{A}$  mit  $\pi(a) = P(\hat{a})$  für alle  $a \in A$ , so daß alle  $\mu_v, v \in \mathcal{H}$  regulär sind.

**Beweis.** (i) Da  $A \rightarrow C(\hat{A}), a \mapsto \hat{a}$  ein Homomorphismus von Banach- $*$ -Algebren mit Eins ist, und ebensolches für die Abbildung  $\mathcal{L}^\infty(\hat{A}) \rightarrow B(\mathcal{H}), f \mapsto P(f)$  gilt (Satz III.4.11), ist die Komposition  $\pi$  dieser beiden Homomorphismen eine Darstellung der Banach- $*$ -Algebra  $A$  mit  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ .

(ii) Wir zeigen zuerst, daß wir  $A = C(\hat{A})$  annehmen dürfen. Sei dazu  $B := \overline{\pi(A)}$ . Dann ist  $B$  eine kommutative  $C^*$ -Algebra und  $\pi: A \rightarrow B$  ein Homomorphismus von Banach- $*$ -Algebren. Für  $\chi \in \hat{B}$  ist nun  $\pi^*(\chi) := \chi \circ \pi \in \hat{A}$ , somit ist die Abbildung  $\pi^*: \hat{B} \rightarrow \hat{A}$  stetig, da für alle  $a \in A$  die Funktion  $\chi \mapsto \pi^*(\chi)(a) = \chi(\pi(a))$  stetig ist. Für  $f \in C(\hat{A})$  wird also durch  $\tilde{\pi}(f)(\chi) := f(\pi^*(\chi))$  ein Homomorphismus  $C(\hat{A}) \rightarrow C(\hat{B}) \cong B$  mit

$$\tilde{\pi}(\hat{a})(\chi) = \hat{a}(\pi^*(\chi)) = \pi^*(\chi)(a) = \chi(\pi(a))$$

für  $a \in A$ , d.h.  $\tilde{\pi}(\hat{a}) = \pi(a)$  definiert. Wegen  $\hat{A} = C(\hat{A})^\wedge$  dürfen wir somit  $A = C(X)$  für einen kompakten Raum  $X$  annehmen.

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien  $P$  und  $\tilde{P}$  Spektralmaße mit den gewünschten Eigenschaften. Für  $v \in \mathcal{H}$  erhalten wir zwei positive Maße  $\mu_v$  und  $\tilde{\mu}_v$  auf  $\hat{A}$  mit

$$\langle \pi(a).v, v \rangle = \langle P(\hat{a}).v, v \rangle = \int_{\hat{A}} \hat{a}(\chi) d\mu_v(\chi) = \int_{\hat{A}} \hat{a}(\chi) d\tilde{\mu}_v(\chi)$$

für alle  $a \in A$ . Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt nun  $\mu_v = \tilde{\mu}_v$  aus der geforderten Regularität (Theorem III.3.30). Da  $P(E)$  eindeutig durch die Zahlen  $\mu_v(E) = \langle P(E).v, v \rangle$  bestimmt ist, folgt hieraus die Eindeutigkeit von  $P$ .

Jetzt zeigen wir die Existenz. Hierzu zerlegen wir die Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  zunächst mittels Satz I.3.10 in eine direkte Summe zyklischer Darstellungen  $(\pi_j, \mathcal{H}_j)$ ,  $j \in J$ . Man beachte hierzu, daß  $(\pi, \mathcal{H})$  wegen  $\pi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$  nicht entartet ist. Haben wir für jedes  $j \in J$  ein Spektralmaß mit der gewünschten Eigenschaft gefunden, so definieren wir  $P(E).v := (P_j(E).v_j)$  für  $v = (v_j)_{j \in J}$  in  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $P(E)^* = P(E) = P(E)^2$ , so daß  $P(E)$  tatsächlich eine orthogonale Projektion ist (vgl. Satz I.3.8). Weiter gilt  $P(X) = \mathbf{1}$  und für eine disjunkte Folge  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Borelmengen in  $X$  beachten wir zunächst, daß  $P(E_n)P(E_m) = 0$  für  $n \neq m$  gilt. Damit ist die Folge  $(P(E_n).v)_{n \in \mathbb{N}}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  orthogonal. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|P(E).v\|^2 &= \sum_{j \in J} \|P_j(E).v_j\|^2 = \sum_{j \in J} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|P_j(E_n).v_j\|^2 \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in J} \|P_j(E_n).v_j\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|P(E_n).v\|^2, \end{aligned}$$

d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{m=1}^n P(E_m).v \right\|^2 = \|P(E).v\|^2$$

und

$$\begin{aligned} \langle P(E).v, w \rangle &= \sum_{j \in J} \langle P_j(E).v_j, w_j \rangle = \sum_{j \in J} \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_j(E_n).v_j, w_j \rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in J} \langle P_j(E_n).v_j, w_j \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle P(E_n).v, w \rangle, \end{aligned}$$

aus Gründen der absoluten Summierbarkeit. Mit Lemma III.4.12 folgt nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n P(E_m).v = P(E).v,$$

d.h.  $P$  ist ein Spektralmaß.

Wir dürfen somit annehmen, daß die Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  von  $A = C(X)$  zyklisch ist. Es existiert also ein  $v \in \mathcal{H}$  für das der Unterraum  $\pi(A).v$  dicht in  $\mathcal{H}$  ist. Nun ist

$$\nu_v: C(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f \mapsto \langle \pi(f).v, v \rangle$$

ein positives Funktional und läßt sich mit dem Rieszschen Darstellungssatz also durch ein Borel-Maß  $\mu_v$  auf  $X$  in dem Sinne darstellen, daß

$$\nu_v(f) = \int_X f(\chi) d\mu_v(\chi)$$

für alle  $f \in C(X)$  gilt und  $\mu_v$  regulär ist, denn wegen  $\|v\|^2 = \nu_v(\mathbf{1}) = \mu_v(X)$  ist  $\mu_v$  ein endliches Maß.

Als nächstes zeigen wir  $\mathcal{H} \cong L^2(X, \mu_v)$ . Hierzu betrachten wir die Abbildung  $\tilde{\Phi}: C(X) \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $a \mapsto \pi(a).v$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\Phi}(a), \tilde{\Phi}(b) \rangle &= \langle \pi(a).v, \pi(b).v \rangle = \langle \pi(ab^*).v, v \rangle \\ &= \nu_v(ab^*) = \int_X a(x)\overline{b(x)} d\mu_v(x) = \langle [a], [b] \rangle_{L^2(X, \mu_v)}. \end{aligned}$$

Die Zuordnung  $[a] \rightarrow \pi(a).v$  ist folglich wohldefiniert und liefert eine isometrische Abbildung

$$\Phi: [C(X)] := \{[a]: a \in C(X)\} \rightarrow \pi(A).v \subseteq \mathcal{H}.$$

Da  $[C(X)]$  nach Satz III.3.34 in  $L^2(X, \mu_v)$  dicht ist, setzt sich  $\Phi$  zu einer Isometrie

$$\Phi: L^2(X, \mu_v) \rightarrow \mathcal{H}$$

fort, die wegen der Dichtheit von  $\pi(A).v$  surjektiv ist.

Sei  $\rho: \mathcal{L}^\infty(X) \rightarrow B(L^2(X, \mu_v))$  die Darstellung, die wir gemäß Lemma III.4.3 und Satz III.4.11 erhalten. Für  $a, b \in A$  haben wir dann

$$\pi(a)\Phi([b]) = \pi(a)\pi(b).v = \pi(ab).v = \Phi([ab]) = \Phi \circ \rho(a).[b].$$

Wegen der Dichtheit von  $[C(X)] \subseteq L^2(X, \mu_v)$  folgt hieraus, daß  $\Phi$  ein Vertauschungsoperator für die Darstellungen  $\rho$  und  $\pi$  von  $A$  ist. Wir dürfen daher unbeschadet  $\mathcal{H} = L^2(X, \mu_v)$  annehmen.

Sei  $P(E).[f] = [\chi_E f]$  das Spektralmaß auf  $L^2(X, \mu_v)$  aus Lemma III.4.3. Für  $[f] \in L^2(X, \mu_v)$  und  $a \in A$  haben wir dann  $P(a) = \rho(a)$ . Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß die Maße

$$E \mapsto \mu_{[f]}(E) = \langle P(E).[f], [f] \rangle = \langle [\chi_E f], [f] \rangle = \int_E |f(x)|^2 d\mu_v(x)$$

regulär sind. Dies folgt aber aus Lemma III.3.35. ■

Wir haben in dem Beweis von Theorem III.4.13 sogar viel mehr gezeigt:

**Korollar III.4.14.** *Eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  einer kommutativen Banach- $*$ -Algebra  $A$  mit Eins ist genau dann zyklisch, wenn ein Radon-Maß  $\mu$  auf  $\hat{A}$  existiert, so daß  $(\pi, \mathcal{H})$  äquivalent zu der Darstellung  $(\pi_\mu, L^2(X, \mu))$  mit  $\pi(a).[f] = [\hat{a} \cdot f]$  ist.*

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß die Darstellung  $\pi_\mu$  zyklisch ist. Daß so in der Tat eine Darstellung definiert wird, folgt aus dem Beweis von Theorem III.4.13. Da  $\mu$  wegen der Kompaktheit von  $\hat{A}$  ein endliches Maß ist, ist  $1 \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$ . Weiter ist  $\pi_\mu(A).[1] = \{[\hat{a}]: a \in A\}$ . Nach dem Satz von Stone-Weierstraß ist  $\mathcal{G}(A) \subseteq C(\hat{A})$  dicht, folglich wegen Satz III.3.34  $\pi_\mu(A).[1]$  dicht in  $L^2(\hat{A}, \mu)$ , d.h.  $\pi_\mu$  ist eine zyklische Darstellung.

Ist umgekehrt  $(\pi, \mathcal{H})$  eine zyklische Darstellung von  $A$ , so haben wir im Beweis von Theorem III.4.13 gezeigt, daß sie zu einer Darstellung  $\pi_\mu$  äquivalent ist. ■

**Lemma III.4.15.** *Sei  $P: \mathfrak{S} \rightarrow P_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß und  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{L}^\infty(X)$  mit  $\sup\{\|f_n\|_\infty: n \in \mathbb{N}\} < \infty$  und  $f_n \rightarrow f$  punktweise. Dann gilt  $P(f_n).v \rightarrow P(f).v$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ .*

**Beweis.** Aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\|P(f_n).v\|^2 = \langle P(|f_n|^2).v, v \rangle = \mu_v(|f_n|^2) \rightarrow \mu_v(|f|^2) = \|P(f).v\|^2$$

und

$$\langle P(f_n).v, w \rangle = \mu_{v,w}(f_n) \rightarrow \mu_{v,w}(f) = \langle P(f).v, w \rangle.$$

Die Behauptung folgt hiermit aus Lemma III.4.12. ■



**Theorem III.4.16.** (Spektralsatz für normale Operatoren) Sei  $T \in B(\mathcal{H})$  ein normaler Operator. Dann existiert ein eindeutiges Spektralmaß  $P: \mathfrak{B}(\sigma(T)) \rightarrow P_{\mathcal{H}}$  mit  $T = P(\text{id})$ , so daß alle  $\mu_v, v \in \mathcal{H}$  regulär sind. Weiter gilt:

- (i)  $T$  ist genau dann hermitesch, wenn  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ .
- (ii)  $T$  ist genau dann unitär, wenn  $\sigma(T) \subseteq \mathbb{S}^1$ .
- (iii) Für  $\lambda \in \sigma(T)$  ist  $P(\{\lambda\})$  die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$ . Insbesondere ist  $P(\{\lambda\}) \neq 0$  äquivalent dazu, daß  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  ist.

**Beweis.** Sei  $A := C^*(T)$  die von  $\mathbf{1}$  und  $T$  erzeugte kommutative  $C^*$ -Unteralgebra. Dann ist  $A \cong C(\sigma(A))$  (Satz II.3.14) und wir können Theorem III.4.13 anwenden.

(i), (ii) Das folgt sofort aus der Übertragung der entsprechenden Eigenschaften auf die Algebra  $C^*(a) \cong C(\sigma(T))$ .

(iii) Es folgt aus der Definition eines Spektralmaßes, daß  $Q := P(\{\lambda\})$  eine orthogonale Projektion ist. Für  $v = Q.w$  ist

$$T.v = P(\text{id})P(\{\lambda\}).w = P(\text{id} \cdot \chi_{\{\lambda\}}).w = P(\lambda \chi_{\{\lambda\}}).w = \lambda P(\chi_{\{\lambda\}}).w = \lambda Q.w = \lambda v.$$

Also besteht das Bild von  $Q$  aus Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$ .

Ist umgekehrt  $T.v = \lambda.v$ , so gilt  $P(T).v = f(T).v = f(\lambda).v$  für alle  $f \in C(\sigma(T))$ . Sei  $f_n: \sigma(T) \rightarrow [0, 1]$  eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen  $\chi_{\{\lambda\}}$  konvergiert, z.B.

$$f_n(z) = \max(1 - n|z - \lambda|, 0).$$

Dann folgt

$$P(\{\lambda\}).v = \lim_{n \rightarrow \infty} P(f_n).v = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\lambda).v = v$$

aus Lemma III.4.15. ■

**Beispiel III.4.17.** Ist  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beschränkte Folge in  $\mathbb{C}$ ,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit der ONB  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und

$$T.v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle v, e_n \rangle e_n,$$

so ist

$$\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}.$$

Sei  $P_{e_n} \in P_{\mathcal{H}}$  die orthogonale Projektion auf den Unterraum  $\mathbb{C}e_n$ . Aus Korollar III.4.15(iii) folgt, daß das Spektralmaß auf  $\sigma(T)$  gegeben ist durch

$$P(E) = \sum_{\lambda_n \in E} P_{e_n}.$$

Insbesondere ist  $P(\{\lambda\}) = \sum_{\lambda_n = \lambda} P_{e_n}$ . ■

### Darstellungen der Gruppe $\mathbb{R}$

**Definition III.4.18.** (a) Eine involutive Halbgruppe  $S$  heißt *topologische involutive Halbgruppe*, wenn sie eine Topologie trägt, so daß die Multiplikation

$$S \times S \rightarrow S, \quad (s, t) \mapsto st \quad \text{und} \quad S \rightarrow S, \quad s \mapsto s^*$$

stetige Abbildungen sind.

(b) Ist  $S = G$  eine Gruppe mit  $g^* = g^{-1}$ , so nennt man  $G$  eine *topologische Gruppe*, d.h. in einer topologischen Gruppe sind Multiplikation und Inversion stetige Abbildungen.

(c) Eine Darstellung  $(\pi, \mathcal{H})$  einer topologischen involutiven Halbgruppe  $S$  heißt *stetig*, wenn alle Funktionen

$$S \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \mapsto \langle \pi(s).v, v \rangle$$

stetig sind. ■

Der folgende Satz läßt schon ahnen, warum Spektralmaße von großer Bedeutung für die Darstellungen der Gruppe  $\mathbb{R}$  sind.

**Theorem III.4.19.** Sei  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß und  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine meßbare Funktion. Für  $t \in \mathbb{R}$  sei  $e_t(x) := e^{tif(x)}$ . Dann wird durch

$$\pi(t) := P(e_t)$$

eine stetige unitäre Darstellung  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  definiert.

**Beweis.** Aus Satz III.4.9(viii) folgt, daß  $\pi(t)$  ein beschränkter Operator ist, und daß

$$\pi(t)\pi(s) = P(e_t)P(e_s) = P(e_te_s) = P(e_{t+s}) = \pi(t+s)$$

gilt. Also ist  $\pi$  ein Gruppenhomomorphismus und wegen

$$\pi(t)\pi(t)^* = P(e_t\bar{e}_t) = P(e_te_{-t}) = P(1) = \mathbf{1}$$

ist  $\pi$  eine unitäre Darstellung. Für  $v \in \mathcal{H}$  ist

$$\langle \pi(t).v, v \rangle = \langle P(e_t).v, v \rangle = \mu_v(e_t)$$

wegen dem Satz über die majorisierte Konvergenz stetig. Damit ist  $(\pi, \mathcal{H})$  eine stetige Darstellung. ■

**Bemerkung III.4.20.** Ist  $\pi$  wie oben, so folgt aus Satz III.4.11, daß die Operatoren  $P(E)$ ,  $E \in \mathfrak{S}$  mit  $\pi(\mathbb{R})$  kommutieren. ■

**Beispiel III.4.21.** Man beachte, daß Theorem III.4.13 insbesondere im Fall  $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  und  $f(x) = x$  anwendbar ist.

Sei zum Beispiel  $\mu$  ein Borelmaß auf  $\mathbb{R}$  und  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, \mu)$  wie in Lemma III.4.3. Dann erhalten wir eine unitäre Darstellung auf  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$  durch

$$\pi(t)[f] = [e_tf],$$

wobei  $e_t(x) = e^{itx}$  ist. ■

**Bemerkung III.4.22.** (a) In Mackeys Büchern (vgl. [Ma76, p.93]) taucht der Begriff des *projektionswertigen Maßes* auf. Ist  $(X, \mathfrak{S})$  ein Meßraum (Borel-Raum) und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum, so heißt eine Zuordnung  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein *projektionswertiges Maß*, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $\mathcal{H}$  ist separabel.
- (2)  $P(\emptyset) = \mathbf{0}$ ,  $P(X) = \mathbf{1}$ .
- (3)  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ .
- (4)  $P(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n P(E_j)$  für eine disjunkte Familie  $(E_j)_{j \in \mathbb{N}}$  von Mengen in  $\mathfrak{S}$ .

Es ist klar, daß jedes projektionswertige Maß ein Spektralmaß ist, und mit Satz III.4.4 sehen wir auch, daß jedes Spektralmaß auf einem separablen Hilbertraum ein projektionswertiges Maß ist.

(b) Bei Rudin gibt es den Begriff der *Zerlegung der Eins* (Resolution of the identity). Hier werden folgende Eigenschaften verlangt:

- (1)  $P(\emptyset) = \mathbf{0}$ ,  $P(X) = \mathbf{1}$ .
- (2)  $P(E \cap F) = P(E)P(F)$ .
- (3) Falls  $E \cap F = \emptyset$ , dann ist  $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ .
- (4) Die Zuordnungen  $E \mapsto \langle P(E).x, y \rangle$  definieren komplexe Maße auf  $X$ .

Wir haben schon gesehen, daß all diese Eigenschaften für Spektralmaße erfüllt sind. Andererseits wird in [Ru73, Prop. 12.18] gezeigt, daß umgekehrt jede Zerlegung der Eins auch ein Spektralmaß definiert. ■

### III.5. Unbeschränkte Operatoren

Um die Konsequenzen des Spektralsatzes für die Darstellungstheorie von  $\mathbb{R}$  besser zu verstehen, müssen wir uns etwas mit den Begriffsbildungen für unbeschränkte Operatoren auseinandersetzen.

Wir stellen zuerst die wichtigsten Definitionen zusammen.

**Definition III.5.1.** (a) Seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  Hilberträume. Ein *Operator*  $T$  von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  ist eine lineare Abbildung eines Teilraums  $D(T) \subseteq \mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$ .

Sind  $T, S$  Operatoren von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$ , so schreiben wir  $T \subseteq S$  falls  $D(T) \subseteq D(S)$  und  $S$  eine Fortsetzung von  $T$  ist.

Mit unbeschränkten Operatoren kann man nun nicht mehr so einfach rechnen wie mit beschränkten. Sind  $T, S$  Operatoren von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  und  $a \in \mathbb{C}$ , so definieren wir:

- (1)  $aT$  durch  $D(aT) := D(T)$  und  $(aT).v = aT.v$  falls  $a \neq 0$ , und  $0T := \mathbf{0}$ .
- (2)  $D(T + S) := D(T) \cap D(S)$  mit  $(T + S).v := T.v + S.v$  für  $v \in D(T + S)$ .
- (3) Ist  $S$  ein Operator von  $\mathcal{H}_2$  nach  $\mathcal{H}_3$ , so definieren wir  $D(S \circ T) := T^{-1}(D(S))$  und  $(S \circ T).v := S(T.v)$ .

(b) Ein Operator  $T$  heißt *dicht definiert*, wenn  $D(T)$  ein dichter Unterraum von  $\mathcal{H}$  ist. Für einen dicht definierten Operator  $T$  ist der adjungierte Operator definiert durch

$$D(T^*) := \{x \in \mathcal{H}_2 : (y \mapsto \langle T.y, x \rangle) \text{ stetig} \}$$

und durch

$$\langle T.y, x \rangle = \langle y, T^*.x \rangle \quad \text{für } y \in D(T), x \in D(T^*).$$

(c) Ein Operator  $T: D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  in  $\mathcal{H}$  heißt

- (1) *hermitesch*, wenn  $\langle T.x, y \rangle = \langle x, T.y \rangle$  für  $x, y \in D(T)$  gilt.
  - (2) *symmetrisch*, wenn  $T$  hermitesch und dicht definiert ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $T$  dicht definiert ist und  $T \subseteq T^*$  gilt.
  - (3) *selbstadjungiert*, wenn  $T$  dicht definiert ist und  $T = T^*$  gilt.
- (d) Ein Operator  $T$  von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph

$$\Gamma(T) := \{(x, T.x) \in \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 : x \in D(T)\}$$

ein abgeschlossener Unterraum von  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$  ist. ■

**Beispiel III.5.2.** (a) Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit der ONB  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Für eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definieren wir einen Operator  $T$  auf  $\mathcal{H}$  durch  $D(T) := \text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  und

$$T.v = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Damit ist  $T$  ein dicht definierter Operator. Wir können also seinen adjungierten Operator berechnen.

Die Bedingung, daß die Abbildung

$$D(T) \rightarrow \mathbb{C}, \quad y \mapsto \langle T.y, v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \langle y, e_n \rangle \langle e_n, v \rangle$$

stetig ist, ist äquivalent zu  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \cdot |\langle v, e_n \rangle|^2 < \infty$ . Damit ist

$$D(T^*) = \left\{ v \in \mathcal{H} : \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \cdot |\langle v, e_n \rangle|^2 < \infty \right\}$$

und

$$T^*.v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{x_n} \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Wir sehen also, daß  $T$  genau dann symmetrisch ist, wenn alle Zahlen  $x_n$  reell sind. Wendet man die gleiche Argumentation auf  $T^*$  an, so erhalten wir  $D(T^*) = D(T^{**})$  und

$$T^{**}.v = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \langle v, e_n \rangle e_n.$$

Der Operator  $T^{**}$  ist also eine Fortsetzung von  $T$ . Wie werden sehen, daß dies ein allgemeines Phänomen ist.

(b) Wir betrachten den Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  und den Operator  $Q$  mit  $D(Q) := C_c(\mathbb{R})$  (die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger) und  $(Q.f)(x) = xf(x)$ . Dann ist  $Q$  dicht definiert und für  $f, h \in D(Q)$  gilt  $\langle Q.f, h \rangle = \langle f, Q.h \rangle$ . Also ist  $Q$  ein symmetrischer Operator. Für  $f \in \mathcal{H}$  ist die Abbildung

$$D(Q) \rightarrow \mathbb{C}, \quad h \mapsto \langle Q.h, f \rangle = \int_{\mathbb{R}} xh(x)\overline{f(x)} dx$$

genau dann stetig, wenn  $x \mapsto xf(x)$  quadratintegrierbar ist. Also haben wir

$$D(Q^*) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} |x|^2 |f(x)|^2 dx < \infty\} \quad \text{mit} \quad (Q^*.f)(x) = xf(x).$$

In diesem Fall gilt  $Q^* = Q^{**}$ , d.h.  $Q^*$  ist selbstadjungiert.

(c) Wir betrachten wieder den Hilbertraum  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  und den Operator  $P$  mit  $D(P) := C_c^1(\mathbb{R})$  (die stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger) und  $P.f = if'$ . Dann ist  $P$  dicht definiert (Übung) und für  $f, h \in D(P)$  gilt

$$\langle P.f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} if'(x)\overline{h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{ih'(x)} dx = \langle f, P.h \rangle,$$

nach der Produktregel, da für ein ausreichend großes  $R$  die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} (ifh)'(x) dx = \int_{-R}^R (ifh)'(x) dx = if(R)h(R) - if(-R)h(-R) = 0$$

gilt. Also ist  $P$  ein symmetrischer Operator. In diesem Fall ist es etwas schwieriger, den Definitionsbereich des adjungierten Operators zu berechnen. Man kann aber auch in diesem Fall zeigen, daß  $P^* = P^{**}$  gilt. D.h.  $P^*$  ist eine selbstadjungierte Fortsetzung von  $P$ . ■

**Lemma III.5.3.** Für einen dicht definierten Operator  $T$  von  $\mathcal{H}_1$  nach  $\mathcal{H}_2$  gilt:

- (i) Der Operator  $T^*$  von  $\mathcal{H}_2$  nach  $\mathcal{H}_1$  ist abgeschlossen.
- (ii) Ist  $T^*$  dicht definiert, so gilt  $T \subseteq T^{**}$ .

**Beweis.** (i) Sei  $(y_n, T^*.y_n) \rightarrow (y, x)$ . Wir haben  $y \in D(T^*)$  und  $T^*.y = x$  zu zeigen. Es ist

$$\langle T.v, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T.v, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, T^*.y_n \rangle = \langle v, x \rangle.$$

Damit ist  $y \in D(T^*)$  sowie  $T^*.y = x$ .

(ii) Ist  $x \in D(T)$  und  $y \in D(T^*)$ , so ist

$$\langle T.x, y \rangle = \langle x, T^*.y \rangle.$$

Also ist  $x \in D(T^{**})$  mit  $T^{**}.x = T.x$ . ■

**Satz III.5.4.** Seien  $T_1 : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  und  $T_2 : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_3$  dicht definiert. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Ist  $D(T_2T_1)$  dicht, so ist  $T_1^*T_2^* \subseteq (T_2T_1)^*$ .
- (ii) Für  $T_2 \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  ist  $(T_2T_1)^* = T_1^*T_2^*$ .

**Beweis.** (i) Für  $x \in D(T_2T_1)$  und  $y \in D(T_1^*T_2^*)$  ist

$$\langle T_2T_1.x, y \rangle = \langle T_1.x, T_2^*.y \rangle = \langle x, T_1^*T_2^*.y \rangle,$$

da  $x \in D(T_1)$ ,  $T_1.x \in D(T_2)$  und  $T_2^*.y \in D(T_1^*)$ . Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Sei jetzt  $T_2$  ein beschränkter Operator und  $y \in D((T_2T_1)^*)$ . Dann ist  $D(T_2^*) = \mathcal{H}_3$  und somit für  $x \in D(T_1) = D(T_2T_1)$ :

$$\langle T_1.x, T_2^*.y \rangle = \langle T_2T_1.x, y \rangle = \langle x, (T_2T_1)^*.y \rangle.$$

Also ist  $T_2^*.y \in D(T_1^*)$  sowie  $T_1^*T_2^*.x = (T_2T_1)^*.x$ . Das war zu zeigen.  $\blacksquare$

Wir erinnern uns an die Operatoren  $P(f)$  mit dem Definitionsbereich  $D(P(f)) = D(f)$ , die Spektralmaßen zugeordnet sind.

**Satz III.5.5.** Sei  $(X, \mathfrak{S})$  ein meßbarer Raum und  $P: \mathfrak{S} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathcal{H}}$  ein Spektralmaß. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Für jede meßbare Funktion  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  ist  $P(f)$  dicht definiert.
- (ii)  $P(f)^* = P(\bar{f})$ .
- (iii) Ist  $|f(x)| = 1$  für alle  $x \in X$ , so ist  $P(f)$  unitär.
- (iv) Ist  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ , so ist  $P(f)$  selbstadjungiert.

**Beweis.** (i) Sei  $E_n := \{x \in X: |f(x)| \leq n\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $P(E_n).\mathcal{H} \subseteq D(f)$ , und wegen  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  haben wir

$$\mathbf{1} = P(X) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

(Satz III.4.4(iv)). Also ist  $v = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n).v$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Wegen  $P(E_n).\mathcal{H} \subseteq D(f)$  ist der Unterraum  $D(f)$  dicht.

(ii) Sei  $x \in D(f)$  und  $y \in D(\bar{f}) = D(f)$ . Nach Satz III.4.10(ii) ist dann  $\langle P(f).x, y \rangle = \langle x, P(\bar{f}).y \rangle$ . Damit ist  $y \in D(P(f)^*)$  und  $P(\bar{f}) \subseteq P(f)^*$ .

Wir haben also noch zu zeigen, daß jedes Element  $z \in D(P(f)^*)$  auch in  $D(f)$  liegt. Sei  $\varphi_n = \chi_{E_n}$  die charakteristische Funktion der Menge  $E_n$ . Wegen Satz III.5.4 haben wir dann

$$P(\varphi_n)P(f)^* \subseteq (P(f)P(\varphi_n))^* = P(f\varphi_n)^* = P(\bar{f}\varphi_n).$$

Sei  $v := P(f)^*.z$ . Dann ist

$$P(E_n).v = P(\varphi_n).v = P(\varphi_n)P(f)^*.z = P(\bar{f}\varphi_n).z$$

und folglich

$$\int_X |\bar{f}(x)\varphi_n(x)|^2 d\mu_z(x) = \|P(\bar{f}\varphi_n).z\|^2 = \|P(E_n).v\|^2 = \mu_v(E_n) \leq \mu_v(X) = \|v\|^2.$$

Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist  $\bar{f} \in \mathcal{L}^2(X, \mu_z)$ , d.h.  $z \in D(\bar{f}) = D(f)$ .

(iii) folgt aus (ii) wegen  $f\bar{f} = 1$ .

(iv) folgt aus (i) und (ii) wegen  $f = \bar{\bar{f}}$ .  $\blacksquare$

### Die Cayley-Transformation

Eine wichtige Methode zum Studium von unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen ist die Cayley-Transformation:

$$c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}, \quad t \mapsto \frac{t-i}{t+i}.$$

Ist  $A \in B(\mathcal{H})$  ein hermitescher Operator, so folgt aus  $c(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{S}^1$  und Satz III.5.4(iii), daß  $c(A) = (A - i\mathbf{1})(A + i\mathbf{1})^{-1}$  ein unitärer Operator ist. Wir möchten diese Korrespondenz auf symmetrische Operatoren und Isometrien ausweiten.

**Satz III.5.6.** *Sei  $T$  ein symmetrischer Operator auf dem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  mit Definitionsbereich  $D(T)$ . Dann gilt:*

- (i)  $\|T.x + ix\|^2 = \|T.x\|^2 + \|x\|^2$  für  $x \in D(T)$ .
- (ii)  $T$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $\mathcal{R}(T + i\mathbf{1})$  abgeschlossen ist.
- (iii)  $T + i\mathbf{1}$  ist injektiv.
- (iv) Gilt  $\mathcal{R}(T + i\mathbf{1}) = \mathcal{H}$ , so hat  $T$  keine echten symmetrischen Fortsetzungen.
- (v) Die Aussagen (i)-(iv) bleiben richtig, wenn man  $i$  durch  $-i$  ersetzt.

**Beweis.** (i) Das folgt aus

$$\|T.x + ix\|^2 = \|T.x\|^2 + \|x\|^2 - i\langle T.x, x \rangle + i\langle x, T.x \rangle = \|T.x\|^2 + \|x\|^2.$$

(ii) Wegen (i) ist die Abbildung  $\mathcal{R}(T + i\mathbf{1}) \rightarrow \Gamma(T), (T + i\mathbf{1}).x \mapsto (x, T.x)$  isometrisch. Hieraus folgt die Behauptung.

(iii) Klar wegen (i).

(iv) Sei  $T_1$  eine echte symmetrische Fortsetzung von  $T$ . Dann ist auch  $T_1 + i\mathbf{1}$  eine echte Fortsetzung von  $T + i\mathbf{1}$ . Wegen der Surjektivität von  $T + i\mathbf{1}$  kann  $T_1 + i\mathbf{1}$  unter diesen Umständen nicht mehr injektiv sein, im Widerspruch zu (iii).

(v) Klar. ■

**Lemma III.5.7.** *Für einen dicht definierten Operator  $T$  von  $\mathcal{H}$  nach  $\mathcal{H}$  gilt:*

- (i)  $\mathcal{N}(T^* \pm i\mathbf{1}) = \mathcal{R}(T \mp i\mathbf{1})^\perp$ .
- (ii) Ist  $T$  abgeschlossen und symmetrisch, so ist  $\mathcal{R}(T \pm i)$  abgeschlossen.

**Beweis.** (i) Zunächst beachten wir  $(T \pm i)^* = T^* \mp i$ . Ist  $x \in \mathcal{N}(T^* + i\mathbf{1})$  und  $y = (T - i\mathbf{1}).v$ , so haben wir

$$\langle x, y \rangle = \langle x, (T - i\mathbf{1}).v \rangle = \langle (T^* + i\mathbf{1}).x, y \rangle = 0.$$

Damit ist " $\subseteq$ " gezeigt. Ist umgekehrt  $x \in \mathcal{R}(T - i\mathbf{1})^\perp$ , so gilt

$$0 = \langle x, (T - i\mathbf{1}).v \rangle = \langle x, T.v \rangle + i\langle x, v \rangle.$$

Also ist  $x \in D(T^*)$  mit  $T^*.x = -ix$ , d.h.  $x \in \mathcal{N}(T^* + i\mathbf{1})$ .

(ii) Wegen Satz III.5.6(iii) ist  $T + i\mathbf{1}$  injektiv, so daß  $(T + i\mathbf{1})^{-1}: \mathcal{R}(T + i\mathbf{1}) \rightarrow \mathcal{H}$  existiert. Wegen  $\|(T + i\mathbf{1}).x\| \geq \|x\|$  (Satz III.5.6(i)) ist  $(T + i\mathbf{1})^{-1}$  stetig. Wir zeigen jetzt die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{R}(T + i\mathbf{1})$ . Sei dazu  $(T + i\mathbf{1}).x_n \rightarrow x$ . Aus Satz III.5.6(i) ersehen wir, daß  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dann eine Cauchy-Folge in  $D(T)$  ist, also gegen  $y \in \mathcal{H}$  konvergiert. Damit konvergiert auch  $T.x_n \rightarrow x - iy$ . Aus der Abgeschlossenheit folgt also  $y \in D(T)$  und  $T.y = x - iy$ , d.h.  $(T + i\mathbf{1}).y = x \in \mathcal{R}(T + i\mathbf{1})$ . Das Argument für  $T - i\mathbf{1}$  geht analog. ■

**Satz III.5.8.** Für einen symmetrischen Operator  $T$  sind äquivalent:

- (1)  $T$  ist selbstadjungiert.
- (2)  $T$  ist abgeschlossen und  $T^* \pm i\mathbf{1}$  ist injektiv.
- (3)  $\mathcal{R}(T \pm i\mathbf{1}) = \mathcal{H}$ .

**Beweis.** (1)  $\Rightarrow$  (2): Nach Lemma III.5.3(i) ist  $T$  abgeschlossen, da  $T = T^*$ . Da  $T$  symmetrisch ist, folgt die Injektivität von  $T^* \pm i\mathbf{1} = T \pm i\mathbf{1}$  aus Satz III.5.6(iii).

(2)  $\Rightarrow$  (3): Aus Lemma III.5.7(ii) folgt die Abgeschlossenheit von  $\mathcal{R}(T \pm i\mathbf{1})$  und aus Lemma III.5.7(i) die Dichtheit. Also ist  $T \pm i\mathbf{1}$  surjektiv.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Wegen  $T \subseteq T^*$  haben wir nur  $T^* \subseteq T$  zu zeigen. Sei  $y \in D(T^*)$ . Mit (iii) finden wir ein  $x \in D(T)$  mit  $(T^* - i\mathbf{1}).y = (T - i\mathbf{1}).x$ . Wegen  $T \subseteq T^*$  ist dann  $(T^* - i\mathbf{1}).y = (T^* - i\mathbf{1}).x$ , also  $x = y$ , da  $T^* - i\mathbf{1}$  nach Lemma III.5.7(i) injektiv ist. ■

Sei  $T$  ein symmetrischer Operator in  $\mathcal{H}$ . Aus Satz III.5.6(i) wissen wir, daß

$$\|T.x + ix\|^2 = \|T.x\|^2 + \|x\|^2 = \|T.x - ix\|^2$$

für alle  $x \in D(T)$  gilt. Also wird durch

$$U.(T.x + ix) := T.x - ix$$

eine Isometrie  $U$  mit  $D(U) := \mathcal{R}(T + i\mathbf{1})$  und  $\mathcal{R}(U) = \mathcal{R}(T - i\mathbf{1})$  definiert, die wir auch als  $U = (T - i\mathbf{1})(T + i\mathbf{1})^{-1}$  schreiben können. Der Operator  $U$  heißt *Cayley-Transformierte von  $T$* . Der Satz III.5.8 zeigt insbesondere, daß  $T$  genau dann selbstadjungiert ist, wenn  $U$  unitär ist.

**Lemma III.5.9.** Sei  $U: D(U) \rightarrow \mathcal{H}$  ein isometrischer Operator. Dann gilt:

- (i) Für  $x, y \in D(U)$  ist  $\langle U.x, U.y \rangle = \langle x, y \rangle$ .
- (ii) Ist  $\mathcal{R}(\mathbf{1} - U)$  dicht, so ist  $\mathbf{1} - U$  injektiv.
- (iii) Ist einer der Räume  $\mathcal{D}(U)$ ,  $\mathcal{R}(U)$ ,  $\Gamma(U)$  abgeschlossen, so auch die anderen beiden.

**Beweis.** (i) Das folgt sofort aus der Polarisierungsidentität.

(ii) Sei  $x \in D(U)$  mit  $(\mathbf{1} - U).x = 0$ , d.h.  $U.x = x$ . Für  $y \in D(U)$  haben wir dann

$$\langle x, (\mathbf{1} - U).y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle x, U.y \rangle = \langle U.x, U.y \rangle - \langle x, U.y \rangle = \langle U.x - x, U.y \rangle = 0.$$

Da das Bild von  $\mathbf{1} - U$  dicht ist, folgt hieraus  $x = 0$ .

(iii) Da  $U$  isometrisch ist, ist  $D(U)$  genau dann abgeschlossen, wenn  $\mathcal{R}(U)$  abgeschlossen ist. Ist dies der Fall, so ist  $U: D(U) \rightarrow \mathcal{R}(U)$  eine stetige Abbildung zwischen Banachräumen, so daß  $\Gamma(U)$  wegen dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (vgl. [Ne96]) abgeschlossen ist.

Ist andererseits  $\Gamma(U)$  abgeschlossen, so ist  $\Gamma(U)$  vollständig. Sei  $x_n \in D(U)$  mit  $x_n \rightarrow x$ . Dann ist  $(x_n, U.x_n)$  eine Cauchy-Folge in  $\Gamma(U)$ , also konvergent, und somit  $x \in D(U)$ . ■

### Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren

**Theorem III.5.10.** Ist  $P: \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{H}$  ein Spektralmaß auf  $\mathbb{R}$ , so ist  $P(\text{id})$  ein selbstadjungierter Operator. Umgekehrt existiert zu jedem selbstadjungierten Operator  $T$  auf  $\mathcal{H}$  ein eindeutiges Spektralmaß auf  $\mathbb{R}$  mit  $T = P(\text{id})$ .

**Beweis.** Der erste Teil folgt aus Proposition III.5.5. Der zweite Teil ist schwieriger.

Sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}$  und  $U$  dessen Cayley-Transformierte. Weiter sei  $P': \sigma(U) \rightarrow P_{\mathcal{H}}$  das Spektralmaß des unitären Operators  $U$ .

Wir zeigen, daß  $U - \mathbf{1}$  injektiv ist. Sei dazu

$$T.x + ix = U.(T.x + ix) = T.x - ix.$$

Dann ist  $2ix = 0$ , also  $x = 0$  und somit  $T.x + ix = 0$ . Also ist 1 kein Eigenwert von  $U$  und somit  $P'(\{1\}) = 0$  (Korollar III.4.15). Wir können das Spektralmaß  $P'$  folglich als ein Spektralmaß auf  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1, z \neq 1\}$  auffassen. In diesem Sinne ist

$$\langle U.v, v \rangle = \int_{\Omega} \lambda \, d\mu'_v(\lambda)$$

für  $v \in \mathcal{H}$ .

Sei

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \frac{i(1+\lambda)}{1-\lambda}.$$

Wir definieren den Operator

$$P'(f): D(P'(f)) \rightarrow \mathcal{H}$$

wie in Satz III.4.10 durch

$$\langle P'(f).v, v \rangle = \int_{\Omega} f(\lambda) \, d\mu'_v(\lambda)$$

und  $D(P'(f)) = \{v \in \mathcal{H} : f \in L^2(\mu'_v)\}$ . Wegen Satz III.5.5(iv) ist  $P'(f)$  selbstadjungiert. Weiter haben wir  $f(\lambda)(1-\lambda) = i(1+\lambda)$ , also

$$(5.1) \quad P'(f)(\mathbf{1} - U) = i(\mathbf{1} + U)$$

wegen Satz III.4.10(vii). Insbesondere folgt hieraus  $\mathcal{R}(\mathbf{1} - U) \subseteq D(P'(f))$ . Andererseits haben wir  $\mathcal{R}(T + i\mathbf{1}) = \mathcal{H}$  und für  $x = (T + i\mathbf{1}).y$  gilt  $U.x = (T - i\mathbf{1}).y$ . Damit erhalten wir  $(\mathbf{1} - U).x = 2iy$  und weiter

$$T(\mathbf{1} - U).x = 2iT.y = i(\mathbf{1} + U).x.$$

Wir haben also

$$(5.2) \quad T(\mathbf{1} - U) = i(\mathbf{1} + U),$$

wobei  $D(T) = \mathcal{R}(\mathbf{1} - U) \subseteq D(P'(f))$ . Durch Vergleich von (5.1) und (5.2) sehen wir,  $T \subseteq P'(f)$ , also  $P'(f) = P'(f)^* \subseteq T^* = T$  und somit  $T = P'(f)$ . Insbesondere erhalten wir hiermit

$$\langle T.v, v \rangle = \int_{\Omega} f(\lambda) \, d\mu'_v(\lambda)$$

und  $D(T) = \{v \in \mathcal{H} : f \in L^2(\mu'_v)\}$ .

Wir definieren jetzt ein Spektralmaß auf  $\mathbb{R}$  durch  $P(E) := P'(f^{-1}(E))$  und erhalten

$$\langle T.v, v \rangle = \int_{\Omega} f(\lambda) \, d\mu'_v(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(f^{-1}(\lambda)) \, d\mu_v(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_v(\lambda)$$

aus der Transformationsformel für Integrale.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit des Spektralmaßes. Ist nämlich  $Q$  ein weiteres Spektralmaß auf  $\mathbb{R}$ , das  $T$  wie oben darstellt, so definiert  $Q'(E) := Q(f(E))$  ein Spektralmaß auf  $\Omega$ , das  $U$  mittels

$$\langle U.v, v \rangle = \int_{\Omega} \lambda \, d\tilde{\mu}_v(\lambda)$$

für  $v \in \mathcal{H}$  darstellt, wobei  $\tilde{\mu}_v(E) = \langle Q'(E).v, v \rangle$  ist. Also ist  $Q' = P'$  und somit  $Q = P$ .  $\blacksquare$



### Der Satz von Stone

**Definition III.5.11.** Sei  $X$  ein Banach-Raum und  $Q: \mathbb{R}^+ \rightarrow B(X)$  ein Homomorphismus von Halbgruppen mit  $Q(0) = \mathbf{1}$ , so daß  $\lim_{t \rightarrow 0} Q(t).x = x$  für alle  $x \in X$  gilt. Dann heißt  $Q$  eine *stark stetige Einparameterhalbgruppe*.

Sei  $Q: \mathbb{R}^+ \rightarrow B(X)$  eine Einparameterhalbgruppe. Wir definieren einen unbeschränkten Operator  $A: D(A) \rightarrow X$  durch

$$D(A) := \left\{ x \in X : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Q(t).x - x) \text{ existiert} \right\}$$

und

$$A.x := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Q(t).x - x)$$

für  $x \in D(A)$ . Dieser Operator heißt der *infinitesimale Erzeuger von  $Q$* . ■

**Bemerkung III.5.12.** Sei  $X$  ein Banach-Raum. Ist  $A \in B(X)$ , so definiert  $Q(t) = e^{tA}$  eine Einparameterhalbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $A$ , denn  $Q$  ist sogar analytisch und hat die Ableitung  $A$  in  $0$ . ■

Für mehr Informationen zu Einparameter-Halbgruppen verweisen wir auf Kapitel 13 in [Ru73]. Wir begnügen uns hier mit einem für die Darstellungstheorie besonders wichtigen Spezialfall.

**Theorem III.5.13.** (Satz von Stone) *Ist  $\pi: \mathbb{R} \rightarrow U(\mathcal{H})$  eine stark stetige Einparametergruppe von unitären Operatoren, so ist der infinitesimale Erzeuger  $iA$  ein selbstadjungierter Operator und es gilt  $\pi(t) = P(e_t)$  mit  $e_t(x) = e^{itx}$  bzgl. dem Spektralmaß  $P$  auf  $\mathbb{R}$  für das  $A = P(\text{id})$  ist. So erhält man eine bijektive Korrespondenz zwischen selbstadjungierten Operatoren und unitären Einparameter-Gruppen.*

**Beweis.** Wir haben schon in Theorem III.4.15 gesehen, daß man durch  $\pi(t) := P(e_t)$  für ein Spektralmaß  $P$  auf  $\mathbb{R}$  eine stark stetige unitäre Einparametergruppe erhält.

Für den Beweis der Umkehrung verweisen wir auf [Ru73, Th. 13.37]. ■

## IV. Operatoren auf Hilberträumen

### IV.1. Kompakte Operatoren

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie sich die Methoden, die uns bisher zur Verfügung stehen, auf kompakte Operatoren auf Hilberträumen anwenden lassen.

**Definition IV.1.1.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum. Ein Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  heißt *kompakt*, wenn für die abgeschlossene Einheitskugel  $B \subseteq \mathcal{H}$  das Bild  $A(B) \subseteq \mathcal{H}$  kompakt ist. Wir schreiben  $K(\mathcal{H})$  für die Menge der kompakten Operatoren auf  $\mathcal{H}$ . ■

**Satz IV.1.2.** Die Menge  $K(\mathcal{H})$  ist eine abgeschlossene  $*$ -Unteralgebra.

**Beweis.** Die Tatsache, daß  $K(\mathcal{H})$  eine abgeschlossene Unteralgebra von  $B(\mathcal{H})$  ist, folgt aus [Ne96, Satz VI.1.9(iii)].

Andererseits zeigt der Satz von Schauder ([Ne96, Satz VI.1.11]), daß  $A$  genau dann kompakt ist, wenn dies für  $A'$  gilt. Aus der Kompaktheit von  $A$  folgt also auch die von  $A^* = \Phi^{-1} \circ A' \circ \Phi$ . Also ist  $K(\mathcal{H})$  invariant unter  $A \mapsto A^*$ . ■

**Lemma IV.1.3.** Sei  $A \in B(\mathcal{H})$  normal. Dann gilt:

(i) Die Eigenräume  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  von  $A$  sind paarweise orthogonal und es gilt

$$\mathcal{H}_\lambda(A) = \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}(A^*).$$

(ii) Ist  $A$  zusätzlich kompakt, so existiert ein Eigenwert  $\lambda$  mit  $|\lambda| = \|A\|$ .

**Beweis.** (i) Da  $A^*$  mit  $A$  vertauscht, ist  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  unter  $A^*$  invariant (Lemma I.4.2). Für  $A.v = \lambda v$  erhalten wir mit  $\langle A^*.v, v \rangle = \langle v, A.v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle$  daher  $A^*.v = \bar{\lambda}.v$ , also  $\mathcal{H}_\lambda(A) \subseteq \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}(A^*)$ . Da sich das Argument auch auf  $A^*$  anwenden läßt, folgt die Gleichheit aus  $(A^*)^* = A$ .

Jetzt seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ , sowie  $v \in \mathcal{H}_\lambda$  und  $w \in \mathcal{H}_\mu$ . Dann gilt

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle A.v, w \rangle = \langle v, A^*.w \rangle = \langle v, \bar{\mu}.w \rangle = \bar{\mu} \langle v, w \rangle,$$

also  $\langle v, w \rangle = 0$ , falls  $\lambda \neq \bar{\mu}$ .

(ii) Zunächst wissen wir aus Lemma II.2.14, daß

$$\|A\| = r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\},$$

da  $\sigma(A)$  kompakt ist.

Ist  $A = 0$ , so ist die Behauptung trivial. Ist  $A \neq 0$ , so ist damit  $r(A) \neq 0$  und wir finden ein  $\lambda \in \sigma(A)$  mit maximalem Betrag. Aus der Funktionalanalysis ([Ne96, Th. VI.2.6]) wissen wir, daß  $\lambda$  dann sogar ein Eigenwert von  $A$  ist. Hieraus folgt die Behauptung. ■

**Definition IV.1.4.** Wir schreiben  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  für den Raum der stetigen Operatoren von endlichem Rang, d.h. mit endlichdimensionalem Bild.

Für  $x, y \in \mathcal{H}$  schreiben wir  $P_{x,y}$  für den Operator, der durch  $P_{x,y}(v) = \langle v, y \rangle x$  gegeben ist und setzen  $P_x := P_{x,x}$ . ■

**Theorem IV.1.5.** (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren) *Für jeden kompakten normalen Operator  $A \in K(\mathcal{H})$  existiert eine orthonormale Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Nullfolge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit*

$$A = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_{e_n}.$$

Weiter gilt  $\|A\| = \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Beweis.** Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  sei  $\mathcal{H}_\lambda$  der zugehörige Eigenraum. Sei  $\mathcal{H}_1 := \overline{\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{H}_\lambda}$  und  $\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_1^\perp$ . Dann ist  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$  eine  $A$ -invariante Zerlegung. Nun ist  $A|_{\mathcal{H}_0}$  wieder ein kompakter Operator. Wäre dieser Operator von 0 verschieden, so fänden wir mit Lemma IV.1.3(ii) einen Eigenwert  $\lambda \neq 0$  von  $A$  auf  $\mathcal{H}^0$ . Es existiert also ein Eigenvektor  $0 \neq v \in \mathcal{H}_\lambda(A) \cap \mathcal{H}_0 = \{0\}$ , im Widerspruch zur Konstruktion von  $\mathcal{H}_0$ .

In [Ne96, Th. VI.2.6] haben wir gesehen, daß alle Eigenräume zu von 0 verschiedenen Eigenwerten endlichdimensional sind, daß  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  mit der Menge der von 0 verschiedenen Eigenwerte übereinstimmt, und daß sich diese abzählbare Menge höchstens in 0 häuft. Wir können also die Menge  $\sigma(A) \setminus \{0\}$  der von Null verschiedenen Eigenwerte als eine Nullfolge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  schreiben, wobei wir jeden Eigenwert mit seiner Vielfachheit zählen und für den Fall, daß  $\sigma(A) \setminus \{0\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  endlich ist, durch  $\lambda_m := 0$  für  $m > n$  ergänzen. Hierbei können wir sogar annehmen, daß  $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt. Insbesondere haben wir unter dieser Voraussetzung

$$(2.1) \quad \|A\| = \sup\{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\} = |\lambda_1|.$$

Wir wählen nun eine orthonormale Folge von zugehörigen Eigenvektoren  $e_n \in \mathcal{H}_{\lambda_n}(A)$  und setzen  $A_n := \sum_{m=1}^n \lambda_m P_{e_m}$ . Für  $v \in \mathcal{H}_n := \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$  ist dann  $A_n \cdot v = A \cdot v$ , d.h.  $A - A_n$  verschwindet auf diesem Unterraum. Weiter läßt  $A$  den Unterraum  $\mathcal{H}_n^\perp$  invariant und  $A_n$  verschwindet auf diesem Raum. Wir haben also wegen (2.1):

$$\|A - A_n\| = \sup\{|\lambda_m| : m > n\} = |\lambda_n|.$$

Hieraus folgt  $A_n \rightarrow A$ , also

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{e_n}. \quad \blacksquare$$

Mit Theorem IV.1.5 hat man alle Information über kompakte normale Operatoren, die man sich nur wünschen kann. Wir halten noch einige Folgerungen fest:

**Korollar IV.1.6.** *Sei*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{e_n}$$

*ein kompakter normaler Operator, wobei  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine orthonormale Folge und  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist. Dann gilt:*

- (i)  $\sigma(A) \subseteq \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ .
- (ii) *Es existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.*
- (iii)  $\mathcal{H}$  *ist die orthogonale direkte Summe der Eigenräume von  $A$ .*
- (iv) *Für  $\lambda \neq 0$  ist der Eigenraum  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  endlichdimensional.*

**Beweis.** (i) Aus der Darstellung von  $A$  folgt, daß alle von 0 verschiedenen Eigenwerte unter den  $\lambda_n$  vorkommen. Damit folgt die Behauptung aus [Ne96, Th. VI.2.6].

(ii), (iii) Wir ergänzen die Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu einer ONB  $(e_j)_{j \in J}$  von  $\mathcal{H}$ . Aus der Formel für  $\mathcal{H}$  folgt dann sofort, daß dies eine ONB aus Eigenvektoren von  $A$  ist. Damit ist (ii) bewiesen, und (iii) folgt sofort aus (ii).

(iv) folgt direkt aus  $\mathcal{H}_\lambda(A) = \text{span}\{e_n : \lambda_n = \lambda\}$ . ■

**Korollar IV.1.7.** Für jeden kompakten Operator  $A \in K(\mathcal{H})$  existieren zwei orthonormale Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Nullfolge  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_{e_n, f_n}.$$

**Beweis.** Sei  $B := A^*A$ . Dann existiert nach Theorem IV.1.5 eine orthonormale Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und eine Nullfolge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{f_n}.$$

Da  $\langle B.v, v \rangle = \langle A^*A.v, v \rangle = \|A.v\|^2 \geq 0$  für alle  $v \in \mathcal{H}$  gilt, sind alle  $\lambda_n \geq 0$ . Wir setzen

$$C := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} P_{f_n}.$$

Wir dürfen o.B.d.A.  $\lambda_n > 0$  für alle  $n$  annehmen. Sei nun  $e_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} A.f_n$ . Dann ist

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \langle A.f_n, A.f_m \rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} \langle A^*A.f_n, f_m \rangle = \delta_{nm} \frac{\lambda_n}{\sqrt{\lambda_n \lambda_m}} = \delta_{nm}.$$

Also bilden die  $e_n$  eine orthonormale Folge. Weiter haben wir  $A.v = 0$  für  $\langle v, f_n \rangle = 0$  für alle  $n$ , da in diesem Fall  $\|A.v\|^2 = \langle A^*A.v, v \rangle = 0$  ist. Für  $v = f_n$  gilt andererseits

$$A.v = \sqrt{\lambda_n} e_n.$$

Mit  $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$  erhalten wir also die Behauptung. ■

Für eine besonders schöne Diskussion der Anwendungen kompakter Operatoren auf Integralgleichungen verweisen wir auf [We95, Abschnitt VI.4].

### Approximation mit Operatoren endlichen Ranges

**Lemma IV.1.7.** Der Raum  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  der Operatoren endlichen Ranges besteht genau aus den Operatoren der Gestalt

$$A = \sum_{j=1}^n P_{v_j, w_j},$$

mit  $v_j, w_j \in \mathcal{H}$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**Beweis.** Es ist klar, daß das Bild des Operators  $\sum_{j=1}^n P_{v_j, w_j}$  in  $\text{span}\{v_j : j = 1, \dots, n\}$  liegt, also endlichdimensional ist, und daß dieser Operator stetig ist.

Sei umgekehrt  $A \in B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Orthonormalbasis des Bildes von  $A$ . Für  $x \in \mathcal{H}$  ist dann

$$A.x = \sum_{j=1}^n \langle A.x, v_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^n \langle x, A^*.v_j \rangle v_j = \sum_{j=1}^n P_{v_j, A^*.v_j}.x,$$

d.h.  $A = \sum_{j=1}^n P_{v_j, A^*.v_j}$ . ■

**Satz IV.1.8.**  $K(\mathcal{H}) = \overline{B_{\text{fin}}(\mathcal{H})}$ .

**Beweis.** Da der Raum der kompakten Operatoren abgeschlossen ist (Satz IV.1.2) und  $B_{\text{fin}} \subseteq K(\mathcal{H})$  gilt, haben wir nur zu zeigen, daß  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  in  $K(\mathcal{H})$  dicht ist.

Aus Lemma IV.1.7 ist klar, daß mit  $A$  auch  $A^*$  endlichen Rang hat. Da sich jeder kompakte Operator  $A$  als  $A = B + iC$  mit hermiteschen kompakten Operatoren  $B, C$  schreiben läßt, reicht es aus zu zeigen, daß jeder kompakte hermitesche Operator  $A$  sich bzgl.  $\|\cdot\|$  durch Operatoren endlichen Ranges approximieren läßt. Das folgt aber sofort aus der Darstellung

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{e_n}$$

aus Theorem IV.1.5. ■

## IV.2. Hilbert-Schmidt-Operatoren

In diesem Abschnitt wenden wir uns der wichtigen Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren zu. Dies sind spezielle kompakte Operatoren, die in der Darstellungstheorie eine wichtige Rolle spielen.

### Lemma IV.2.1.

- (i)  $P_{x,y}^* = P_{y,x}$ .
- (ii)  $P_{x,y}P_{z,w} = \langle z, y \rangle P_{x,w}$ .
- (iii)  $AP_{x,y}B^* = P_{A.x, B.y}$  für  $A, B \in B(\mathcal{H})$ .
- (iv)  $P_{A.x} = AP_xA^*$ .
- (v) Ist  $A = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_{v_j, w_j}$ , wobei die endlichen Folgen  $(v_j)_{j=1, \dots, n}$  und  $(w_j)_{j=1, \dots, n}$  orthonormal sind, so gilt  $\|A\| = \max\{|\lambda_j| : j = 1, \dots, n\}$ .

**Beweis.** (i)-(iv) Der Beweis besteht aus einfachem Nachrechnen.

(v) Wegen

$$\begin{aligned} A^*A &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \bar{\lambda}_k P_{v_k, w_k}^* P_{v_j, w_j} = \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \bar{\lambda}_k P_{w_k, v_k} P_{v_j, w_j} \\ &= \sum_{j,k=1}^n \lambda_j \bar{\lambda}_k \langle v_j, v_k \rangle P_{w_k, w_j} = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 P_{w_j, w_j}, \end{aligned}$$

und  $\|A\|^2 = \|A^*A\|$  folgt die Behauptung hiermit aus Theorem IV.1.5. ■

**Lemma IV.2.2.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $(e_j)_{j \in J}$ ,  $(f_k)_{k \in K}$  Orthonormalbasen. Für  $A \in B(\mathcal{H})$  ist dann

$$\sum_{j \in J} \|A.e_j\|^2 = \sum_{k \in K} \|A.f_k\|^2.$$

**Beweis.** Das folgt aus folgender Rechnung (vgl. Satz I.1.18):

$$\sum_j \|A.e_j\|^2 = \sum_{j,k} |\langle A.e_j, f_k \rangle|^2 = \sum_{j,k} |\langle e_j, A^*.f_k \rangle|^2 = \sum_k \|A^*.f_k\|^2. \quad \blacksquare$$

**Definition IV.2.3.** Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum und  $(e_j)_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis. Ein Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  heißt *Hilbert-Schmidt-Operator*, falls

$$\|A\|_2 := \sqrt{\sum_j \|A.e_j\|^2} < \infty.$$

Wir beachten, daß dieser Ausdruck wegen Lemma IV.2.2 unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis ist. Wir schreiben  $B_2(\mathcal{H})$  für den Raum aller Hilbert-Schmidt-Operatoren auf  $\mathcal{H}$ . ■

### Proposition IV.2.4.

- (i) Für  $A \in B_2(\mathcal{H})$  ist  $\|A^*\|_2 = \|A\|_2$ .
- (ii)  $\|A\| \leq \|A\|_2$ .
- (iii) Der Raum  $B_2(\mathcal{H})$  ist ein Hilbertraum bzgl.  $\|\cdot\|_2$ . Ist  $(e_j)_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis, so ist das Skalarprodukt in  $B_2(\mathcal{H})$  gegeben durch

$$\langle A, B \rangle := \sum_j \langle B^*A.e_j, e_j \rangle.$$

- (iv)  $\langle A, B \rangle = \langle B^*, A^* \rangle$ .

(v) Für  $A \in B(\mathcal{H})$ ,  $B, C \in B_2(\mathcal{H})$  ist  $AB \in B_2(\mathcal{H})$  mit

$$\|AB\|_2 \leq \|A\| \cdot \|B\|_2 \quad \text{und} \quad \langle AB, C \rangle = \langle B, A^*C \rangle.$$

(vi)  $B_{\text{fin}} \subseteq B_2(\mathcal{H})$  ist dicht bzgl.  $\|\cdot\|_2$ .

**Beweis.** (i) Das folgt direkt aus dem Beweis von Lemma IV.2.2.

(ii) Sei  $\varepsilon > 0$  und  $(e_j)_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}$ , so daß  $\|A.e_{j_0}\| \geq \|A\| - \varepsilon$  für ein  $j_0 \in J$  gilt. Dann ist

$$\|A\|_2^2 = \sum_j \|A.e_j\|^2 \geq (\|A\| - \varepsilon)^2,$$

und da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, folgt  $\|A\|_2 \geq \|A\|$ .

(iii) Wir betrachten den Hilbertraum  $l^2(J \times J)$  und den dichten Unterraum  $l^0$ , der von den Funktionen mit endlichem Träger aufgespannt wird. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\Psi: l^0 \rightarrow B_{\text{fin}}(\mathcal{H}), \quad \delta_{j,k} \mapsto P_{e_j, e_k},$$

wobei  $\delta_{j,k}$  die Funktion bezeichnet, die in  $(j, k)$  den Wert 1 annimmt, und 0 sonst. Die Definition von  $\|\cdot\|_2$  zeigt sogar, daß  $\Psi$  eine Isometrie auf den Unterraum  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  der Operatoren endlichen Ranges in dem normierten Raum  $B_2(\mathcal{H})$  ist.

Ferner ist die Abbildung  $\Psi$  wegen (ii) stetig als eine Abbildung  $l^0 \rightarrow B(\mathcal{H})$ . Sie setzt sich also zu einer stetigen Abbildung  $\tilde{\Psi}: l^2(J \times J) \rightarrow B(\mathcal{H})$  fort. Aus Definition IV.2.2 erkennen wir nun, daß wir so eine surjektive Isometrie  $l^2(J \times J) \rightarrow B_2(\mathcal{H})$  erhalten. Insbesondere ist  $B_2(\mathcal{H})$  ein Hilbertraum. Es bleibt also nur die Formel für das Skalarprodukt zu verifizieren.

Wir haben

$$\|A\|^2 = \langle A, A \rangle = \sum_{j \in J} \|A.e_j\|^2 = \sum_{j \in J} \langle A^*A.e_j, e_j \rangle.$$

Aus der Existenz der Summe und der Polarisierungsidentität (Satz I.1.3) erhalten wir hiermit

$$\langle A, B \rangle = \sum_{j \in J} \langle B^*A.e_j, e_j \rangle.$$

(iv) Wir wissen schon aus (i), daß  $A \mapsto A^*$  eine Isometrie von  $B_2(\mathcal{H})$  ist. Damit sind beide Seiten hermitesche Formen auf  $B_2(\mathcal{H})$ , die die gleiche Norm definieren. Die Behauptung folgt also auch aus der Polarisierungsidentität (Lemma I.1.2).

(v) Der erste Teil folgt aus

$$\|AB\|_2^2 = \sum_j \|AB.e_j\|^2 \leq \sum_j \|A\|^2 \|B.e_j\|^2 = \|A\|^2 \|B\|_2^2.$$

Für den zweiten rechnen wir:

$$\langle AB, C \rangle = \sum_j \langle C^*AB.e_j, e_j \rangle = \sum_j \langle (A^*C)^*B.e_j, e_j \rangle = \langle B, A^*C \rangle.$$

(vi) Das folgt sofort aus dem Beweis von (iii). ■

### IV.3. Spurklasseoperatoren

**Definition IV.3.1.** Wir sagen ein Operator  $A \in B(\mathcal{H})$  ist von *Spurklasse*, wenn  $A \in B_2(\mathcal{H})$  und

$$\|A\|_1 := \sup\{|\langle A, B \rangle| : B \in B_2(\mathcal{H}), \|B\| \leq 1\}$$

endlich ist. Wir schreiben  $B_1(\mathcal{H}) \subseteq B_2(\mathcal{H})$  für die Menge der Spurklasseoperatoren. ■

**Lemma IV.3.2.** Die Menge  $B_1(\mathcal{H}) \subseteq B_2(\mathcal{H})$  ist ein Untervektorraum und  $\|\cdot\|_1$  ist eine Norm.

**Beweis.** Die Abgeschlossenheit von  $B_1(\mathcal{H})$  unter Skalarmultiplikation ist klar. Wegen  $|\langle A_1 + A_2, B \rangle| \leq |\langle A_1, B \rangle| + |\langle A_2, B \rangle|$  für  $A_j \in B_1(\mathcal{H})$  und  $B \in B_2(\mathcal{H})$ , sehen wir sogar, daß  $B_1(\mathcal{H})$  additiv abgeschlossen, also ein Untervektorraum von  $B_2(\mathcal{H})$  ist. Ein ähnliches Argument zeigt, daß  $\|\cdot\|_1$  eine Halbnorm ist.

Ist  $\|A\|_1 = 0$ , so ist  $\langle A, B \rangle = 0$  für alle  $B \in B_2(\mathcal{H})$  mit  $\|B\| \leq 1$ , also auch für alle  $B \in B_2(\mathcal{H})$ . Folglich ist  $A = 0$ . Hiermit ist alles gezeigt. ■

**Proposition IV.3.3.**

- (i) Für  $A \in B(\mathcal{H})$  und  $B \in B_1(\mathcal{H})$  ist  $AB \in B_1(\mathcal{H})$  mit  $\|AB\|_1 \leq \|A\| \cdot \|B\|_1$ .
- (ii)  $\|A\|_2 \leq \|A\|_1$  für  $A \in B_1(\mathcal{H})$ .
- (iii)  $B_1(\mathcal{H})$  ist  $*$ -invariant und  $\|A^*\|_1 = \|A\|_1$ .
- (iv)  $B_2(\mathcal{H})B_2(\mathcal{H}) \subseteq B_1(\mathcal{H})$ .

**Beweis.** (i) Das folgt aus

$$|\langle AB, X \rangle| = |\langle B, A^*X \rangle| \leq \|B\|_1 \cdot \|A^*X\| \leq \|B\|_1 \|A\| \cdot \|X\| \leq \|B\|_1 \|A\|$$

für  $X \in B_2(\mathcal{H})$  mit  $\|X\| \leq 1$ .

(ii) Wegen  $\|X\| \leq \|X\|_2$  für  $X \in B_2(\mathcal{H})$  (Proposition IV.2.4(ii)) erhalten wir

$$\{X \in B_2(\mathcal{H}): \|X\| \leq 1\} \supseteq \{X \in B_2(\mathcal{H}): \|X\|_2 \leq 1\}.$$

Die Behauptung folgt damit aus

$$\|A\|_2 = \sup\{|\langle A, X \rangle|: \|X\|_2 \leq 1\} \leq \sup\{|\langle A, X \rangle|: \|X\| \leq 1\} = \|A\|_1.$$

(iii) Wegen

$$|\langle A^*, X \rangle| = |\langle X^*, A \rangle| = |\langle A, X^* \rangle|$$

und der Tatsache, daß  $X \mapsto X^*$  eine Isometrie von  $B(\mathcal{H})$  und  $B_2(\mathcal{H})$  ist, sehen wir, daß  $A^* \in B_1(\mathcal{H})$  mit  $\|A^*\|_1 = \|A\|$  gilt.

(iv) Ist  $A = BC$  mit  $B, C \in B_2(\mathcal{H})$ , so haben wir für  $X \in B_2(\mathcal{H})$  die Abschätzung

$$|\langle A, X \rangle| = |\langle BC, X \rangle| = |\langle C, B^*X \rangle| \leq \|C\|_2 \|B^*X\|_2 \leq \|C\|_2 \|B\|_2 \|X\|.$$

Also ist  $\|A\|_1 \leq \|B\|_2 \|C\|_2$ . ■

**Proposition IV.3.4.** Sei  $(e_j)_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis und  $A \in B_1(\mathcal{H})$ . Dann konvergiert die Reihe

$$\operatorname{tr} A := \sum_{j \in J} \langle A e_j, e_j \rangle$$

absolut und es gilt:

- (i)  $|\operatorname{tr} A| \leq \|A\|_1$ , d.h.  $\operatorname{tr}$  ist ein stetiges lineares Funktional auf  $B_1(\mathcal{H})$  und unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis.
- (ii)  $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*)$  and  $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$  für  $A, B \in B_2(\mathcal{H})$ .
- (iii) Für  $A \in B_1(\mathcal{H})$  ist die Funktion  $X \mapsto \operatorname{tr}(XA)$  auf  $B(\mathcal{H})$  stetig und setzt das Funktional  $X \mapsto \langle X, A^* \rangle$  auf  $B_2(\mathcal{H})$  fort. Weiter gilt  $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(XA)$  für  $A \in B_1(\mathcal{H})$ ,  $X \in B(\mathcal{H})$ .
- (iv) Ist  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{v_n, w_n}$ , wobei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  orthonormale Folgen sind, so ist  $\|A\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$  und

$$\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v_n, w_n \rangle.$$

- (v)  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H}) \subseteq B_1(\mathcal{H})$  ist dicht bzgl.  $\|\cdot\|_1$ .

**Beweis.** (i) Sei  $J_0 \subseteq J$  eine endliche Teilmenge und  $\lambda_j, j \in J_0$  komplexe Zahlen mit  $|\lambda_j| = 1$  und  $\lambda_j \langle A.e_j, e_j \rangle = |\langle A.e_j, e_j \rangle|$ . Dann erhalten wir aus Lemma IV.2.1(v)

$$\sum_{j \in J_0} |\langle A.e_j, e_j \rangle| = \sum_{j \in J_0} \lambda_j \langle A.e_j, e_j \rangle = \langle A, \sum_{j \in J_0} \lambda_j P_{e_j} \rangle \leq \|A\|_1 \sum_{j \in J_0} \lambda_j P_{e_j} \leq \|A\|_1.$$

Hieraus folgt die Abschätzung unter (i) und die absolute Summierbarkeit.

Um zu sehen, daß  $\text{tr} A$  nicht von der Wahl der Orthonormalbasis abhängt, wählen wir eine andere Orthonormalbasis  $(f_k)_{k \in K}$  und rechnen

$$\sum_k \langle A.f_k, f_k \rangle = \sum_{k,j} \langle A.f_k, e_j \rangle \langle e_j, f_k \rangle = \sum_{k,j} \langle f_k, A^*.e_j \rangle \langle e_j, f_k \rangle = \sum_j \langle e_j, A^*.e_j \rangle = \sum_j \langle A.e_j, e_j \rangle.$$

(ii) Der erste Teil ist Proposition IV.2.4(iii). Der zweite folgt aus

$$\text{tr}(AB) = \langle A, B^* \rangle = \langle B, A^* \rangle = \text{tr}(BA).$$

(iii) Für  $A \in B_1(\mathcal{H})$  und  $B \in B(\mathcal{H})$  verwenden wir Proposition IV.3.3 um zu sehen, daß  $AB \in B_1(\mathcal{H})$  mit  $|\text{tr}(XA)| \leq \|XA\|_1 \leq \|X\| \cdot \|A\|_1$  gilt. Das beweist den ersten Teil von (iii).

Um  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(XA)$  für  $A \in B_1(\mathcal{H})$  und  $X \in B(\mathcal{H})$  zu sehen, bemerken wir zuerst, daß beide Seiten komplex bilineare Abbildungen definieren. Wir dürfen daher o.B.d.A. annehmen, daß  $A$  hermitesch ist (Satz I.2.4(iii)). Da  $A$  kompakt ist, existiert eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren für  $A$  (Korollar IV.1.6). Daher dürfen wir  $A.e_j = \lambda_j e_j$  annehmen. Nun ist

$$\text{tr}(AX) = \sum_j \langle AX.e_j, e_j \rangle = \sum_j \langle X.e_j, A.e_j \rangle = \sum_j \lambda_j \langle X.e_j, e_j \rangle = \sum_j \langle XA.e_j, e_j \rangle = \text{tr}(XA).$$

(iv) Für  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{v_n, w_n}$ , erhalten wir mit  $X \in B_2(\mathcal{H})$  die Abschätzung

$$|\langle A, X \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |\langle P_{v_n, w_n}, X \rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| |\langle v_n, X.w_n \rangle| \leq \|X\| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|v_n\| \|w_n\| = \|X\| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|.$$

Also ist  $\|A\|_1 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$ .

Für die Umkehrung sei  $|\lambda_n| = \lambda_n \mu_n$  mit  $|\mu_n| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $X_n := \sum_{j=1}^n \mu_j P_{v_j, w_j}$ . Dann folgt  $\|X_n\| \leq 1$  aus Lemma IV.2.1(v). Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &\geq \langle A, X_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle P_{v_j, w_j}, X_n \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \text{tr}(P_{v_j, X_n.w_j}) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle v_j, X_n.w_j \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \mu_j \langle v_j, v_j \rangle = \sum_{j=1}^n |\lambda_j|. \end{aligned}$$

Da  $n$  beliebig war, erhalten wir  $\|A\|_1 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$  und damit Gleichheit.

Ergänzen wir die Folge  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu einer ONB  $(w_j)_{j \in J}$  von  $\mathcal{H}$ , so erhalten wir wegen  $P_{v_n, w_n}.w_j = v_n$  für  $w_j = w_n$  und 0 sonst, die Formel

$$\text{tr} A = \sum_{j \in J} \langle A.w_j, w_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle A.w_n, w_n \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda \langle v_n, w_n \rangle.$$

(v) Da  $B_1(\mathcal{H})$  invariant unter der Adjunktion ist, reicht es aus zu zeigen, daß jedes symmetrische Element  $A$  in  $B_1(\mathcal{H})$  durch Operatoren endlichen Ranges bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_1$  approximiert werden kann (Satz I.2.4(iii)). Wir schreiben  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_{v_n}$ , wobei  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine orthonormale Folge ist. Dann erhalten wir aus (iv), daß

$$\|A - \sum_{n=1}^m \lambda_n P_{v_n}\|_1 = \sum_{n=m+1}^{\infty} |\lambda_n|.$$

Da die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|$  nach (iv) konvergiert, folgt die Behauptung.  $\blacksquare$



**Theorem IV.3.5.** *Die Paarung*

$$B_1(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$$

induziert Isomorphismen

$$B_1(\mathcal{H}) \cong K(\mathcal{H})' \quad \text{und} \quad B_1(\mathcal{H})' \cong B(\mathcal{H}).$$

Insbesondere ist  $B_1(\mathcal{H})$  ein Banachraum.

**Beweis.** Die Stetigkeit der Paarung

$$B_1(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$$

folgt aus  $|\operatorname{tr}(AB)| \leq \|AB\|_1 \leq \|A\|_1 \|B\|$ . Wir zeigen zuerst, daß diese Paarung einen Isomorphismus  $B_1(\mathcal{H}) \rightarrow K(\mathcal{H})'$  liefert. Sei also  $f \in K(\mathcal{H})'$ . Dann ist  $f|_{B_2(\mathcal{H})}$  ein lineares Funktional mit  $|f(X)| \leq \|f\| \cdot \|X\| \leq \|f\| \cdot \|X\|_2$  (Proposition IV.2.4(ii)), kann also durch ein Element  $Y \in B_2(\mathcal{H})$  dargestellt werden. Dann gilt  $f(X) = \langle X, Y \rangle = \operatorname{tr}(XY^*)$  für alle  $X \in B_2(\mathcal{H})$ , und aus  $|f(X)| \leq \|f\| \cdot \|X\|$  erhalten wir  $Y \in B_1(\mathcal{H})$  mit  $\|Y\|_1 = \|Y^*\|_1 \leq \|f\|$ . Die Umkehrung folgt aus der Dichtheit von  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H}) \subseteq B_2(\mathcal{H})$  in  $K(\mathcal{H})$ .

Jetzt zeigen wir  $B_1(\mathcal{H})' = B(\mathcal{H})$ . Wir haben also jedes stetige lineare Funktional  $f$  auf  $B_1(\mathcal{H})$  durch einen beschränkten linearen Operator auf  $\mathcal{H}$  darzustellen. Aus Proposition IV.3.4(iv) erhalten wir  $\|P_{v,w}\|_1 = \|v\| \cdot \|w\|$ . Also ist für jedes  $w \in \mathcal{H}$  die Abbildung  $v \mapsto f(P_{v,w})$  stetig und linear, kann also durch einen Vektor  $a_w$  in dem Sinne dargestellt werden, daß  $f(P_{v,w}) = \langle v, a_w \rangle$  für alle  $v \in \mathcal{H}$ . Weiter zeigt die obige Rechnung, daß  $\|a_w\| \leq \|f\| \cdot \|w\|$ . Da die Abbildung  $w \mapsto a_w$  linear sein muß, erhalten wir einen beschränkten Operator  $A$  auf  $\mathcal{H}$  mit  $A.w = a_w$  für alle  $w \in \mathcal{H}$  und  $\|A\| \leq \|f\|$ . Nun gilt  $f(P_{v,w}) = \langle v, A.w \rangle = \langle P_{v,w}, A \rangle$  für alle  $v, w \in \mathcal{H}$ . Hieraus erhalten wir  $f(X) = \operatorname{tr}(XA^*)$  für  $X \in B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$ . Da  $B_{\text{fin}}(\mathcal{H})$  wegen (v) in  $B_1(\mathcal{H})$  dicht ist, sehen wir, daß  $f(X) = \operatorname{tr}(XA^*)$  für alle  $X \in B_1(\mathcal{H})$  gilt. Damit ist (vi) bewiesen.

Da  $B_1(\mathcal{H}) = K(\mathcal{H})'$  aus (vi) folgt, erhalten wir die Vollständigkeit von  $B_1(\mathcal{H})$  aus der Tatsache, daß Dualräume von normierten Räumen immer vollständig sind (vgl. [Ne96]). ■

Das Theorem IV.3.5 sollte man in Analogie sehen zu den Isomorphismen

$$c'_0 \cong l^1 \quad \text{und} \quad (l^1)' \cong l^\infty.$$

Hierbei entspricht  $c_0$  dem Raum  $K(\mathcal{H})$ ,  $l^1$  dem Raum  $B_1(\mathcal{H})$ , sowie  $l^\infty$  dem Raum  $B(\mathcal{H})$ . Man kann dies auch dahingehend konkretisieren, daß man für eine orthonormale Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Einbettung

$$\Phi: l^\infty \rightarrow B(\mathcal{H}), \quad x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P_{v_n}$$

betrachtet. Man beachte, daß die Summe auf der rechten Seite nicht im Sinne der Norm in  $B(\mathcal{H})$  konvergiert, aber daß durch

$$\Phi(x).y = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n P_{v_n}.y = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \langle y, v_n \rangle v_n$$

ein beschränkter Operator definiert wird. Die Summe konvergiert nun wegen  $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle y, v_n \rangle|^2 \leq \|y\|^2$  und wir haben

$$\|\Phi(x)\| = \|x\|_\infty.$$

Weiter gilt

$$l^1 = \Phi^{-1}(B_1(\mathcal{H})) \quad \text{und} \quad c_0 = \Phi^{-1}(K(\mathcal{H})),$$

sowie

$$l^2 = \Phi^{-1}(B_2(\mathcal{H}))$$

(Übung!).

## Literatur zur Vorlesung Spektral- und Darstellungstheorie

- [Ne96] Neeb, K.-H., "Kurzschrift zur Funktionalanalysis", WS 95/96, Universität Erlangen-Nürnberg, 1996.
- [Ru73] Rudin, W., "Functional Analysis", McGraw Hill, 1973 (Eine breite Einführung in die Funktionalanalysis und Spektraltheorie mit vielen Anwendungskapiteln, z.B. Distributionen und Fouriertransformation).
- [We95] Werner, D., "Funktionalanalysis", Springer, 1995 (Eine moderne ausführliche und sehr gut lesbare Einführung in die Funktionalanalysis. Mit sehr vielen ausführlichen Anwendungen).

### Weiterführende Literatur

#### Hilberträume

- [Ha57] Halmos, P. R., "Introduction to the theory of Hilbert space and spectral multiplicity", Chelsea Publishing Co., New York, 1957 (Der Kern des Buches ist die Diskussion der Frage der Vielfachheiten von Darstellungen in einem sehr allgemeinen Kontext).
- [Zi90] Zimmer, R. J., "Essential Results in Functional Analysis", Chicago Lecture Notes in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, London, 1990 (Eine knappe Einführung in die Fouriertransformation, Spektralsatz).

#### Abstrakte Darstellungstheorie

- [Dix64] Dixmier, J., "Les  $C^*$ -algèbres et leurs représentations", Gauthier-Villars, Paris, 1964 (Immer noch *der* Klassiker über  $C^*$ -Algebren).
- [Ga73] Gaal, S. A., "Linear Analysis and Representation Theory", Springer Verlag, 1973 (Ein sehr schönes Buch, in dem man insbesondere auch eine ausführliche Diskussion induzierter Darstellungen findet).
- [HR70] Hewitt, E., and K. A. Ross, "Abstract Harmonic Analysis I, II", Springer Verlag, Berlin, 1970 (Ein eher enzyklopädischer Zugang zur harmonischen Analysis, daher nicht leicht lesbar).
- [Ma76] Mackey, G. W., "The theory of unitary group representations", Chicago Lecture Notes in Mathematics, The University of Chicago Press, Chicago, London, 1976 (Globale Darstellungstheorie, Typenklassifikation, Borel-Struktur auf  $\hat{G}$ , Boolesche Algebren von Projektionen).

- [Neu90] Neumark, M. A., “Normierte Algebren”, Verlag Henri Deutsch, Frankfurt, 1990 (Ein Klassiker: Hier findet man in erster Linie den Zugang zur Darstellungstheorie lokalkompakter Gruppen über die Gruppenalgebra  $L^1(G)$ , Darstellungstheorie von  $C^*$ -Algebren).
- [Ru62] Rudin, W., “Fourier Analysis on Groups”, John-Wiley and Sons, 1962 (Ein gut lesbarer Klassiker über Analysis auf lokalkompakten abelschen Gruppen).

### Kompakte Gruppen

- [BtD85] Bröcker, T., and T. tom Dieck, “Representations of compact Lie groups”, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985 (Ein Zugang zu kompakten Lie-Gruppen vom differentialgeometrischen Standpunkt aus).
- [Bou82] Bourbaki, N., *Groupes et algèbres de Lie, Chapitre 9*, Masson, Paris, 1982 (Eine Standardquelle für kompakte Lie-Gruppen).

### Darstellungstheorie einiger konkreter Gruppen

- [Su75] Sugiura, M., “Unitary representations and harmonic analysis – An introduction”, John Wiley and Sons, New York, 1975 (dieses Buch entwickelt die Grundideen der Darstellungstheorie am Beispiel der Gruppen  $S^1$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $SO(2)$ ,  $SU(2)$ ,  $SL(2, \mathbb{R})$  und der euklidischen Bewegungsgruppe).

### Anwendungen in der Physik und in anderen Gebieten

- [Di88] Diaconis, P., “Group representations in probability and statistics”, Inst. Math. Statistics, Hayward, CA, 1988 (Dieses Buch behandelt zum Beispiel die Anwendung der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppe  $S_n$  auf das Mischen von Spielkarten).
- [GM85] Greiner, W., and B. Müller, “Theoretische Physik, Bd. 5, Quantenmechanik II, Symmetrien”, Verlag Henri Deutsch, 1985 (Eine Darstellung der in der Quantenmechanik relevanten Symmetrien von einem sehr physikalischen Standpunkt aus. Aus mathematischer Sicht nicht befriedigend).
- [Gu92] Gurarie, D., “Symmetries and Laplacians: Introduction to harmonic analysis, group representations, and applications”, North-Holland, Amsterdam, 1992 (Wie der Titel schon vermuten läßt, ist das Buch auf die darstellungstheoretische Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen mit Symmetrien ausgerichtet).
- [He66] Hermann, R., “Lie groups for physicists”, Benjamin, Inc., New York, 1966 (Dieses Buch beschreibt einige grundlegende Techniken der Lieschen Theorie, die in der theoretischen Physik relevant sind).
- [Ma78] Mackey, G. W., “Unitary group representations in Physics, Probability, and number theory”, Addison Wesley, 1978 (Hier findet man eine Zusammenstellung der verschiedensten Anwendungen darstellungstheoretischer Methoden).
- [Ma92] Mackey, G. W., “The Scope and History of Commutative and Noncommutative Harmonic Analysis”, History of Math. Vol. 5, Amer. Math. Soc., 1992 (Eine sehr ausführliche Beschreibung der historischen Entwicklung der Darstellungstheorie und ihrer Anwendungen).
- [St94] Sternberg, S., “Group Theory and Physics”, Cambridge University Press, 1994 (Dieses schöne Buch zeichnet sich dadurch aus, daß hier sehr viele konkrete physikalische Probleme eingehend diskutiert werden).

- [Va85] Varadarajan, V. S., “Geometry of Quantum Theory”, Springer Verlag, 1985 (In diesem Buch findet man eine besonders schöne Diskussion der Grundlagen der Quantenmechanik von einem darstellungstheoretischen Standpunkt aus).