Notiz über exakte Lösungen der logistischen Rekursion

$$\boldsymbol{x_{n+1} = a x_n (1 - x_n)}$$

a) Am bekanntesten ist der Fall $a = 4$.

Mit der Substitution $x =: \sin^2 \frac{\pi}{2} t \ (0 \le t \le 1)$, durch die eine monotone *Bijektion* des Intervalls $0 \le x \le 1$ aufs Intervall $0 \le t \le 1$ gegeben ist, geht die Rekursion über in

$$\sin^2 \tfrac{\pi}{2} t_{n+1} = 4 \sin^2 \tfrac{\pi}{2} t_n (1 - \sin^2 \tfrac{\pi}{2} t_n),$$

und wegen $1 - \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi$ sowie $2 \sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{t_{n+1} = \begin{cases} 2t_n, & 0 \le t_n \le 1/2, \\ 2(1 - t_n), & 1/2 < t_n \le 1 \end{cases}}$$

(„Hütchen"-Funktion, *Tent Map*). Natürlich können wir auch einfach folgern: $\boldsymbol{x_n = \sin^2 2^n \arcsin\left(\sqrt{x_0}\right) \ (n \ge 0)}$; das ist eine *Lösung in geschlossener Form*, aber weniger aufschlussreich als die genauere Analyse der t_n, die nun folgt.

Der Fall $t_0 = 0$ ergibt trivialerweise die identisch verschwindende Folge; ebenso *endet* die Folge in lauter Nullen, wenn irgendwann mal zwischendurch 1 auftritt (wie z.B. bei $x_0 = 1/2 = t_0$, $\arcsin(1/\sqrt{2}) = \pi/4$).

Ansonsten ist diese Rekursion sehr leicht zu beschreiben, indem wir $t_0 \in (0, 1]$ und alle weiteren $t_n \ne 0$ darstellen durch *eindeutige* unendliche *Dualbruchentwicklungen*, die *nicht* in lauter Nullen enden:

$$t_n = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots \mapsto t_{n+1} = \begin{cases} 0.d_2 d_3 \cdots, & d_1 = 0, \\ 0.(1-d_2)(1-d_3)\cdots, & d_1 = 1,\ \infty \text{ viele } d_k \ne 1, \\ 0.(1-d_2)\cdots(1-d_{k-1})0111\cdots, & d_1 = 1, d_k = 0, d_l = 1\ (l > k), \\ 0, & t_n = 1 = 0.111\cdots. \end{cases}$$

Die abzählbare Menge von t_0-Werten, deren Dualdarstellung in lauter Einsen endet, führt *immer* auf eine schließlich in lauter Werten Null endende x_n-Folge. In allen anderen Fällen, denjenigen mit uendlich vielen Nullen *und* unendlich vielen Einsen in der Dualentwicklung, tritt dies *nicht* ein, da diese Eigenschaft beim Aufrücken bzw. Aufrücken und Komplementbildung erhalten bleibt.

Die abzählbare Menge liegt *überall dicht*, so dass in bliebiger Nähe jedes Wertes x ein x_0 liegt, für das Konvergenz gegen 0 stattfindet.

Betrachten wir folgende *periodische* Dualziffernfolge:

$$t_n = 0.\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\cdots$$

Dann folgt:

$$t_{n+k} = 0.10\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\cdots,$$

$$t_{n+k+1} = 0.1\ \underbrace{1\cdots1}_{k-\text{mal } 1}\ 01\ \underbrace{1\cdots1}_{k-\text{mal } 1}\ 01\cdots,$$

$$t_{n+k+2} = 0.\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\ \underbrace{0\cdots0}_{k-\text{mal } 0}\ 10\cdots = t_n.$$

Es liegt also bei den dementsprechenden x_n eine *Periode* der Länge $k+2$ vor.

An *jede beliebige endliche* Dualziffernfolge kann man die gerade betrachtete Folge anhängen. Bei jedem Rekursionsschritt fällt die vorderste Stelle weg und es wird eventuell das Komplement gebildet. Kam eine ungerade Anzahl von Komplement-Bildungen vor, schaltet man noch eine zusätzliche Dualziffer 1 dazwischen. So ist garantiert, dass irgendwann das betrachtete t_n auftritt.

Man sieht also: Nur bei *unendlich genauer* Kenntnis des Anfangswertes x_0 kann man sagen, ob die Folge gegen 0 strebt *oder* eine Periode irgendeiner Länge aufweist *oder* auch gänzlich unperiodisch verläuft; für letzteres braucht man beispielsweise nur die Blöcke von k Nullen beim vorigen Beispiel durch *lauter unterschiedlich lange* Blöcke von Nullen zu ersetzen.

Daher sagt man: Im Falle $a = 4$ verhält sich die logistische Folge *chaotisch*.

b) Der Fall $a = 2$.

Mit $x_{n+1} = 2x_n(1 - x_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} - \frac{1}{2} = -2(x_n - \frac{1}{2})^2$ sowie $y_n := 2x_n - 1$ gilt also $y_{n+1} = -y_n^2$ und damit $y_n = -y_0^{2^n} \ (n \geq 1)$, folglich

$$\boldsymbol{x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Big(2x_0 - 1\Big)^{2^n} \quad (n \geq 1).}$$

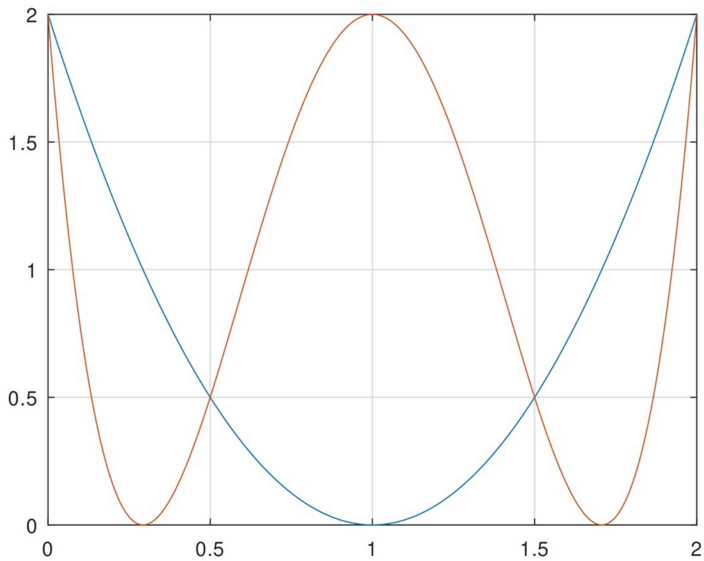
Man sieht, dass die Folge für $0 < x_0 < 1$ *quadratisch* gegen ½ konvergiert.

Im sinnvollen Parameterbereich $0 \leq a \leq 4$ der logistischen Iteration scheint es keinen weiteren Fall einer Lösung in geschlossener Form zu geben. Rein algebraisch kann man aber auch *andere* Werte a betrachten. Und es gibt noch *eine einzige* weitere bekannte geschlossene Lösung:

c) Der Fall $a = -2$.

$$x_{n+1} = -2x_n(1 - x_n) \quad \Leftrightarrow \quad 2x_{n+1} + 1 = (2x_n - 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} = 2(y_n - 1)^2$$

mit $y_n := x_n + \frac{1}{2}$. Plot der Iterationsfunktion $f(y) = 2(y-1)^2$ und von $f^2(y) = f(f(y))$:



(OCTAVE-Plot.)

Diese Iterationsfunktion ist, um 180 Grad gedreht und um den Faktor ½ geschrumpft, so dass die Ecke [2,2] in den Nullpunkt und dieser in die Ecke [1,1] übergeht, *identisch* mit der Iterationsfunktion zum Parameterwert $a = 4$. Die *Dynamik der Iteration* (z.B. per *Cobweb Plot*) bleibt dabei auch *dieselbe*.

Damit ist klar, dass auch hier eine trigonometrische *Darstellung in geschlossener Form* angeben werden kann und gemäß a) *Chaos* eintritt.

Und zwar gilt: $\varphi(x) := 4x(1-x) \quad \Rightarrow \quad f^n(y) = 2 - 2\varphi^n(1 - \frac{y}{2})$. Man kann dies per Induktion leicht aus $f(y) = 2 - 2\varphi(1 - \frac{y}{2})$ folgern. Mit a) ergibt sich:

$$\boldsymbol{x_n} = y_n - \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} - 2\varphi^n(\tfrac{3}{4} - \tfrac{x_0}{2}) = \boldsymbol{\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\Big(2^n \arcsin\sqrt{\tfrac{3}{4} - \tfrac{x_0}{2}}\Big) = \tfrac{1}{2} + \cos\Big(2^{n+1} \arcsin\sqrt{\tfrac{3}{4} - \tfrac{x_0}{2}}\Big)}$$

Siehe Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, 2002, S. 1098; dort ist eine etwas kompliziertere Darstellung angegeben.