KAPITEL 1

Parameterabhängige Integrale

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für jedes $x \in I$ die Funktion

$$t \mapsto f(t, x)$$

integrierbar ist. Dann definiert $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^b f(t, x)dt$$

eine Funktion. Das Integal $\int_a^b f(t, x)dt$ hängt vom Parameter x ab.

Beispiele:

(1) Wir betrachten $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_1^2 e^{tx} dt.$$

Dieses Integral können wir ausrechnen (indem wir x als Konstante betrachten): Im Fall $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{tx}}{x} \right) = e^{tx},$$

sodass $\frac{e^{tx}}{x}$ eine Stammfunktion für das Integral ist und wir erhalten

$$F(x) = \int_1^2 e^{tx} dt = \left[\frac{e^{tx}}{x} \right]_{t=1}^2 = \frac{e^{2x} - e^x}{x} \text{ für } x \neq 0.$$

Für $x = 0$ ist

$$F(0) = \int_1^2 dt = 1.$$

(2) Die Integralfunktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

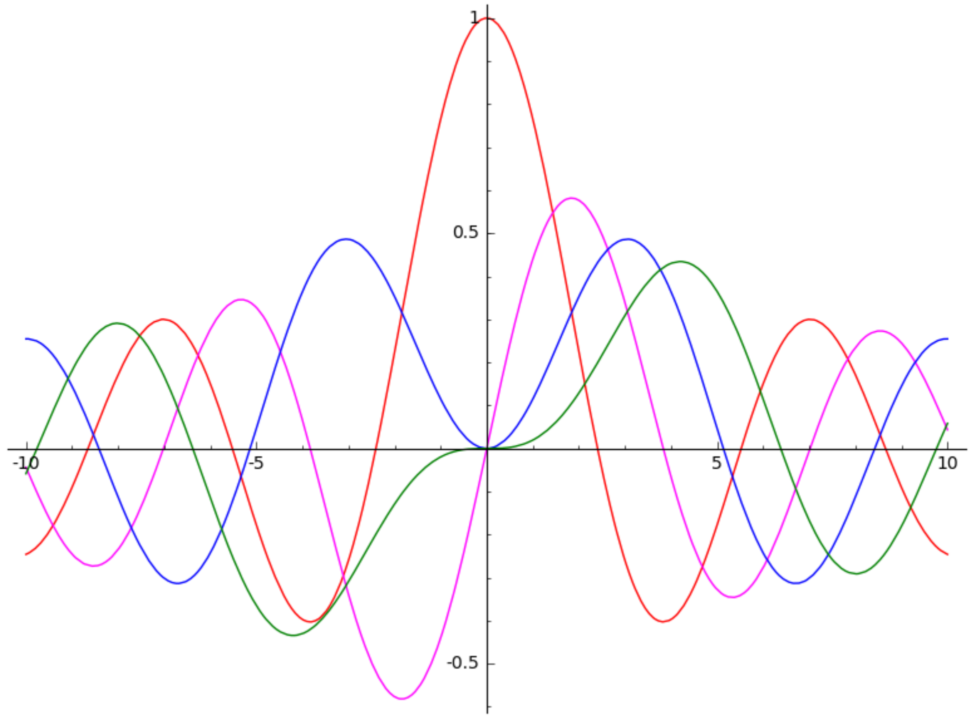
$$G(x) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{t} dt$$

kann nicht wie das Integral zuvor explizit ausgerechnet werden. (Es gibt eine Darstellung mittels der sogenannten Exponentialintegralfunktion `Ei`.)

(3) Für $n \in \mathbb{Z}$ lässt sich die sogenannte Bessel-Funktion der Ordnung n durch

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t)dt$$

Datei: al_int1.tex. Version vom 11.1.2020 definieren. (Sage: `bessel_J(n,x)`)



($J_0(x)$: rot, $J_1(x)$: magenta, $J_2(x)$: blue $J_3(x)$: grün.

Satz. *Sei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und*

$$F : I \to \mathbb{R} \text{ mit } F(x) = \int_a^b f(t,x)dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Dann gilt:

(1) *Die Funktion F ist stetig auf I, d.h. es gilt für $x_0 \in I$*

$$\lim_{x \to x_0} \int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \lim_{x \to x_0} f(t,x)dt = \int_a^b f(t,x_0)dt.$$

(2) *Ist f stetig partiell differenzierbar nach der 2. Variablen, so ist F stetig differenzierbar auf I und es gilt*

$$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt$$

oder ausgeschrieben

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(t,x)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt.$$

Beweis:

(1) Wir wollen zeigen, dass F in einem beliebigen Punkt $x_0 \in I$ stetig ist. Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir annehmen, dass I ein kompaktes Intervall ist, das x_0 als inneren Punkt enthält. Die stetige Funktion f ist dann auf der kompakten Menge $[a,b] \times I$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass insbesondere gilt

$$|f(t,x) - f(t,x_0)| < \varepsilon \text{ für alle } (t,x),(t,x_0) \in [a,b] \times I \text{ mit } \|(t,x)-(t,x_0)\| = |x-x_0| < \delta.$$

Es folgt für $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left|\int_a^b (f(t,x) - f(t,x_0))dt\right| \leq \int_a^b |f(t,x) - f(t,x_0)|dt \leq \\ &\leq \int_a^b \varepsilon dt = (b-a)\varepsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Stetigkeit von F in x_0.

(2) Ein Beweis findet sich in Forster/Analysis 2/§10. ■

Beispiele:

(1) Wir betrachten $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_1^2 e^{tx} dt$$

und erhalten mit der Formel des letzten Satzes

$$F'(x) = \int_1^2 te^{tx} dt.$$

Für $x \neq 0$ vereinfachen wir das Integral mittels partieller Integration unter Verwendung von $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{e^{tx}}{x}) = e^{tx}$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_1^2 e^{tx} \cdot t\, dt = \left[\frac{e^{tx}}{x} \cdot t\right]_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{e^{tx}}{x} \cdot 1 dt = \\ &= \frac{2e^{2x} - e^x}{x} - \frac{1}{x}\left[\frac{e^{tx}}{x}\right]_{t=1}^2 = \frac{2e^{2x} - e^x}{x} - \frac{e^{2x} - e^x}{x^2} = \\ &= \frac{2e^{2x}}{x} - \frac{e^x}{x} - \frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{e^x}{x^2}. \end{aligned}$$

Für $x = 0$ ist

$$F'(0) = \int_1^2 t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^2 = \frac{3}{2}.$$

(Natürlich erhält man das gleiche Ergebnis, wenn man die zuvor angegebene explizite Darstellung von $F(x)$ differenziert.)

(2) Für $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) = \int_1^2 \frac{e^{tx}}{t} dt$$

erhalten wir

$$G'(x) = \int_1^2 \frac{e^{tx} \cdot t}{t} dt = \int_1^2 e^{tx} dt = F(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(3) Nun betrachten wir die Besselfunktionen $J_n(x)$:

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt)dt, \\ J_n'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (-\sin(x\sin(t) - nt))\sin(t)dt = \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x\sin(t) - nt)dt, \\ J_n''(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t) \cdot \cos(x\sin(t) - nt) \cdot \sin(t)dt = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t) - nt) \cdot (-(\sin(t)^2)dt. \end{aligned}$$

Wir formen $J_n'(x)$ nochmals mittels partieller Integration um:

$$\begin{aligned}
J_n'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (-\sin(t))\cdot\sin(x\sin(t)-nt)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\cos(t)\cdot\sin(x\sin(t)-nt)\right]_{t=0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(t)\cdot\cos(x\sin(t)-nt)\cdot(x\cos(t)-n)dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t)-nt)\cdot(-x(\cos(t))^2+n\cos(t))dt
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x) = \\
= &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t)-nt)\cdot\Big(-x^2(\sin(t))^2-x^2(\cos(t))^2+xn\cos(t)+x^2-n^2\Big)dt = \\
= &\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin(t)-nt)\cdot n\cdot(x\cos(t)-n)\,dt = \\
= &\frac{n}{\pi}\Big[\sin(x\sin(t)-nt)\Big]_{t=0}^{\pi} = \frac{n}{\pi}\left(\sin(x\sin(\pi)-n\pi)-\sin(x\sin(0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst:

$$x^2J_n''(x)+xJ_n'(x)+(x^2-n^2)J_n(x)=0.$$

($J_n(x)$ löst die sogenannte Besselsche Differentialgleichung $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$.)

(4) Das Integral

$$\int_0^a t^2\cos(t)dt$$

soll berechnet werden. (Natürlich ist auch partielle Integration möglich.) Wir betrachten dazu die Integralfunktion

$$F(x)=\int_0^a \cos(tx)dt.$$

Es gilt

$$F'(x)=\int_0^a(-t\sin(tx))dt \quad \text{und} \quad F''(x)=\int_0^a(-t^2\cos(tx))dt,$$

also

$$F''(1)=-\int_0^a t^2\cos(t)dt.$$

Andererseits ist für $x\neq 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{x}\sin(tx)\right)=\cos(tx),$$

also

$$F(x)=\left[\frac{1}{x}\sin(tx)\right]_{t=0}^{a}=\frac{\sin(ax)}{x}.$$

Nun differenzieren wir diese Darstellung von $F(x)$:

$$F'(x)=\frac{a\cos(ax)}{x}-\frac{\sin(ax)}{x^2} \quad \text{und} \quad F''(x)=-\frac{a^2\sin(ax)}{x}-\frac{2a\cos(ax)}{x^2}+\frac{2\sin(ax)}{x^3}.$$

Es folgt

$$\int_0^a t^2\cos(t)dt=-F''(1)=a^2\sin(a)+2a\cos(a)-2\sin(a).$$

Bemerkung: Der letzte Satz lässt sich leicht verallgemeinern: Ist $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und $f=f(t,x_1,\ldots,x_n):[a,b]\times D\to\mathbb{R}$ stetig und nach $x_1,\ldots,x_n$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_a^b f(t,x_1,\ldots,x_n)dt=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x_1,\ldots,x_n)dt.$$

Wir betrachten jetzt eine andere Art von Integralfunktionen: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \in I$, so definiert $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

nach dem **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung** eine stetig differenzierbare Funktion mit Ableitung

$$F'(x) = f(x).$$

Dies wird wie folgt verallgemeinert:

Satz. *Seien $I_0, I \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, sei $f : I_0 \times I \to \mathbb{R}$ stetig und stetig partiell differenzierbar nach der 2. Variablen, seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\varphi(I) \subseteq I_0$ und $\psi(I) \subseteq I_0$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann ist die Integralfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit*

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t,x)dt$$

differenzierbar mit Ableitung

$$F'(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt + f(\psi(x),x) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x),x) \cdot \varphi'(x).$$

Beweis: Wir definieren $G : I \times I_0 \times I_0 \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x,y,z) = \int_{y}^{z} f(t,x)dt.$$

G ist stetig und partiell differenzierbar:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial x} &= \int_y^z \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt, \\
\frac{\partial G}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\int_z^y f(t,x)dt\right) = -f(y,x), \\
\frac{\partial G}{\partial z} &= f(z,x).
\end{aligned}$$

Nun ist $F(x) = G(x, \varphi(x), \psi(x))$, sodass mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,\varphi(x),\psi(x)) + \frac{\partial G}{\partial y}(x,\varphi(x),\psi(x)) \cdot \varphi'(x) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,\varphi(x),\psi(x)) \cdot \psi'(x) = \\
&= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)dt - f(\varphi(x),x)\varphi'(x) + f(\psi(x),x)\psi'(x)
\end{aligned}$$

Die Formel des Satzes wird manchmal auch als Leibnizregel für Parameterintegrale bezeichnet.

Beispiele:

(1) Wir betrachten

$$F(x) = \int_{x+1}^{x^2} \cos(tx)dt.$$

Dann gilt

$$F'(x) = \int_{x+1}^{x^2} (-\sin(tx)) \cdot t dt + \cos(x^2 \cdot x) \cdot 2x - \cos((x+1) \cdot x) \cdot 1 = \dots.$$

(2) Zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ und einer Zahl $k \neq 0$ betrachten wir die Integralfunktion
$$F(x) = \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin(k(x-t))dt.$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{k}\int_0^x f(t)\cos(k(x-t))\cdot k\,dt + \frac{1}{k}f(x)\sin(k(x-x))\cdot 1 = \\ &= \int_0^x f(t)\cos(k(x-t))dt, \\ F''(x) &= \int_0^x f(t)(-\sin(k(x-t)))\cdot k\,dt + f(x)\cos(k(x-x))\cdot 1 = \\ &= -k\int_0^x f(t)\sin(k(x-t))dt + f(x). \end{aligned}$$
Daher folgt
$$F''(x) + k^2F(x) = f(x).$$
($F(x)$ ist also eine Lösung der sogenannten Schwingungsgleichung $y'' + k^2y = f(x)$ mit $y(0) = y'(0) = 0$.)

Bemerkung: Die vorangegangenen Eigenschaften von Parameterintegralen übertragen sich nicht ohne Weiteres auf uneigentliche Integrale, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beispiele Wir wollen das Parameterintegral
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{x}{1+(tx)^2}dt$$
untersuchen. Für $x \neq 0$ erhalten wir mit der Substitution $u = tx$, $dt = \frac{1}{x}du$
$$\int_0^R \frac{x}{1+(tx)^2}dt \overset{\substack{\text{Substitution} \\ u=tx \\ dt=\frac{1}{x}du}}{=} \int_0^{Rx}\frac{du}{1+u^2} = [\arctan(u)]_{u=0}^{Rx} = \arctan(Rx),$$
also mit $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ und $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$
$$F(x) = \int_0^\infty \frac{x}{1+(tx)^2}dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x < 0, \end{cases}$$
wobei wir die triviale Aussage $F(0) = 0$ mit eingefügt haben. Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Integralfunktion $F(x)$ nicht stetig sein muss, obwohl $f(t,x) = \frac{x}{1+(tx)^2}$ stetig (und sogar beliebig oft stetig partiell differenzierbar) ist.

Wir kommen zum Schluss dieses Abschnitts noch auf sogenannte **Doppelintegrale** zu sprechen, was nachfolgend verallgemeinert werden wird.

Satz. *Seien $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ kompakte Intervalle und*
$$f : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion. Dann sind auch die Funktionen $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ und $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit
$$F(y) = \int_a^b f(x,y)dx \quad \text{und} \quad G(x) = \int_c^d f(x,y)dy$$
stetig, also integrierbar, und es gilt
$$\int_c^d F(y)dy = \int_a^b G(x)dx,$$

mit anderen Worten

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

(Die Vertauschbarkeit der Integrale wird auch als **Satz von Fubini** *bezeichnet.)*

Beweis: Wir definieren $G : [c,d] \to \mathbb{R}$ durch

$$G(y) = \int_a^b \left(\int_c^y f(x,z)dz \right) dx.$$

Dann gilt

$$G'(y) = \int_a^b \frac{d}{dy} \left(\int_c^y f(x,z)dz \right) dx = \int_a^b f(x,y)dx,$$

und damit

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx \quad = \quad G(d) = G(d) - G(c) = \int_c^d G'(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

was die Behauptung beweist. ■